Cuarta edición

Matemáticas financieras aplicadas

Uso de las calculadoras financieras *y* EXCEL

Jhonny de Jesús Meza Orozco

ECOE EDICIONES

JHONNY DE JESÚS MEZA OROZCO

Ingeniero en Transportes y Vías de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Especialista en Finanzas y especialista en Gestión Gerencial de la Universidad de Cartagena. Diplomado en Ingeniería Financiera en el ITSM de Monterrey. Diplomado en Finanzas Avanzadas de la Uninorte y Eafit.

Profesor de tiempo completo en la Universidad Popular del Cesar. Catedrático de Matemáticas Financieras en la Universidad de Santander. Profesor de Posgrado en el área financiera de las universidades del Norte, del Sinú, de Sucre, Tecnológica de Bolívar, de Cartagena, Popular del Cesar; en la Corporación Universitaria del Caribe.

Vicerrector de Investigación y Extensión de la Universidad Popular del Cesar. Miembro de la Sociedad Colombiana de Ingenieros. Autor de *Evaluación Financiera de Proyectos*.

Cuarta edición

Matemáticas financieras aplicadas

Uso de las calculadoras financieras *y* EXCEL

Jhonny de Jesús Meza Orozco

Meza Orozco, Jhonny de Jesús
Matemáticas financieras aplicadas / Jhonny de Jesús Meza. Orozco. -- 4a. ed. -- Bogotá: Ecoe Ediciones, 2011
566 p.; 24 cm.
ISBN 978-958-648-728-3
1. Matemáticas financieras 2. Tasas de interés 3. Amortización 4. Inversiones - Evaluación I. Tít.

511.8 cd 21 ed.

CEP-Banco de la República-Biblioteca Luis Ángel Arango

Colección: Ciencias administrativas
Área: Contabilidad y finanzas

Primera edición: Valledupar, 2002
Segunda edición: Bogotá, D.C., enero de 2003
Tercera edición: Bogotá, D.C., enero de 2008
Reimpresión: Bogotá, D.C., septiembre de 2008
Reimpresión: Bogotá, D.C., agosto de 2009
Reimpresión: Bogotá, D.C., enero de 2010
Reimpresión con revisión, correcciones y actualización:
Bogotá, D.C., enero de 2011
Cuarta edición: Bogotá, D.C., julio de 2011
Primera reimpresión: Bogotá, D.C., septiembre de 2011

ISBN 978-958-648-728-3

© Jhonny de Jesús Meza Orozco
E-mail: jhonmeor@hotmail.com

© Ecoe Ediciones Ltda
E-mail: correo@ecoeediciones.com
www.ecoeediciones.com

Carrera 19 No. 63C-32, PBX. 2481449, FAX. 3461741
Coordinación editorial: Alexander Acosta Quintero
Diseño y diagramación: Denise Rodríguez Ríos
Diseño de carátula: Edwin Penagos Palacio
Impresión: Litoperla Impresores Ltda.
Carrera 25 N° 8-81 Tel: 3711917 Bogotá D.C.

Impreso y hecho en Colombia.

Dedicatoria

A la memoria de mi padre,
José Lucas
Meza Dangond
(Q.E.P.D.)
a mi madre
a mi familia
a mis alumnos.

TABLA DE CONTENIDO

Prólogo XIII

CAPÍTULO 0. PRELIMINARES 1

1. Introducción 1
2. Ecuaciones de primer grado con una incógnita 2
2.1 Principios fundamentales de las ecuaciones 2
3. Potenciación 4
3.1 Operaciones con potencias 4
3.2 Operaciones inversas de la potenciación 6
Radicación 7
Operaciones con radicales 8
4. Logaritmos 9
4.1 Propiedades de los logaritmos 9
4.2 Operaciones con logaritmos 10
4.3 Sistemas de logaritmos 11
Logaritmos decimales o vulgares (Logaritmos de Briggs) 11
Logaritmos naturales o neperianos 12
Antilogaritmos 12
5. Ecuaciones exponenciales 13

CAPÍTULO 1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES 15
0. Introducción 15
1. Valor del dinero en el tiempo 16
2. Interés 18
2.1 Tasa de interés 19
3. Equivalencia 20
4. Resumen de los conceptos fundamentales 21
5. Símbolos y su significado 22
6. Flujo de caja 23
Cuestionario 27
Solucionario Capítulo 1 28

CAPÍTULO 2. INTERÉS SIMPLE 31
0. Introducción 31
1. Definición de interés simple 32
1.1 Características del interés simple 32
2. Cálculo del interés 32
3. Interés comercial y real 35
4. Cálculo del número de días entre fechas 35
5. Valor futuro a interés simple 39
6. Desventajas del interés simple 40
7. Intereses moratorios 41
8. Valor presente a interés simple 42
9. Cálculo de la tasa de interés simple 43
10. Cálculo del tiempo de negociación 43
11. Operaciones de descuento 44
11.1 Descuento comercial 45
11.2 Descuento racional o justo 46
Cuestionario 47
Solucionario Capítulo 2 48

CAPÍTULO 3. INTERÉS COMPUESTO 51
0. Introducción 51
1. Definición del interés compuesto 52

1.1 Capitalización ... 52
1.2 Período de capitalización ... 52
2. Valor futuro a interés compuesto ... 53
3. Características del interés compuesto ... 54
4. Análisis de la fórmula de interés compuesto ... 55
5. Introducción al manejo de la calculadora financiera ... 60
5.1 La hoja de cálculo EXCEL ... 66
6. Valor futuro con tasa variable ... 70
7. Valor presente a interés compuesto ... 73
7.1 Valor presente con tasa variable ... 76
8. Tasa de interés compuesta ... 78
9. Tiempo de negociación ... 80
10. Ecuaciones de valor ... 82
10.1 Pasos para construir una ecuación de valor ... 83
11. Cálculo de fechas desconocidas ... 92
12. Ecuaciones de valor con *Buscar objetivo* de Excel ... 98
Referencias relativas y referencias absolutas ... 98
Amortización ... 99
Composición de los pagos ... 100
Tabla de amortización ... 100
Cuestionario ... 110
Solucionario Capítulo 3 ... 111

CAPÍTULO 4. TASAS DE INTERÉS ... 137
0. Introducción ... 137
1. Tasa nominal ... 138
1.1 Formas de expresar la tasa nominal ... 138
1.1.1 En bancos comerciales, compañías de financiamiento comercial y corporaciones financieras ... 138
1.1.2 Tasa nominal referenciada con la D.T.F. ... 138
1.1.3 Tasa nominal referenciada con la UVR ... 139
2. Tasa efectiva ... 139
3. Tasa periódica ... 139
4. Relación entre la tasa nominal y la tasa periódica ... 141
5. Diferencia entre la tasa nominal y la tasa efectiva ... 142
6. Ecuación de la tasa efectiva ... 143
7. Relación entre las tasas efectivas periódicas ... 144
8. Tasas equivalentes ... 146
8.1 Caso 1 (Efectiva ⇔ Efectiva) ... 147

8.1.2 Conversión de efectiva periódica menor a efectiva periódica mayor 147
8.1.3 Caso de efectiva periódica mayor a efectiva periódica menor 149
8.2 Caso 2 (Efectiva ⇔ Nominal) 154
8.3 Caso 3 (Nominal ⇔ Efectiva) 155
8.4 Caso 4 (Nominal ⇔ Nominal) 159
9. Tasa de interés anticipada 162
9.1 Conversión de una tasa anticipada en vencida 164
9.2 Conversión de una tasa vencida en anticipada 166
10. Ecuación de la tasa efectiva en función de la tasa efectiva periódica anticipada 177
11. Diagrama de conversión de tasas de interés 179
12. Aplicación de la tasa anticipada con interés compuesto 180
13. Descuentos por pronto pago 182
14. D.T.F. (depósito a término fijo) 187
15. Unidad de valor real (UVR) 188
15.1 Características de la UVR 189
15.2 Cálculo de la UVR 189
16. Tasa de inflación 190
17. Tasa real o tasa deflactada 202
17.1 Rentabilidad neta de una inversión 203
17.2 Costo de la deuda después de impuestos 206
17.3 Rentabilidad real de una inversión 208
17.4 Costo real de un crédito 213
Apéndice: factores que determinan el costo del dinero 215
Solucionario Capítulo 4 218

CAPÍTULO 5. ANUALIDADES O SERIES UNIFORMES 243
0. Introducción 243
1. Definición de anualidad 245
1.1 Renta o pago 245
1.2 Período de renta 245
2. Condiciones para que una serie de pagos sea una anualidad 245
3. Clases de anualidades 246
4. Anualidad vencida 246
4.1 Valor presente de una anualidad vencida 246
4.2 Valor presente de una anualidad vencida con tasa variable 253
4.3 Valor de la cuota en función del valor presente 254
4.4 Valor futuro de una anualidad vencida 259
4.4.1 Valor futuro de una anualidad vencida con tasa variable 262

4.5 Valor de la cuota en función del valor futuro ... 268
4.6 Cálculo del tiempo de negociación ... 272
4.7 Cálculo de la tasa de interés ... 281
5. Anualidad con interés global ... 288
6. Cálculo del saldo insoluto ... 295
7. Anualidad anticipada ... 309
7.1 Valor presente de una anualidad anticipada ... 310
7.2 Valor de la cuota en una anualidad anticipada ... 323
7.3 Cálculo del tiempo de negociación ... 329
7.4 Cálculo de la tasa de interés en una anualidad anticipada ... 331
7.5 Valor futuro de una anualidad anticipada ... 339
8. Anualidad diferida ... 341
9. Anualidad perpetua ... 347
9.1 Valor presente de una anualidad perpetua ... 347
10. Anualidad general ... 349
10.1 Período de capitalización ... 349
10.2 Período de pago ... 349
Apéndice: arrendamiento financiero (LEASING) ... 356
Cálculo del canon de arrendamiento vencido ... 357
Cálculo del canon de arrendamiento anticipado ... 361
Solucionario Capítulo 5 ... 364

CAPÍTULO 6. GRADIENTES O SERIES VARIABLES ... 397
0. Introducción ... 397
1. Definición ... 399
2. Condiciones para que una serie de pagos sea un gradiente ... 399
3. Gradiente lineal o aritmético ... 399
3.1 Gradiente lineal creciente ... 400
4. Gradiente lineal decreciente ... 415
4.1 Valor presente de un gradiente lineal decreciente ... 415
5. Gradiente geométrico o exponencial ... 421
5.1 Gradiente geométrico creciente ... 421
5.2 Gradiente geométrico decreciente ... 427
Valor presente de un gradiente geométrico decreciente ... 427
6. Gradiente escalonado o en escalera ... 430
6.1 Valor presente de un gradiente geométrico escalonado ... 430
Ejemplo resumen ... 433
Solucionario Capítulo 6 ... 442

CAPÍTULO 7. SISTEMAS DE AMORTIZACIÓN 455
0. Definición 455
1. Sistema de amortización 455
1.1 Composición de los pagos 456
1.2 Tabla de amortización 456
1.3 Cálculo del saldo insoluto 456
2. Sistemas de amortización 457
2.1 Amortización con pago único del capital al final del plazo 457
2.2 Sistema de cuota fija 458
2.3 Sistema de cuota fija con cuotas extraordinarias 460
2.4 Sistema de cuota fija con período de gracia 462
2.5 Sistema de abono constante a capital 467
Con intereses vencidos 467
Con intereses anticipados 472
2.6 Sistema de cuota fija con interés global 476
2.7 Sistema de cuotas crecientes en forma lineal 477
2.8 Sistema de cuotas crecientes en forma geométrica 480
2.9 Amortización con cuotas mensuales fijas, crecientes anualmente en un porcentaje fijo 482
2.10 Sistema de cuota fija con tasa variable (D.T.F.) 484
2.11 Sistema de abono constante a capital con tasa variable (D.T.F.) 487
Solucionario Capítulo 7 489

CAPÍTULO 8. EVALUACIÓN DE ALTERNATIVAS DE INVERSIÓN 495
0. Introducción 495
1. Tasa de descuento 496
2. Valor presente neto (VPN) 496
2.1 Criterios para seleccionar alternativas usando el VPN 502
2.2 ¿Qué muestra el VPN? 512
2.3 Conclusiones sobre el VPN 513
2.4 Valor presente neto no periódico (VPN. NO PER.) 513
3. Tasa interna de retorno (TIR) 516
Método gráfico para calcular la TIR 523
¿Cómo se grafica el perfil del VPN? 523
Significado de la TIR 524
Criterios de selección de alternativas usando la TIR 526
4. Tasa verdadera de rentabilidad (TIR modificada) 526
5. Tasa interna de retorno no periódica (TIR. NO. PER.) 530
Cuestionario 532
Solucionario Capítulo 8 533

BIBLIOGRAFÍA 549

PRÓLOGO

Los oportunos comentarios recibidos de parte de profesores de la materia, alumnos de pregrado y posgrado, así como de pequeños empresarios y consultores financieros sobre la tercera edición de este libro, y el avance tecnológico en materia de herramientas computacionales aplicables a las finanzas hicieron imperiosa la necesidad de escribir esta cuarta edición. Son muchos los cambios con respecto a la tercera edición. El uso eficiente de la hoja de cálculo Excel modifica el sistema tradicional de enseñanza de las Matemáticas Financieras, que se apoyan en el supuesto de la reinversión a una misma tasa de interés, y esto en la práctica es, muchas veces, irreal. Bajo esta concepción se enseña todavía la Matemática Financiera y así fueron concebidas las fórmulas para hacer cálculos financieros. En la vida real las tasas de interés son fluctuantes en períodos cortos de tiempo, de tal forma que la concepción tradicional presenta sus limitaciones. Por estas razones, en este texto, se plantean nuevas situaciones a través de ejercicios resueltos y propuestos, en las cuales es necesario considerar el escenario de tasas variables.

En el capítulo 3, Interés compuesto, se incluye el cálculo del valor futuro y valor presente con tasa variable. En este mismo capítulo se utiliza, para los ejercicios que eran resueltos con una ecuación matemática conocida como ecuación de valor, la función de Excel, *Buscar objetivo* que resuelve cualquier ecuación de una incógnita, como lo son las ecuaciones de las Matemáticas Financieras. También se incorporan a los cálculos financieros las nuevas calculadoras financieras FC 100V y FC 200V.

En el capítulo 4, Tasas de interés, se resuelven nuevos ejercicios de conversiones de tasas de interés, orientados al sector financiero y aplicado a la vida práctica. Se establece una importante discusión sobre la consideración de las tasas periódicas como tasas efectivas. Se estudia en detalle la tasa de referencia DTF y la unidad de valor real (UVR).

En los capítulos 5 y 6 (Anualidades y Gradientes) los ejercicios se resuelven, además de la aplicación de las fórmulas y la calculadora financiera, con la función de Excel *Buscar objetivo*, escenario este que le permitirá al lector visualizar a través de una tabla de amortización la evolución de la operación financiera.

En el capítulo 7, Sistemas de amortización, además de los sistemas tradicionales que se utilizan para amortizar una obligación financiera, se plantea el caso del sistema de cuota fija y tasa variable, específicamente el caso de un crédito bancario o comercial referenciado con la tasa DTF.

En el capítulo 8, además del estudio del VPN y la TIR en proyectos con flujos netos de efectivo periódicos, se estudian situaciones financieras en las cuales éstos no necesariamente tienen que ser periódicos, que se resuelven por medio del VPN y la TIR no periódicos.

Creemos que de esta forma presentamos a la comunidad universitaria y al sector empresarial una obra actualizada, con las nuevas concepciones y herramientas financieras que les permitan potenciar su acervo académico, y contar con los suficientes elementos de juicio para tomar en forma acertada las decisiones financieras.

Jhonny de Jesús Meza Orozco
jhonmeor@hotmail.com

Hay dos tipos de expertos en finanzas: los que han hecho enormes fortunas personales y los que no poseen nada en absoluto. Para un millonario, mil millones de pesos es algo concreto y comprensible. Para el experto en matemáticas aplicadas y para el conferencista de temas económicos (suponiendo que ambos se encuentren en la miseria) mil millones de pesos son tan irreales como un millón de pesos, pues nunca han poseído esas sumas. Pero el mundo está lleno de personas que se hallan entre ambas categorías extremas, personas que nada saben de millones pero que están muy acostumbradas a pensar en miles, y son precisamente éstas las que forman los comités de finanzas.

C. Northcote Parkinson

CAPÍTULO 0

Preliminares

La Matemática es la reina de las ciencias
y la Aritmética la reina de la Matemática.

C. F. Gauss

1. Introducción

Ha sido evidente para el autor, por su experiencia como docente universitario en el área de finanzas, el bajo nivel de preparación que, en la ciencia de los números, exhibe una buena parte del alumnado que asiste al curso de Matemáticas Financieras, no obstante haber cursado las matemáticas básicas en los primeros semestres de educación superior. Las causas son diversas, entre las que se destacan circunstancias sicológicas y, sobre todo, metodológicas. En primer lugar, poco es lo que se ha hecho por desarraigar la prevención de que la ciencia matemática es demasiado difícil y está destinada a personas dotadas de condiciones excepcionalmente especiales. Y, por otra parte, la metodología desarrollada por algunos docentes no despiertan el entusiasmo y el interés hacia esta ciencia.

La Matemática Financiera es una rama de la matemática básica cuyo soporte es la Aritmética. Tanto es así, que algunos autores coinciden en afirmar que bien podría llamarse *Aritmética Financiera,* ya que para su manejo y comprensión sólo es necesario aplicar las operaciones fundamentales de la aritmética, algo de sentido común y capacidad de análisis.

Consciente el autor de esta realidad y con el ánimo de que el lector pueda abordar sin prejuicios el estudio de este texto, se propone exponer en este capítulo, en una forma clara y resumida, las operaciones fundamentales de la Aritmética, haciendo referencia a los temas específicos que se aplican en la solución de los problemas de las Matemáticas Financieras, aunque lo ideal sería que el lector hiciera un repaso general y concienzudo de esta materia utilizando cualquiera de los tantos textos que sobre este tema existen.

A pesar de la existencia en el mercado de las calculadoras científicas y financieras que contienen programas y comandos que permiten la solución rápida de las operaciones fundamentales de la Aritmética, es conveniente revisar los conceptos básicos de esta ciencia. Por esta razón, en este capítulo se tratarán los temas específicos de estudio con tal simplicidad que posibiliten su comprensión total.

2. Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Una ecuación es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas *incógnitas* y que sólo es verdadera para determinados valores de las incógnitas. Las incógnitas se acostumbran representar por las últimas letras del alfabeto: *x*, *y*, *z*.

Así: $x + 4 = 9$ es una ecuación que sólo es verdadera para $x = 5$. En efecto, si reemplazamos x por 5, obtenemos $9 = 9$.

Hay varias clases de ecuaciones: la *ecuación numérica,* que es aquella que no tiene más letras que la incógnita y la *ecuación literal*, o sea, aquella que además de la letra de las incógnitas tiene otras letras que representan cantidades conocidas.

$2x + 45 = x - 6$ es una ecuación numérica

$2x - b = 4x + c$ es una ecuación literal

El *grado* de una ecuación viene determinado por el mayor exponente de la incógnita en la ecuación. Así, la ecuación: $x + 6 = 24$, es una ecuación de primer grado, porque el mayor exponente de *x* es 1. La ecuación: $2x^2 - 4x + 12 = 0$, es una ecuación de segundo grado, porque el mayor exponente de *x* es 2.

Resolver una ecuación consiste en hallar el valor o los valores de las incógnitas que cumplan la igualdad.

2.1 Principios fundamentales de las ecuaciones

- Si a los dos miembros de una ecuación se suma, o resta, una misma cantidad, se conserva la igualdad.

$$\text{Si } a = b \Rightarrow a + 1 = b + 1 \qquad a = b \Rightarrow a - 1 = b - 1$$

- Si los dos miembros de una ecuación se multiplican, o dividen, por una misma cantidad, se conserva la igualdad.

$$\text{Si } a = b \Rightarrow a \times 6 = b \times 6 \qquad a = b \Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{b}{6}$$

- Si los dos miembros de una ecuación se elevan a una misma potencia, o se les extrae la misma raíz, se conserva la igualdad.

$$\text{Si } a = b \Rightarrow a^2 = b^2 \qquad a = b \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$$

Ejemplo 0.1

- Hallar el valor de x en la siguiente ecuación: $5x - 8 = 2x + 3$.

  Haciendo transposición de términos se agrupan los semejantes:

$$5x - 2x = 3 + 8 \Rightarrow 3x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{3}$$

- Desarrollar la siguiente ecuación: $\frac{x}{5} + \frac{3x}{4} - x = 6x - 40$.

Un primer procedimiento consiste en reducir todos los términos a un común denominador por medio del m.c.m. Para este ejercicio el m.c.m se puede hallar por simple inspección y es igual a 20.

La ecuación quedaría: $\frac{4x}{20} + \frac{15x}{20} - \frac{20x}{20} = \frac{20(6x-40)}{20} \Rightarrow \frac{-x}{20} = \frac{20(6x-40)}{20}$

Desarrollando la ecuación, se tiene: $-x = 20(6x - 40) \Rightarrow -x = 120x - 800$

Agrupando términos comunes, se tiene: $121x = 800 \Rightarrow x = \frac{800}{121} = 6.61$

El segundo procedimiento consiste en convertir cada quebrado en número decimal:

$$\frac{x}{5} = \frac{1}{5}x = 0.20x \qquad \frac{3x}{4} = \frac{3}{4}x = 0.75x$$

La ecuación queda: $0.20x + 0.75x - x = 6x - 40$.

Agrupando términos semejantes: $6x - 0.20x - 0.75x + x = 40 \qquad 6.05x = 40.$

$$x = \frac{40}{6.05} = 6.61$$

- Hallar el valor de x en la siguiente ecuación: $\frac{(2x+12)}{1.3456} - \frac{4x}{1.2326} = 5x$

En Matemáticas Financieras, por lo general, se trabaja con ecuaciones fraccionarias de primer grado en las que el denominador es un número decimal. En estos casos se recomienda convertir cada fracción en un número decimal y desarrollar la ecuación siguiendo el segundo procedimiento del ejemplo anterior.

Analicemos cada fracción en forma independiente:

El término $\frac{(2x+12)}{1.3456}$ lo podemos asimilar como el resultado de sumar dos quebrados de igual denominador, por lo tanto, se puede descomponer de la siguiente forma:

$$\frac{(2x+12)}{1.3456} = \frac{2x}{1.3456} + \frac{12}{1.3456}$$

La ecuación quedaría de la siguiente forma: $\frac{2x}{1.3456} + \frac{12}{1.3456} - \frac{4x}{1.2326} = 5x$

Convirtiendo los quebrados en números decimales, se tiene:

$$1.4863x + 8.9179 - 3.2452x = 5x$$

Agrupando términos semejantes, se tiene: $5x - 1.4863x + 3.2452x = 8.9179$

$$6.7589x = 8.9179 \Rightarrow x = \frac{8.9179}{6.7589} = 1.3194$$

Sustituyendo en la ecuación x por 1.3194, se comprueba la igualdad.

$$\frac{(2 \times 1.3194 + 12)}{1.3456} - \frac{4 \times 1.3194}{1.2326} = 5 \times 1.3194 \Rightarrow 10.8790 - 4.2817 = 6.5970$$

3. Potenciación

Una potencia es el resultado de multiplicar una cantidad por sí misma dos o más veces. Así, por ser $5 \times 5 = 25$, resulta que 25 es una potencia de 5; por ser $2 \times 2 \times 2 = 8$, el 8 es una potencia de 2. La potencia se designa indicando el número de veces que se usa el factor. En $5 \times 5 = 25$, como el 5 se usa dos veces como factor, se dice que 25 es la segunda potencia de 5. En el caso de $2 \times 2 \times 2 = 8$, el 8 es la tercera potencia de 2. También se dice que 5 está elevado a la segunda potencia, y en forma análoga, que 2 está elevado a la tercera potencia.

Para evitar escribir el producto de factores como: $5 \times 5 = 25$, $2 \times 2 \times 2 = 8$, la elevación a potencias se indica escribiendo el número que se desea elevar, llamado *base*, con un número más pequeño encima y a la derecha, llamado *exponente*, el cual indica el número de veces que se debe multiplicar la base por sí misma. Así, en $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$, el 2 es la base, el 3 es el exponente que indica el número de veces que se debe multiplicar el 2 por sí mismo y el 8 es la potencia. Los exponentes no se deben confundir con los factores. Así, 5^2 no significa $5 \times 2 = 10$, sino $5 \times 5 = 25$.

En la práctica se acostumbra designar la segunda potencia de un número como *cuadrado* y la tercera potencia como *cubo*, de tal forma que:

$a^2 =$ *a* elevado al cuadrado

$a^3 =$ a elevado al cubo

Para otras potencias no existen nombres análogos correspondientes.

3.1 Operaciones con potencias

- *Producto de potencias de igual base*

Para multiplicar potencias de igual base, se coloca la misma base y se suman los exponentes.

Ejemplo 0.2

$a^5 \times a^4 = a^{5+4} = a^9$ $\quad (1 + i) \times (1 + i)^2 = (1 + i)^{1+2} = (1 + i)^3$ $\quad 3^5 \times 3^2 = 3^7$

- *Producto de potencias de igual exponente y distinta base*

Para multiplicar potencias de igual exponente y distinta base, se coloca como base el producto de las bases y por exponente el mismo.

Ejemplo 0.3

$$3^2 \times 4^2 = (3 \times 4)^2 \qquad a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

- *Cociente de potencias de igual base*

Para dividir potencias de la misma base, se pone la misma base y se restan los exponentes.

Ejemplo 0.4

$$\frac{4^6}{4^3} = 4^{6-3} = 4^3 \qquad \frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2 \qquad \frac{(1+i)^3}{(1+i)^2} = (1+i)^{3-2} = (1+i)$$

De esta regla provienen el *exponente cero* y el *exponente negativo*

Exponente cero. Resulta de dividir dos potencias de igual base e igual exponente.

$$\frac{a^2}{a^2} = a^{2-2} = a^0 = 1 \qquad \frac{4}{4} = \frac{4^1}{4^1} = 4^{1-1} = 4^0 = 1$$

En efecto, a^2 entre a^2 es igual a 1, y en general, toda cantidad dividida por sí misma es igual a 1.

Exponente negativo. Resulta de dividir dos potencias de la misma base cuando el exponente del dividendo (numerador) es menor que el exponente del divisor (denominador).

$$\frac{a^2}{a^3} = a^{2-3} = a^{-1}$$

El resultado se interpreta de la siguiente forma: toda cantidad elevada a un exponente negativo es igual a un quebrado cuyo numerador es 1 y su denominador es la misma cantidad con el exponente positivo.

$$a^{-1} = \frac{a^2}{a^3} = \frac{a \times a}{a \times a \times a} = \frac{1}{a^1} \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- *Cociente de potencias del mismo exponente y diferentes bases*

Para dividir potencias del mismo exponente y diferentes bases, se coloca por base el cociente de las bases y por exponente el mismo.

Ejemplo 0.5

$$\frac{4^3}{5^3} = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \qquad \frac{a^6}{b^6} = \left(\frac{a}{b}\right)^6$$

- *Potencia de un fraccionario*

Para elevar un número fraccionario a una potencia, se eleva el numerador y el denominador a la potencia.

Ejemplo 0.6

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4^3}{5^3} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^6 = \frac{a^6}{b^6}$$

Nótese que es el caso contrario al anterior.

- *Potencia de una potencia*

Para elevar una potencia a otra potencia, se coloca por base la misma potencia y por exponente el producto de los exponentes.

Ejemplo 0.7

$(4^3)^2 = (4)^{3\times 2} = 4^6 \qquad (a^m)^n = (a)^{m\times n} = a^{mn} \qquad \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{9}}$

- *Cuadrado de la suma o diferencia de dos cantidades*

Elevar al cuadrado $(a + b)$ equivale a multiplicar esta suma por sí misma.

$$(a + b)^2 = (a + b)\,(a + b)$$

Desarrollando el producto, se tiene: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Análogamente: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Las dos operaciones se pueden agrupar en un enunciado único, diciendo: el cuadrado de una suma o diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera, más el cuadrado de la segunda, más o menos el doble de la primera cantidad por la segunda.

- *Diferencia de cuadrados*

Resulta de multiplicar la suma de dos cantidades por su diferencia.

Si desarrollamos $(a + b)\,(a - b)$, se obtiene: $a^2 - b^2$

3.2 Operaciones inversas de la potenciación

Así como la resta es la operación inversa de la suma y la división es la inversa de la multiplicación, la potenciación tiene dos operaciones inversas: *radicación y logaritmación*.

En la igualdad: $2^3 = 8$ figuran tres números: el 2, llamado *base*; el 3, llamado *exponente* y el 8 que es la *potencia*. Conocidos dos de estos tres números existe una operación que permite determinar el tercero. Los casos que se pueden presentar son los siguientes:

- *Conocida la base y el exponente, determinar la potencia*

Esta operación se llama *potenciación* y se considera una operación directa. La base y el exponente son los datos conocidos y la potencia es el resultado de la operación. Esta operación ya fue resuelta en los párrafos anteriores.

- *Conocida la potencia y el exponente, determinar la base.*

  Esta operación se llama *radicación*.

$$\text{Si se tiene: } 2^3 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{8} = 2$$

La potencia conocida, el 8, se llama *radicando*, el exponente conocido, el 3, se llama *índice*, la base desconocida se llama *raíz* y el símbolo $\sqrt{\ }$ se llama *radical*. Para el ejemplo, se dice que 2 es la raíz tercera de 8, o también, 2 es la raíz cúbica de 8. En la práctica se omite el índice cuando la raíz es cuadrada.

$$\sqrt[2]{4} = \sqrt{4}$$

- *Conocida la potencia y la base, determinar el exponente*

  Esta operación se llama *logaritmación*, pero bien podría llamarse *exponenciación*, porque la incógnita es el exponente.

La base y la potencia son los datos conocidos y se pide determinar el exponente. El exponente que hay que hallar se llama *logaritmo* de la potencia con base dada.

Para el ejemplo, la operación se indica así: $3 = \text{Log}_2 8$ (léase: tres igual al logaritmo de ocho en base 2).

La potenciación tiene dos operaciones inversas (radicación y logaritmación) en lugar de una, como ocurre para la suma y la multiplicación. Esto es así, debido a que en la potenciación la base y el exponente no siempre son conmutables, como si lo son los sumandos en la suma y los factores en la multiplicación.

Así, por ejemplo: en la suma: $a + b = b + a$

en la multiplicación: $a \times b = b \times a$

en la potenciación: $a^b \quad b^a$

En la potenciación hay casos en que el exponente se puede permutar por la base, pero esta condición no siempre se cumple. $2^4 = 4^2 = 16$, pero $3^2 = 9$ es diferente a $2^3 = 8$.

Radicación

La raíz de una cantidad es toda cantidad que elevada a una potencia nos da la primera cantidad.

Como $2^3 = 8$, el 2 es la raíz cúbica de 8, porque 2 elevado al cubo es igual a 8, por lo tanto, se puede plantear la siguiente notación:

$$2^3 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{8} = 2$$

En la expresión anterior, el 2 es la raíz, el 8 es el radicando (potencia) y el 3 es el grado o índice del radical.

Operaciones con radicales

- *Supresión del índice y el exponente*

  Cuando el exponente del radicando es igual al índice de la raíz, ambos se suprimen.

Ejemplo 0.8

$\sqrt[4]{8^4} = 8$, porque el índice y el exponente de la potencia son iguales y se anulan.

$\sqrt[3]{(1+i)^3} = (1+i)$, por la misma razón del ejemplo anterior.

- *Raíz de una potencia*

La raíz de una potencia es igual a la potencia elevada a un quebrado cuyo numerador es el exponente de la potencia y el denominador es el índice de la raíz.

Ejemplo 0.9

$$\sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}} \qquad = 5^{\frac{2}{4}} \qquad \sqrt{(1+i)^2} = (1+i)$$

El tercer ejemplo hace más explícito el caso de supresión de índice y exponente, expuesto en el caso anterior:

$$\sqrt{(1+i)^2} = (1+i)^{\frac{2}{2}} = (1+i)^1 = (1+i)$$

La regla de la raíz de una potencia da origen al exponente fraccionario, que proviene de extraer una raíz a una potencia cuando el exponente del radicando no es divisible por el índice de la raíz.

En el caso $\sqrt{(1+i)^2} = (1+i)$= (1 + *i*), el exponente del radicando, 2, es divisible por el índice de la raíz que es también 2. Pero cuando el exponente no es divisible por el índice, hay que dejar indicada la división y se origina el exponente fraccionario.

$$\sqrt{b} = b^{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt{(1+i)} = (1+i)^{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt[3]{(1+i)^2} = (1+i)^{\frac{2}{3}}$$

- *Raíz de otra raíz*

Para extraer una raíz a un radical, se multiplica el índice del radical por el índice de la raíz.

Si se tiene: $\sqrt{\sqrt{a}} = \left(\left(a^{\frac{1}{2}}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}}$, que es la aplicación, también, de la potencia de una potencia.

Ejemplo 0.10

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{(1+i)}} = (1+i)^{\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}} = (1+i)^{\frac{1}{12}} \qquad \sqrt{\sqrt[3]{(1+i)^4}} = (1+i)^{\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}} = (1+i)^{\frac{4}{6}} = (1+i)^{\frac{2}{3}}$$

- *Raíz de un quebrado*

  La raíz de un quebrado se obtiene hallándole la raíz a sus dos términos.

Ejemplo 0.11

$$\sqrt{\frac{4}{15}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{15}} = \frac{2}{\sqrt{15}} \qquad \sqrt[3]{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{5^{\frac{1}{3}}}{8^{\frac{1}{3}}}$$

4. Logaritmos

Los logaritmos, una de las contribuciones más geniales a las matemáticas, fueron inventados por el escocés John Napier o Neper, Barón de Merchiston, en el año 1614, aproximadamente. Por medio de los logaritmos pueden abreviarse y simplificarse muchísimo un gran número de los cálculos aritméticos ordinarios, sobre todo cuando los números de que se trata son números enteros o fraccionarios que constan de muchas cifras. En los primeros tiempos de las matemáticas todos esos cálculos se hacían aplicando los métodos ordinarios y exigían enormes cantidades de tiempo y trabajo. Así, las operaciones de multiplicación, división, extracción de raíces y la elevación a potencias se convierten en simples sumas y restas, multiplicaciones y divisiones de logaritmos. Por esta razón, los logaritmos tuvieron un éxito inmediato. Actualmente, con la aparición de las calculadoras electrónicas, los logaritmos como instrumentos de cálculo han perdido importancia; pero, aún así, tienen amplia aplicación en economía, astronomía, finanzas, etc.

El *logaritmo* es el exponente al que hay que elevar una cantidad positiva, llamada *base*, para obtener un número determinado, llamado *potencia*. El vocablo logaritmo, proviene del griego *logos*, que significa calcular, y *arithmos* que quiere decir número. Por lo tanto, *logaritmo* significa número para calcular.

Si se tiene: $3^0 = 1$, el logaritmo de 1 es 0, porque 0 es el exponente al que hay que elevar la base 3 para obtener 1, y se denota así: Log de 1 en base 3 es igual a 0.

$$3^0 = 1 \Rightarrow \text{Log}_3\, 1 = 0 \qquad 3^2 = 9 \Rightarrow \text{Log}_3\, 9 = 2$$

$$3^1 = 3 \Rightarrow \text{Log}_3\, 3 = 1 \qquad 3^3 = 27 \Rightarrow \text{Log}_3\, 27 = 3, \text{ etc.}$$

4.1 Propiedades de los logaritmos

- *La base de un sistema de logaritmos no puede ser negativa. Por la regla de los signos, si la base es negativa, sus potencias pares son positivas y las impares negativas, y en consecuencia, algunos números positivos no tendrían logaritmos.*

  $-2^4 = 16 \Rightarrow \text{Log}_{-2}\, 16 = 4$

  $-2^3 = -8 \Rightarrow \text{Log}_{-2}\, -8 = 3$, luego el Log de 8 en base -2 no existe, porque no hay un número a que se eleve -2 que dé como resultado 8.

- *Los números negativos no tienen logaritmos. Al ser la base positiva para cualquier sistema de logaritmos, todas sus potencias, pares e impares, son positivas. Las calculadoras electrónicas ya vienen programadas y marcan error cuando se solicita el cálculo del logaritmo de un número negativo.*
- *En todo sistema de logaritmos, el logaritmo de la base es 1. Para que la potencia sea igual a la base, se requiere que el exponente de la base sea igual a 1.*

$$\text{Si se tiene: } 4^1 = 4 \Rightarrow \text{Log}_4\, 4 = 1$$

- *En cualquier sistema de logaritmos, el logaritmo de 1 es igual a cero.* Se mencionó en una de las operaciones de los quebrados, desarrollada en párrafos anteriores, que el exponente cero proviene de dividir dos quebrados con la misma base y el mismo exponente, en consecuencia, todo número dividido por sí mismo es igual a 1. Cualquier base elevada al exponente cero siempre será igual a 1, porque resulta de dividirla por sí misma.

$$3^0 = 1 \Rightarrow \text{Log}_3\, 1 = 0 \qquad\qquad 5^0 = 1 \Rightarrow \text{Log}_5\, 1 = 0$$

- *Los números mayores que 1 tienen logaritmo positivo y los menores que 1, tienen logaritmo negativo.*

Si Log 1 = 0 Log de un número menor que 1 será negativo, y log de un número mayor que 1 será positivo.

4.2 Operaciones con logaritmos

- *Logaritmo de un producto*

El logaritmo del producto de dos números positivos es igual a la suma de los logaritmos de dichos números.

$$\text{Log}\,(A \times B) = \text{Log}\,A + \text{Log}\,B$$

- *Logaritmo de un cociente*

El logaritmo de un cociente de dos números positivos es igual al logaritmo del dividendo (numerador) menos el logaritmo del divisor (denominador).

$$\text{Log}\left(\frac{A}{B}\right) = \text{Log}\,A - \text{Log}\,B$$

- *Logaritmo de una potencia*

El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base.

$$\text{Log}\,A^n = n\,\text{Log}\,A$$

- *Logaritmo de una raíz*

El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido entre el índice de la raíz.

$$\text{Log} = \sqrt[n]{A} = \frac{\text{Log}\,A}{n}$$

4.3 Sistemas de logaritmos

En teoría, pueden existir infinitos sistemas de logaritmos, debido a que cualquier número positivo, excepto el 1, puede ser tomado como base. Sin embargo, son dos los sistemas que se utilizan generalmente: el sistema de *logaritmos vulgares o decimales*, cuya base es 10 y el sistema de *logaritmos naturales o neperianos*, cuya base es el número de Euler ($e = 2.718281...$). Cuando Neper inventó los logaritmos la base que uso no fue el 10, sino que originalmente utilizó el número irracional $e = 2.718281....$, y en su honor se da el nombre de *logaritmos neperianos* a los logaritmos naturales. Hacia el año 1617 fue adoptado como base el número 10 por Briggs, profesor de matemáticas en la universidad de Oxford, Inglaterra, el cual era amigo de Neper; por esta razón se le da, también, el nombre de logaritmos de Briggs a los logaritmos decimales o vulgares.

El número 1 no puede ser tomado como base de un sistema de logaritmos porque su logaritmo tendría infinitos valores.

$$1^{20} = 1 \text{ luego Log 1 en base } 1 = 20$$

$$1^{50} = 1 \text{ luego Log 1 en base } 1 = 50$$

Lo que indica que el logaritmo de 1 con base 1 será cualquier valor a que se eleve 1.

Logaritmos decimales o vulgares. (Logaritmos de Briggs)

Según hemos visto, cualquier número positivo, distinto de 1, puede usarse como base de logaritmos. No obstante, si la base es pequeña el logaritmo de un número determinado puede ser muy grande. Por ejemplo, $\text{Log}_2\ 1.073.741.824 = 30$ y para números mayores el logaritmo es mucho mayor. Si se utiliza como base un número mayor, el logaritmo de cualquier número determinado será más pequeño. Así, si se toma como base 10, $\text{Log}_{10}\ 1.000.000 = 6$, porque $10^6 = 1.000.000$. En la matemática elemental se utiliza siempre como base el número 10 y los logaritmos con base 10 se llaman logaritmos *vulgares o decimales*.

Cuando se usa el 10 como base no es necesario indicarlo al escribir los logaritmos, sobreentendiéndose que 10 es la base común. Así, en lugar de $\text{Log}_{10}\ 1.000 = 3$, basta escribir $\text{Log}\ 1.000 = 3$, y así análogamente para el logaritmo vulgar de cualquier número.

Partiendo de la definición de los logaritmos como exponentes, es fácil construir la tabla siguiente de logaritmos vulgares, en la que se observa que los únicos números cuyos logaritmos son números enteros son las potencias enteras de 10.

$10^0 = 1$	por tanto	Log 1	$= 0$
$10^1 = 10$	por tanto	Log 10	$= 1$
$10^2 = 100$	por tanto	Log 100	$= 2$
$10^3 = 1.000$	por tanto	Log 1.000	$= 3$
$10^4 = 10.000$	por tanto	Log 10.000	$= 4$
$10^5 = 100.000$	por tanto	Log 100.000	$= 5$
etc	etc		

$10^0 = 1$	por tanto	Log 1	$= 0$
$10^{-1} = 1/10 = 0.1$	por tanto	Log 0.1	$= -1$
$10^{-2} = 1/100 = 0.01$	por tanto	Log 0.01	$= -2$
$10^{-3} = 1/1.000 = 0.001$	por tanto	Log 0.001	$= -3$

Se observa en la tabla que los números mayores que 1 tienen logaritmos positivos, mientras que los números que se encuentran entre 0 y 1, tienen logaritmos negativos. Los números comprendidos entre 1 y 10, entre 10 y 100, entre 100 y 1.000, entre 1.000 y 10.000, etc, o entre 0.1 y 0.01, entre 0.01 y 0.001, etc, no tendrán logaritmos enteros, ya que estos números no son potencias exactas de 10, positivas o negativas. Así, puesto que Log 100 = 2 y Log de 1.000 = 3, los logaritmos de números comprendidos entre 100 y 1.000 estarán comprendidos entre 2 y 3, y cada uno de ellos será igual a 2 más una fracción. Por otro lado, puesto que Log 0.01 = −2 y Log 0.001 = −3, los logaritmos de fracciones decimales comprendidas entre 0.01 y 0.001 estarán comprendidos entre −2 y −3. La parte entera de un logaritmo de esta clase se denomina la *característica* y la parte decimal se llama *mantisa*. Por ejemplo, el número 1.645 está comprendido entre 1.000 y 10.000 y, por lo tanto, su logaritmo se encuentra entre 3 y 4; al calcularlo se encuentra que su valor es de 3.2126. El 3 es la característica y 0.2126 es la mantisa. Más adelante, se estudiará la forma de calcular logaritmos con la calculadora electrónica.

La característica de un logaritmo se puede determinar por simple observación y puede ser cero si el número está comprendido entre 1 y 10, negativa si el número es menor que 1, o positiva si el número es mayor que 10. La mantisa siempre es positiva y es la parte del logaritmo que se obtiene mediante las tablas de logaritmos. Al utilizar una calculadora no se hace necesario calcular por separado la característica y la mantisa, ya que ella proporciona ambas al efectuar el cálculo de un logaritmo.

Logaritmos naturales o neperianos

Este sistema utiliza como base el número irracional e conocido como número de Euler, en honor al matemático suizo Leonardo Euler, y cuyo valor aproximado es 2.718281...

El logaritmo natural se representa utilizando la siguiente notación: $\text{Log}_e N$ que se lee logaritmo de *N* en base e, o también logaritmo natural o neperiano de *N*. Se acostumbra escribir Ln en lugar de $\text{Log}_e N$.

Las propiedades y operaciones de los logaritmos vulgares son también aplicables a los logaritmos naturales, puesto que lo único que los diferencia es la base; los logaritmos vulgares son los que usan la base 10, y los logaritmos naturales usan como base el número *e*.

Antilogaritmos

En el uso de los logaritmos se presentan situaciones como la siguiente: si el logaritmo de un número es 1.3979, ¿cuál es el número? Es evidente que para hallar el número es necesario invertir el procedimiento expuesto en los artículos anteriores. Si el logaritmo es el exponente que hay que calcular conocida la base y la potencia, el antilogaritmo será la potencia conocida, la base y el exponente. Se define, entonces, el *antilogaritmo* como el número que corresponde a un logaritmo dado.

Así, por ejemplo: $10^2 = 100$ Log 100 = 2, luego 100 es el antilogaritmo de 2.

Dependiendo del sistema de logaritmos que se use, existirán antilogaritmos decimales o vulgares y antilogaritmos naturales o neperianos.

El único propósito de estudiar los logaritmos es abreviar y simplificar los cálculos numéricos. Los logaritmos no pueden usarse en la suma y la resta, pero son muy útiles en la multiplicación, división, la extracción de raíces y la elevación a potencias.

5. Ecuaciones exponenciales

Son ecuaciones en las que la incógnita es el exponente de una cantidad. Para resolverlas se aplican logaritmos a ambos miembros de la igualdad y se despeja la incógnita.

Ejemplo 0.12

Calcular el valor de *x*, en la siguiente ecuación: $3^{(x+1)} = 24$

Aplicando logaritmos a ambos miembros de la igualdad, ésta subsiste.

Log $3^{(x+1)}$ = $(x + 1)$ Log 3, que es el logaritmo de una potencia.

Log 24 = Log 24

$$(x + 1) \text{ Log } 3 = \text{Log } 24$$

Haciendo transposición de factores: $x = \dfrac{\text{Log } 24}{\text{Log } 3} - 1 \qquad x = \dfrac{1.3802}{0.4771} - 1 = 1.8929$

Al aplicar logaritmos a ambos miembros de una igualdad, éstos pueden ser de cualquier base.

Para esta ecuación, aplicando ahora, logaritmos naturales, se tiene:

$$x = \frac{\text{Ln } 24}{\text{Ln } 3} - 1 \qquad x = \frac{3.1781}{1.0986} - 1 = 1.8929$$

- El número de meses (*n*) que es necesario esperar para que una inversión de $1.500.000 se convierta en $ 2.412.655.87, viene dado por la siguiente ecuación:

$$2.412.655.87 = 1.500.000\ (1.02)^n$$

Calcular el valor de *n*.

Haciendo transposición de factores, se tiene:

$$\frac{2.412.655.87}{1.500.000} = \left(1.02\right)^n \Rightarrow 1.6084 = \left(1.02\right)^n$$

Aplicando logaritmos vulgares, aunque pueden ser logaritmos naturales, se tiene:

$$\text{Log } 1.6084 = n \text{ Log } 1.02$$

Despejando *n*, se tiene: $n = \dfrac{\text{Log } 1.6084}{\text{Log } 1.02} = \dfrac{0.2064}{0.0086} = 24$ meses

CAPÍTULO 1

Conceptos fundamentales

El tiempo es dinero

Bulwer Lytton

0. Introducción

El propósito de este capítulo es el estudio y análisis de los conceptos sobre los cuales se apoyan las Matemáticas Financieras. Su comprensión es de trascendental importancia para el dominio de la materia. Es una costumbre entre los estudiantes de matemáticas, ante la formulación de cualquier ejercicio, aplicar en forma mecánica las fórmulas diseñadas para su solución sin antes realizar un análisis de la información dada. Los problemas que se estudian en este texto tienen una secuencia lógica y una aplicación práctica inmediata; son adaptaciones de la teoría a la realidad con soluciones factibles. Por lo tanto, cuando se plantee un problema, la información suministrada se debe analizar a la luz de los principios que rigen las Matemáticas Financieras.

Los conceptos fundamentales son en su orden:

- Valor del dinero en el tiempo.
- Interés.
- Equivalencia.

TEMA DE INTERÉS

INFLACIÓN

En una economía de mercado, es decir, en la cual los precios se establecen en el libre juego de la oferta y la demanda de bienes y servicios, éstos no tienen una variación estable. Por el contrario, tienden a desbordarse, especialmente en las economías subdesarrolladas, en las cuales hay dificultades para el abastecimiento de productos o bajos niveles de eficiencia en la producción.

Surge, entonces, el fenómeno de la inflación, que consiste en un aumento constante y persistente, a través del tiempo, del nivel general de precios, el cual produce una disminución del poder adquisitivo del dinero.

La inflación es considerada como una plaga que devora el poder de compra del dinero. Este fenómeno tiene distintos orígenes:

INFLACIÓN DE DEMANDA

Ocurre cuando la capacidad monetaria de la población y del gobierno resulta excesiva frente a una oferta insuficiente de productos y servicios en la economía. Una creciente demanda de alimentos, vestuario, vivienda, salud, educación, transporte o servicios públicos, que no es atendida por el sector productivo induce a un incremento de los precios porque como hay menos productos y más dinero éstos pueden venderse más caros.

INFLACIÓN DE COSTOS

Se origina por el lado de la oferta de productos y servicios, los cuales suben de precio en razón de un encarecimiento de las materias primas y de la mano de obra que se utiliza.

EXPANSIÓN MONETARIA

En los países de América Latina, incluido Colombia, uno de los factores que más ha influido en el proceso inflacionario y, en consecuencia, en el empobrecimiento de la población, es el déficit fiscal: para cubrir la diferencia entre bajos ingresos y altos gastos en el sector público, los gobiernos acuden a la emisión de dinero, la cual eleva la demanda de productos y servicios que el aparato productivo no alcanza a atender. En Colombia se presenta la inflación estructural, término que significa que los precios se indexan o reajustan periódicamente con base en la inflación ocurrida.

FUENTE: Economía y Política, Editorial Norma

1. Valor del dinero en el tiempo

Para entender este concepto, considerado el más importante en las Matemáticas Financieras, podemos hacernos la siguiente pregunta: ¿Es lo mismo recibir $ 1.000.000 dentro de un año que recibirlos hoy? Lógicamente que no, por las siguientes razones:

- *La inflación*. Este fenómeno económico hace que el dinero día a día pierda poder adquisitivo, es decir, que el dinero se desvalorice. Dentro de un año se recibirá el

mismo $ 1.000.000 pero con un menor poder de compra de bienes y servicios. Analizado desde un punto de vista más sencillo, con el $ 1.000.000 que se recibirá dentro de un año se comprará una cantidad menor de bienes y servicios que la que podemos comprar hoy, porque la inflación le ha quitado una buena parte de su poder de compra.

- Se pierde la oportunidad de invertir el $ 1.000.000 en alguna actividad, logrando que no sólo se proteja de la inflación sino que también produzca una utilidad adicional. Este concepto es fundamental en finanzas y se conoce como *costo de oportunidad*.

El costo de oportunidad es aquello que sacrificamos cuando tomamos una decisión. Cualquier persona, por ejemplo, puede optar por descansar en lugar de trabajar. No se tiene que pagar por ello, pero en realidad si tiene un costo, que llamamos *costo de oportunidad*. Descansar significa emplear un tiempo que podría utilizarse en hacer otra cosa. El costo verdadero de este descanso será el valor que represente para esta persona las otras cosas que podría haber producido durante el tiempo que estuvo descansando. Por eso, cuando se toman decisiones cotidianas, es necesario pensar en los costos de oportunidad. ¿Debería ir al cine? En primer lugar, cuesta $5.000 la entrada y con este dinero se pueden comprar otras cosas. En segundo lugar, cuesta dos o tres horas que las puedo emplear en otra actividad productiva. La decisión de entrar al cine, además del precio de la entrada tiene, entonces, un costo de oportunidad. Existe, también, un costo de oportunidad asociado al costo del dinero. *Vélez (1999)*, lo define como el costo de la mejor alternativa que se desecha. Como todo recurso apreciable, el dinero tiene un costo de oportunidad. Este es el máximo interés que puede obtener una persona dentro del mercado en que se desenvuelve. Si una persona tiene su dinero depositado en una cuenta de ahorros que le paga el 1% mensual y le proponen un negocio; cuando decide retirarlo para invertirlo en el negocio que le han propuesto, está incurriendo en un costo de oportunidad al desprenderse del rendimiento que está obteniendo, con la esperanza de recibir unos mayores beneficios en el futuro, o por lo menos iguales, a los que ya recibía. Se dice, entonces, que el costo de oportunidad para esa persona es del 1% mensual.

- Se asume el *riesgo* que quien deba entregar el $ 1.000.000 hoy, ya no esté en condiciones de hacerlo dentro de un año. En todas las actividades económicas en las que el hombre realiza inversiones está implícito el riesgo y aunque se ha comprobado sociológicamente que las personas tienden a pensar que deben asumir riesgos, porque de lo contrario se sentirían cobardes ante la vida, es necesario pensar en él y entender que tiene su costo. El riesgo de pérdida influye notoriamente en el costo del dinero.
- El dinero es un *bien económico* que tiene la capacidad intrínseca de generar más dinero. Este hecho lo puede constatar cualquier persona, por ejemplo, cuando deposita algún dinero en una cuenta de ahorros de una entidad financiera y después de algún tiempo al ir a retirarlo se encuentra con que sus ahorros han crecido, en forma mágica, al recibir una cantidad de dinero mayor.

Por ese poder mágico de crecer que el tiempo le proporciona al dinero, debemos pensar permanentemente que *el tiempo es dinero*.

Ahora, si la opción que se tiene es recibir el $ 1.000.000 dentro de un año, se aceptaría solamente si se entregara una cantidad adicional que compense las razones anteriores.

Este cambio en la cantidad de dinero en un tiempo determinado es lo que se llama *valor del dinero en el tiempo* y se manifiesta a través del interés.

Como conclusión y por las implicaciones económicas que éste representa, el financiero debe tener presente el momento en que suceden los hechos económicos ya que una misma unidad monetaria colocada en diferentes fechas, desde el punto de vista financiero, es un valor diferente. Así, cuando decimos que hoy cancelamos $ 500.000 y dentro de 3 meses cancelamos otros $ 500.000, no podemos decir que hemos cancelado $ 1.000.000. Con frecuencia se observa el error de cálculo en los montos de dinero que se pagan, por ejemplo, en un crédito comercial cuando personas desprevenidas y sin ninguna formación financiera afirman que al cancelar 12 cuotas mensuales de $ 100.000 cada una, por el electrodoméstico que adquirieron a crédito, están pagando $ 1.200.000, que es la suma aritmética de las 12 cuotas. Al hacer esta consideración se viola el principio del valor del dinero en el tiempo, ya que no se pueden sumar valores ubicados en diferentes fechas.

Una cantidad de dinero en el presente vale más que la misma cantidad en el futuro.

2. INTERÉS

Al analizar el concepto del valor del dinero en el tiempo se llega a la conclusión de que el uso del dinero, por las razones expuestas, no puede ser gratuito. Si aceptamos la opción de recibir $ 1.000.000 dentro de un año a no recibirlos en el día de hoy, estamos aceptando que se use nuestro dinero y, por tal razón, se debe reconocer una cantidad adicional que llamamos *valor del dinero en el tiempo*. La medida de ese incremento del dinero en un tiempo determinado se llama *interés.* Es decir, que el interés es la medida o manifestación del valor del dinero en el tiempo. Así como no puede ser gratuito el uso de una máquina, de una casa tomada en arriendo, o de un vehículo utilizado por un corto período de tiempo, tampoco puede ser gratuito el uso del dinero. De serlo, estaríamos aceptando que el dinero no tiene ningún valor para su dueño. En conclusión, el interés es simplemente un arriendo pagado por un dinero tomado en préstamo durante un tiempo determinado.

Si se presta hoy una cantidad de dinero (P) y después de un tiempo determinado se recibe una cantidad mayor (F), la variación del valor del dinero de P a F se llama *valor del dinero en el tiempo,* y la diferencia entre F y P es el interés (I). La operación se representa mediante la siguiente expresión:

$$I = F - P \tag{1.1}$$

Para algunos autores, las expresiones: interés, utilidad, variación del dinero en el tiempo, rentabilidad, valor en el tiempo del dinero, valor del dinero en el tiempo, son comunes. En este texto, de aquí en adelante, llamaremos a la diferencia entre el valor futuro y el valor presente, simplemente *interés,* entendido como la medida del valor del dinero en el tiempo.

Ejemplo 1.1

Si se depositan en una cuenta de ahorros $ 500.000 y después de 6 meses se tiene un saldo de $ 580.000, calcular el valor de los intereses.

$$I = F - P \tag{1.1}$$

$$I = \$\ 580.000 - \$\ 500.000$$

$$I = \$\ 80.000$$

El dinero depositado sufrió una variación al cabo de 6 meses de $ 80.000. La variación en el valor del dinero después de 6 meses se llama valor del dinero en el tiempo y su medida, o sea, los $ 80.000 son los intereses.

2.1 Tasa de interés

No es común, cuando se realiza una operación financiera, expresar el valor de los intereses recibidos en cifras monetarias. Por ejemplo, no son comunes expresiones como: le presté a un amigo $100.000 durante 1 mes y me gané $ 5.000 de intereses, sino que se utiliza un indicador expresado como porcentaje que mide el valor de los intereses, llamado *tasa de interés*. La palabra *tasa* se deriva del verbo tasar que significa medir. Como expresión matemática la tasa de interés (i) es la relación entre lo que se recibe de intereses (I) y la cantidad prestada o invertida (P).

$$i = \frac{I}{P} \tag{1.2}$$

La tasa de interés se expresa en forma de porcentaje para un período de tiempo determinado. Al desarrollar la ecuación (1.2), el resultado será un número decimal que se multiplica por 100 para llevarlo a porcentaje. En forma inversa, cuando la tasa de interés, expresada como porcentaje, se utiliza en cualquier ecuación matemática se hace necesario convertirla en número decimal. Así por ejemplo, una tasa de interés del 3% mensual, al emplearla en cualquier ecuación, debemos expresarla como 0.03, que resulta de dividir 3 sobre 100.

Ejemplo 1.2

Se deposita en una entidad financiera la suma de $ 1.000.000 y al cabo de 1 mes se retira $ 1.030.000. Calcular el valor de los intereses y la tasa de interés ganada.

$$P = \$\ 1.000.000$$

$$F = \$\ 1.030.000$$

La diferencia entre el valor futuro (F) y el valor presente (P) es el valor de los intereses (I):

$$I = F - P \tag{1.1}$$

$$I = \$\ 1.030.000 - \$\ 1.000.000$$

$$I = \$\ 30.000$$

La tasa de interés (i) es igual a la relación entre los intereses (I) y el valor depositado (P).

$$i = \frac{I}{P} = \frac{30.000}{1.000.000} = 0.03$$

La tasa de interés obtenida está expresada como decimal, por lo tanto, tenemos que convertirla en porcentaje multiplicando el resultado por 100. La tasa de interés es igual al 3% mensual.

La tasa de interés, expresada como porcentaje, debe estar siempre acompañada del período de liquidación de los intereses, ya que por sí sola no indica nada. Son comunes las expresiones: presté mi dinero al 4% mensual, indicando que recibo $ 4 mensuales por cada $ 100 prestados. Recibo sobre mi dinero un rendimiento del 20% anual, para indicar que me están pagando $ 20 anuales por cada $ 100 invertidos.

De la ecuación de la tasa de interés (1.2), despejamos el valor de (I), quedando la siguiente expresión matemática que calcula para un período el valor de los intereses cuando se conoce el valor prestado o invertido (P) y la tasa de interés (*i*):

$$I = P \times i \tag{1.3}$$

Ejemplo 1.3

¿Cuál será el valor de los intereses devengados trimestralmente, si deposito durante 3 meses $ 2.500.000 en una entidad que me reconoce el 8% trimestral?

$$I = P \times i$$

$$I = \$\ 2.500.000 \times 0.08$$

$$I = \$\ 200.000$$

Se observa que al aplicar la fórmula, la tasa de interés se expresa como factor o decimal.

3. Equivalencia

Dos cantidades diferentes ubicadas en diferentes fechas son equivalentes, aunque no iguales, si producen el mismo resultado económico. Esto es, $ 100 de hoy son equivalentes a $ 140 dentro de un año si la tasa de interés es del 40% anual. Un valor presente (P) es equivalente a un valor futuro (F) si el valor futuro cubre el valor presente más los intereses a la tasa exigida por el inversionista.

Como conclusión de este principio, podemos decir que si para un inversionista es indiferente en términos económicos recibir hoy $ 100 que $ 140 dentro de un año, estos dos valores son equivalentes financieramente para él. La equivalencia implica que el valor del dinero depende del momento en que se considere, esto es, que un peso hoy, es diferente a un peso dentro de un mes o dentro de un año.

El concepto de equivalencia es relativo dado que las expectativas de rendimiento del dinero de cada persona es diferente. Para el señor Pérez $ 100 de hoy pueden ser equivalentes a $ 140 dentro de un año, pero para el señor García pueden no ser, dado que sus expectativas de rendimiento pueden ser diferentes.

Todas las personas y empresas que en algún momento están dispuestas a entregar su dinero en préstamo, manejan el criterio de equivalencia. Cuando un ahorrador presta su dinero a una entidad financiera a través de una cuenta de ahorros o un CDT, a una determinada tasa de interés, está aplicando el criterio de equivalencia porque está aceptando entregar una cantidad (P) para recibir después de un tiempo una cantidad acumulada (F); para este ahorrador (P) y (F) son valores equivalentes. Igualmente, una entidad financiera cuando decide prestar su dinero a algún cliente aplica el criterio de equivalencia.

Después de analizados los conceptos fundamentales sobre los cuales se apoyan las Matemáticas Financieras podemos concluir que el dinero está sometido a un doble proceso, cada uno con efectos diferentes: uno de *valorización* producido por la aplicación de una tasa de interés, que se traduce en un aumento del valor inicial del dinero por la adición de los intereses, y otro de *pérdida de poder adquisitivo* o pérdida de poder de compra de bienes y servicios producido por efectos de la inflación (*Arboleda, 1980*). La tasa de interés cobrada por el uso del dinero tiene, entonces, que ser mayor que la tasa de inflación si se desea que el dinero crezca en términos reales, o genere más dinero. Así, por ejemplo, si se prestan $ 100 durante un año a una tasa de interés del 10% anual y la tasa de inflación de ese año es, también, del 10%, al final del año se recibirán $ 110 (capital más intereses) que tendrán el mismo poder adquisitivo de los $ 100 prestados; en este caso el dinero no ha crecido en términos reales, porque con el dinero recibido al final del año se compra la misma cantidad de bienes y servicios que se compraba en el momento del préstamo. Se reciben más pesos de bolsillo pero los mismos pesos prestados en términos de poder de compra. La valorización real o crecimiento real del dinero se mide por medio de la *tasa real*. Se infiere que cuando se cargan unos intereses se produce una *valorización nominal* del dinero, pero no siempre hay *valorización real*, es decir, se pueden recibir intereses y al mismo tiempo perder dinero en términos reales. En el capítulo 4 de este texto analizaremos en detalle este concepto, y al retomar este ejemplo se llegará a la conclusión de que cuando la tasa de interés es igual a la inflación, la tasa real es neutra y, por lo tanto, ni se gana ni se pierde dinero; simplemente el valor de los intereses ganados compensa la pérdida del poder adquisitivo del valor del préstamo.

4. Resumen de los conceptos fundamentales

- Por el solo hecho que transcurra el tiempo el dinero cambia de valor, medido a través de su poder adquisitivo.
- Valores ubicados en diferentes fechas no se pueden sumar
- La variación del dinero en un tiempo determinado se llama valor del dinero en el tiempo.
- El valor del dinero en el tiempo se mide por medio de los intereses.
- La tasa de interés mide el valor de los intereses.
- Valores diferentes ubicados en diferentes fechas son equivalentes si producen el mismo efecto económico.
- El concepto de equivalencia es relativo ya que depende de las expectativas de rendimiento de cada inversionista.

5. Símbolos y su significado

En las Matemáticas Financieras existe anarquía en lo que se refiere al uso de símbolos para expresar las relaciones matemáticas. Diferentes autores manejan diferentes símbolos. En este texto se utilizarán los símbolos que a continuación se detallan, y fueron elegidos de tal manera que cada uno de ellos sea la letra inicial de la palabra clave, asociada con el significado más común del símbolo.

P = representa una suma *presente* de dinero.

F = representa una suma *futura* de dinero después de *n* períodos.

A = representa una suma de dinero periódica e igual correspondiente a la cuota de una *anualidad*.

I = representa el valor de los *intereses*.

i = representa una tasa de *interés* por período de interés.

n = representa el *número* de períodos de interés.

G = variación de una cuota con respecto a la anterior. Proviene de la palabra *gradiente*.

Los problemas de Matemáticas Financieras deben incluir por lo menos 4 de los símbolos anotados arriba y para su solución se deben conocer por lo menos tres de ellos.

Ejemplo 1.4

Se recibe un préstamo de $ 30.000.000 a una tasa de interés del 4% mensual. Se desea calcular el valor a pagar dentro de 6 meses. Hacer una lista de los valores de los símbolos.

P = $ 30.000.000 F = ?

n = 6 meses *i* = 4% mensual

Ejemplo 1.5

¿De cuánto debe ser el valor de cada depósito mensual que debe hacer en una cuenta de ahorros que le reconoce una tasa de interés del 3% mensual, para tener acumulado al final del año una suma de $ 5.000.000? Haga una lista de los valores de los símbolos.

A = ? *n* = 12

i = 3% mensual F = $ 5.000.000

Ejemplo 1.6

Si se depositan en el día de hoy $ 500.000 y después de año y medio se tienen acumulados $ 850.000. Elabore una lista de los valores de los símbolos.

P = $ 500.000 F = $ 850.000

n = 18 meses *i* = ?

6. Flujo de caja

Todas las operaciones financieras se caracterizan por tener ingresos y egresos. Estos valores se pueden registrar sobre una recta que mida el tiempo de duración de la operación financiera. Al registro gráfico de entradas y salidas de dinero durante el tiempo que dura la operación financiera se conoce como *flujo de caja o diagrama de líneas de tiempo*. Por sentido común se ha adoptado señalar los ingresos con una flecha hacia arriba y los egresos con una flecha hacia abajo.

Para resolver los problemas de matemáticas financieras, el primer paso y quizás el más importante es la construcción correcta del flujo de caja, porque además de mostrar claramente el problema nos indica las fórmulas que se deben aplicar para su solución.

Ejemplo 1.7

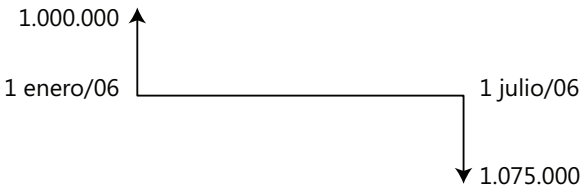
El señor Picapiedra deposita en una entidad financiera el 1º de enero de 2006 la suma de $ 1.000.000 y después de 6 meses retira una cantidad de $ 1.075.000. Construir el flujo de caja.

El problema puede ser analizado desde 2 puntos de vista: el flujo de caja para el prestamista (Sr. Picapiedra) y para el prestatario (entidad financiera).

1. Punto de vista del prestamista.

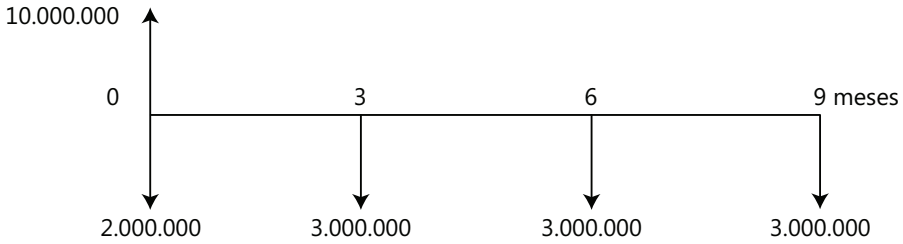
- El momento en que el señor Picapiedra deposita el dinero se denomina el presente o momento cero.
- El valor del depósito inicial se conoce como valor presente o simplemente (P).
- El segmento de recta representa el tiempo de la operación financiera (*n*). En este caso, la operación financiera tiene una duración de seis meses.
- El valor del dinero retirado después de los 6 meses se denomina valor futuro o simplemente (F).

2. Punto de vista del prestatario.

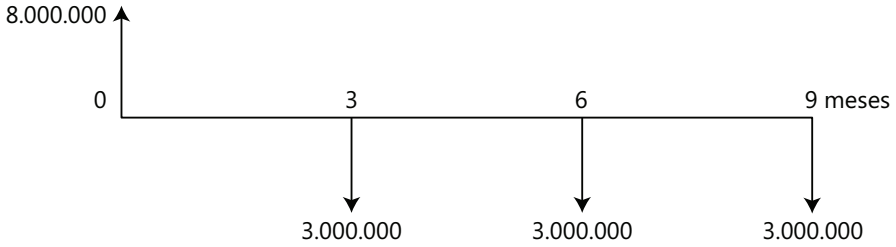


Ejemplo 1.8

El señor Pedro Picapiedra compra una casa por $ 10.000.000 y se compromete a pagarla de la siguiente manera: una cuota inicial de $ 2.000.000 y el saldo en 3 cuotas iguales en los meses 3, 6 y 9 por valor de $ 3.000.000 cada una. Construir el flujo de caja para el señor Picapiedra.



También se puede construir el flujo neto de caja. Se observa que en el momento cero existen dos valores diferentes ubicados en la misma fecha que son comparables a la luz del principio del valor del dinero en el tiempo. Si el señor Picapiedra recibe un préstamo (representado en el valor de la casa) y el mismo día paga una cuota inicial, se puede plantear el flujo de caja neto de la siguiente forma:



TEMA DE INTERÉS

EL CRÉDITO

Ante la necesidad de recursos (dinero) por parte de las personas, las familias, las organizaciones, empresas y los gobiernos de los países para poder llevar a cabo sus actividades y proyectos, las entidades financieras han desarrollado diferentes tipos de herramientas que permiten la obtención de dichos recursos. La herramienta más común es el *Crédito*.

Cuando se habla de crédito, se pueden identificar dos partes: la primera es la que se refiere a quien recibe el préstamo (Prestatario), que generalmente son empresas, personas o gobiernos que buscan financiar sus actividades, proyectos u otros propósitos. La otra parte es la que se refiere a quien otorga el crédito (Prestamista), labor que generalmente cumplen los bancos y otras instituciones financieras, o también personas particulares.

Los créditos involucran un aspecto fundamental: la confianza, pues la palabra crédito viene del latín *creditum,* que significa creer, confiar.

Los créditos tienen los siguientes elementos comunes:

Monto: es la cantidad de dinero que se solicita en préstamo.

Plazo: corresponde al tiempo durante el cual será retornado el total del valor del crédito y los intereses correspondientes.

Intereses: es la cantidad de dinero que se paga a quien otorgó el préstamo, por el derecho a utilizar los recursos en beneficio personal.

Abono a capital: son los pagos que se hacen, diferentes a los intereses, para reducir el monto del dinero tomado en préstamo.

Garantías: los prestamistas generalmente exigen unas garantías que respondan por el dinero prestado.

Existen créditos a corto, mediano y largo plazo, créditos de consumo, créditos para la producción, créditos hipotecarios, créditos de libre inversión etc.

La importancia del crédito para una economía es muy grande. Gracias al crédito, las personas, las empresas y los gobiernos pueden tener acceso a recursos que, de otra forma, serían difíciles de obtener.

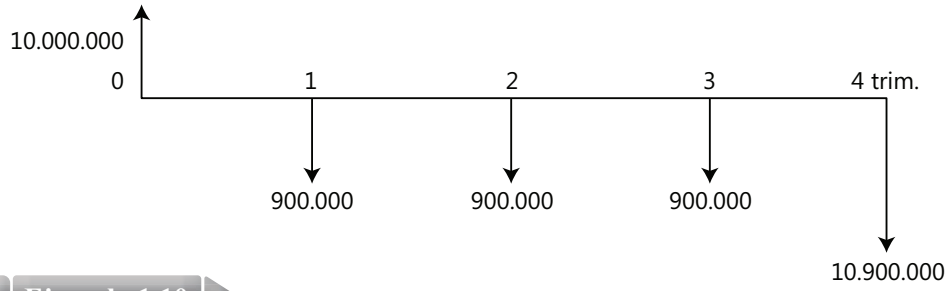
Ejemplo 1.9

El Banco Ganadero le concede al señor Pérez un crédito por valor de $ 10.000.000 con plazo de un año. La tasa de interés trimestral es del 9%. El banco le exige al señor Pérez la restitución del capital al final del año. Construir el flujo de caja para el señor Pérez.

El valor de los intereses trimestrales que tiene que pagar el señor Pérez no están dados en el problema, pero lo podemos calcular aplicando la fórmula $I = P \times i$ (1.3).

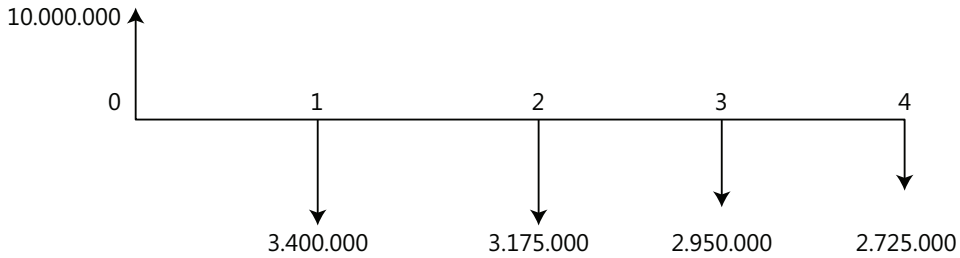
$$I = \$\ 10.000.000 \times 0.09 = \$\ 900.000$$

El flujo de caja es el siguiente:



Ejemplo 1.10

Consideremos el ejercicio anterior pero suponiendo que el banco le exige al señor Pérez la restitución del capital en 4 cuotas trimestrales iguales además del pago de los intereses sobre saldos.



El Banco exige la devolución del capital en 4 cuotas trimestrales iguales. La parte de la cuota que corresponde únicamente a la restitución del capital, será igual a:

$$\text{Abono a capital} = \frac{10.000.000}{4} = \$2.500.000$$

El valor total de la cuota a pagar por el señor Pérez cada trimestre será igual a $ 2.500.000 de abono a capital más los intereses causados en cada período. El valor de los intereses se calculará para cada período trimestral teniendo en cuenta que éstos se liquidan sobre el dinero que se usa cada período, es decir, sobre el saldo insoluto.

	ABONO	**INTERÉS**	**CUOTA**
Cuota primer trimestre	= 2.500.000	+ 900.000	= $ 3.400.000
Cuota segundo trimestre	= 2.500.000	+ 675.000	= $ 3.175.000
Cuota tercer trimestre	= 2.500.000	+ 450.000	= $ 2.950.000
Cuota cuarto trimestre	= 2.500.000	+ 225.000	= $ 2.725.000

Con la solución de los dos ejercicios anteriores se logran conclusiones importantes cuyas explicaciones las encontrará el lector en la medida en que avance en el estudio del texto:

- Existen diferentes formas equivalentes para amortizar una deuda (pagar la deuda con sus intereses). Para un mismo crédito, sin modificar la tasa de interés, el valor de las cuotas varía de acuerdo a la forma como se restituya el capital prestado.

- Los intereses se calculan sobre el saldo insoluto, es decir, sobre lo que se queda debiendo después hacer el abono al capital. Por esto, las cuotas trimestrales son diferentes, porque al abonar trimestralmente $ 2.500.000 el saldo de la deuda cada trimestre es menor.

Cuestionario

1. ¿Qué es el interés?
2. Explique el concepto de equivalencia.
3. ¿Qué es la inflación?
4. ¿Cuáles son las causas de la inflación?
5. ¿Qué es un crédito?
6. Mencione algunas clases de créditos
7. ¿Qué es un flujo de caja?
8. ¿Cuáles son las partes que intervienen en un crédito?
9. ¿Cuál es la importancia del crédito para una empresa?
10. ¿Qué es el saldo de un crédito?

Solucionario capítulo 1

EJERCICIO 1. Expresar como número decimal las siguientes tasas de interés:

a. 20% anual $\frac{20}{100} = 0.20$

b. 3% mensual $\frac{3}{100} = 0.03$

c. 18.50% trimestral $\frac{18.5}{100} = 0.185$

d. 65% semestral $\frac{65}{100} = 0.65$

e. 1% diario $\frac{1}{100} = 0.01$

f. 23.65% anual $\frac{23.65}{100} = 0.2365$

EJERCICIO 2. Una inversión de $ 235.000 produce después de 6 meses un resultado de $ 389.560. Calcular:

a. Valor de los intereses ganados: $I = F - P = \$\ 389.560 - \$\ 235.000 = \$\ 154.560$

b. Tasa de interés de la operación financiera:

$$i = \frac{I}{P} = \frac{154.560}{235.000} = 65.77\% \text{ semestral}$$

EJERCICIO 3. ¿Cuánto se debe invertir hoy para tener dentro de un año $ 10.500.000 y se ganen unos intereses por valor de $ 250.000?

$$I = F - P \qquad P = F - I = \$\ 10.500.000 - \$\ 250.000 = \$\ 10.250.000$$

EJERCICIO 4. Calcular el valor de los intereses que produce un capital de $ 5.000.000 a las siguientes tasas de interés:

a. 3% mensual $I = P * i = \$\ 5.000.000 * 0.03 = \$\ 150.000$ mensuales

b. 1.50% quincenal $I = P * i = \$\ 5.000.000 * 0.015 = \$\ 75.000$ quincenales

c. 18 % semestral $I = P * i = \$\ 5.000.000 * 0.18 = \$\ 900.000$ semestrales

d. 0.25% diario $I = P * i = \$\ 5.000.000 * 0.0025 = \$\ 12.500$ diarios

d. 25% anual $I = P * i = \$\ 5.000.000 * 0.25 = \$\ 1.250.000$ anuales

EJERCICIO 5. Sí depositamos hoy $ 500.000 en una cuenta de ahorros y esperamos recibir por concepto de intereses $ 65.000 anuales, ¿cuánto se tendrá al final del año?

$$F = P + I = \$\ 500.000 + \$\ 65.000 = \$\ 565.000$$

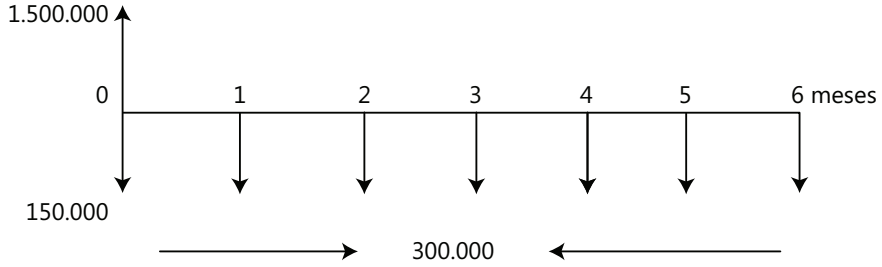
EJERCICIO 6. Usted le presta a un amigo $ 10.000.000 a una tasa de interés del 2.5% mensual, quien le propone cancelarle mensualmente $ 250.000. ¿Cuándo terminará de pagarle la deuda? Si le propone pagarle mensualmente $ 200.000, ¿la deuda crece o disminuye?

Calculamos el valor de los intereses: $I = P * i = \$\ 10.000.000 * 0.025 = \$\ 250.000$

a. Al comparar el valor de los intereses con el valor de la cuota, observamos que es igual, lo que indica que no hay amortización a capital y, por lo tanto, el valor de la deuda permanece constante.

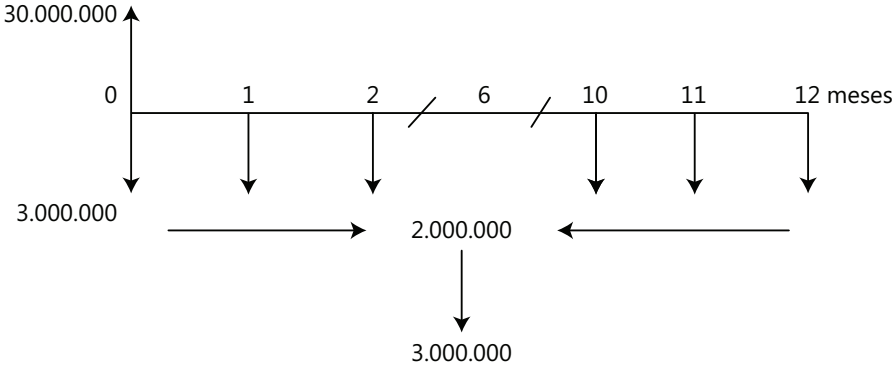
b. Si el valor de la cuota mensual es de $ 200.000, el valor de la deuda crece por efecto de la capitalización de los intereses dejados de pagar cada mes

EJERCICIO 7. Usted compra un electrodoméstico que tiene un valor de contado de $ 1.500.000 y lo paga de la siguiente forma: cuota inicial del 10% y el saldo en 6 cuotas mensuales iguales de $ 300.000 cada una. A la luz del principio del valor del dinero en el tiempo, ¿usted puede decir que pagó por el electrodoméstico realmente $ 1.950.000? Construya el flujo de caja.



Cantidades de dinero ubicadas en fechas diferentes no son comparables, entre otras cosas, por ser de diferente poder adquisitivo. Al no ser comparables, no se pueden sumar, por lo tanto, no podemos sumar las 6 cuotas mensuales de $ 300.000 y sumarle a este valor el de la cuota inicial.

EJERCICIO 8. Un vehículo que tiene un valor de $ 30.000.000 se financia de la siguiente forma: cuota inicial igual al 10%, 12 cuotas mensuales iguales de $ 2.000.000 y una cuota extraordinaria en el mes 6 por $ 3.000.000. ¿Qué negocio hizo la empresa que financió el vehículo?

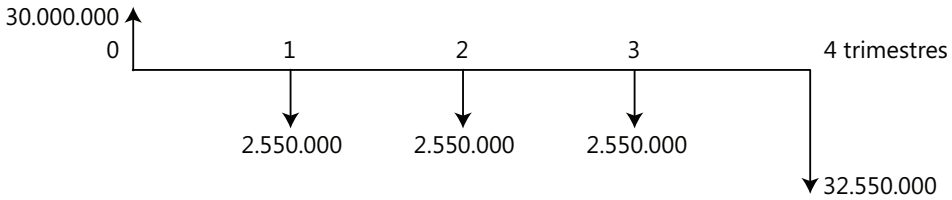


La empresa perdió dinero, porque aún violando el principio del valor del dinero en el tiempo, la suma de las 12 cuotas mensuales y la cuota inicial arroja un valor menor al valor del vehículo. Se está cancelando un valor menor a los $ 30.000.000.

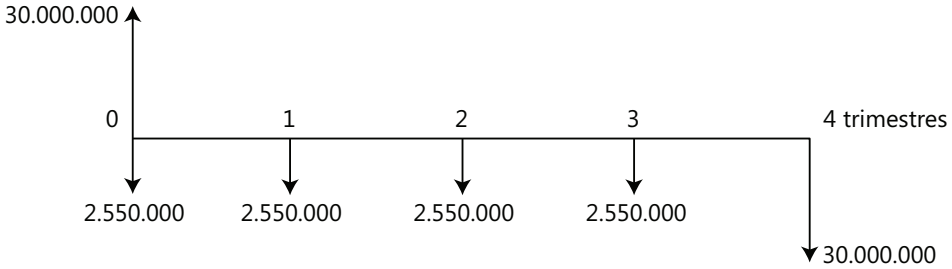
EJERCICIO 9. Se recibe un crédito bancario por $ 30.000.000 con un plazo de un año, a una tasa de interés del 8.5% trimestral pagadera en forma vencida y el valor del crédito se paga al final del año. Construya el flujo de caja.

Calculamos el valor de los intereses trimestrales:

$$I = P * i = \$\ 30.000.000 * 0.085 = \$\ 2.550.000$$



EJERCICIO 10. Construya el flujo de caja del ejercicio 9, pero suponiendo que los intereses trimestrales se pagan en forma anticipada.



CAPÍTULO 2

Interés simple

No pongas tu interés en el dinero,
pero pon tu dinero al interés.

O. W. Holmes

0. Introducción

En el capítulo primero se analizaron los conceptos fundamentales sobre los cuales se apoyan las Matemáticas Financieras y se llegó a la conclusión de que son muchas las razones que justifican la existencia del interés como factor compensatorio, medido a través de la tasa de interés, que evidencia el valor del dinero en el tiempo. Por esto, en todas las actividades financieras y personales donde se involucra el manejo del dinero es costumbre pagar un interés por el dinero prestado. Toda persona que obtiene un préstamo queda obligada a pagar un interés y a restituir el valor prestado en un tiempo determinado según las condiciones pactadas con su acreedor. Esto significa que en toda operación financiera, llámese crédito o proyecto de inversión, está presente el concepto del valor del dinero en el tiempo a través del interés que se paga.

Es común en el manejo de los créditos y operaciones financieras cotidianas, modificar las condiciones pactadas inicialmente, como también la refinanciación de las deudas contraídas. También se presenta con frecuencia la necesidad de elegir la mejor alternativa entre diferentes posibilidades de inversión. Esto nos lleva a buscar soluciones financieras equivalentes, esto es, que en tiempo y valor produzcan el mismo resultado económico. Estas soluciones se logran por medio del planteamiento de equivalencias de valores en una misma fecha, llamadas *ecuaciones de valor.*

El estudio de las operaciones financieras con interés simple, en las cuales están presentes la tasa de interés y otras variables como el valor presente (valor inicial), valor futuro (valor acumulado) y el tiempo de negociación, es el propósito de este capítulo. Así mismo, el análisis de casos de aplicación de las ecuaciones de valor en situaciones

financieras cotidianas como el cambio en los planes de pagos de una deuda, pago de una deuda inicial con pagos futuros en los cuales se involucra el valor de los intereses, refinanciación de la deuda, etc.

1. Definición de interés simple

Se llama *interés simple* aquél en el cual los intereses devengados en un período no ganan intereses en los períodos siguientes, independientemente de que se paguen o no. Únicamente sobre el capital principal se liquidan los intereses sin tener en cuenta los intereses precedentes causados. La liquidación de los intereses se hace sobre el saldo insoluto, es decir, sobre el capital no pagado.

1.1 Características del interés simple

- El capital inicial no varía durante todo el tiempo de la operación financiera ya que los intereses no se capitalizan. Esta condición se cumple siempre que no se haga abono al capital principal. En caso de pagos sobre el capital inicial, los intereses se calcularán sobre el capital insoluto.
- Como consecuencia de la característica anterior, la tasa de interés siempre se aplicará sobre el mismo capital, es decir, sobre el capital inicial o sobre el capital insoluto.
- Por la misma razón, puede decirse que los intereses serán siempre iguales en cada período, o menores si hay abonos al capital principal.

2. Cálculo del interés

En interés simple, el interés a pagar por una deuda varía en forma directamente proporcional al capital y al tiempo, es decir, a mayor capital y mayor tiempo es mayor el valor de los intereses.

Aplicando el concepto de función: $I = f(P, n)$

Dos magnitudes A y B son directamente proporcionales cuando a cada cantidad de A corresponde una cantidad de B y, además, al multiplicar una de ellas por un número, la otra queda multiplicada por el mismo número y dividiendo una de ellas por un número la otra queda dividida por el mismo número. Dicho número K, se llama constante o razón de proporcionalidad.

Para el interés simple, podemos expresar:

$$I = KPn \tag{2.1}$$

En donde: I = valor del interés

K = constante de proporcionalidad

P = capital (variable)

n = tiempo (variable)

Supongamos el siguiente ejemplo: calcular el valor de los intereses que produce un capital de $ 1.000.000 durante 6 meses, a una tasa de interés del 2.0% mensual simple.

Una tasa de interés del 2% mensual indica que por cada $ 100 prestados se deberán pagar $ 2.0 cada mes; por cada $ 1.000.000 se deberán pagar $ 20.000 mensuales. Puesto que el préstamo tiene una duración de 6 meses, por este tiempo se deben pagar $6 \times \$\ 20.000 = \$\ 120.000$ (relación directamente proporcional). Una forma directa de encontrar este mismo valor es aplicando la expresión (2.1), en la que la constante o razón de proporcionalidad sea la tasa de interés expresada como decimal:

$$I = 0.02 \times 1.000.000 \times 6 = \$\ 120.000$$

¿Qué sucede si se aumenta el tiempo del préstamo a 9 meses?

$$I = 0.02 \times 1.000.000 \times 9 = \$\ 180.000$$

Al aumentar una de las variables en cierta proporción, la otra también se incrementa en la misma proporción. El tiempo se incrementó de 6 a 9 meses, o sea, en un 50%, y el valor de los intereses también sufrió un incremento del 50% al pasar de $ 120.000 a $ 180.000.

¿Qué sucede si se prestan $ 1.500.000 en lugar de $ 1.000.000 y el tiempo es de 6 meses?

En este caso se está incrementando la variable capital.

$$I = 0.02 \times 1.500.000 \times 6 = \$\ 180.000$$

Se observa que al incrementarse el capital en un 50%, al pasar de $ 1.000.000 a $ 1.500.000, el valor de los intereses se incrementa, también, en ese mismo porcentaje.

Se puede expresar en una forma general la fórmula (2.1), de la siguiente manera:

$$I = P\ i\ n \qquad (2.2)$$

En donde:

I = valor de los intereses P = capital

n = tiempo i = tasa de interés, expresada como decimal.

La ecuación (2.2) es la fórmula general del interés simple.

Ejemplo 2.1

Juan David tiene un capital de $ 2.000.000. Invierte el 60% de este capital a una tasa del 36% anual simple y el capital restante al 2.0% mensual simple. Calcular el valor de los intereses mensuales simples.

El 60% de $\$\ 2.000.000 = 0.60 \times 2.000.000 = \$\ 1.200.000$

Juan David invierte su capital de la siguiente forma:

$ 1.200.000 a una tasa del 36% anual simple.

$ 800.000 a una tasa del 2.0% mensual simple.

- Cálculo del interés mensual simple de $ 1.2000.000.

$$I = 1.200.000 \times \frac{0.36}{12} \times 1 = \$\ 36.000$$

- Cálculo del interés mensual simple de $ 800.000.

$$I = 800.000 \times 0.02 \times 1 = \$\ 16.000$$

El interés total recibido cada mes es igual a la suma de los intereses parciales:

Interés total mensual: $ 36.000 + $ 16.000 = $ 52.000

TEMA DE INTERÉS

Antiguamente se creía que las estaciones se repetían cada 340 días, esto es, que el año se componía de 340 días. Este cálculo no se basaba en la traslación de la tierra, fenómeno que se desconocía entonces, sino en la llamada periodicidad de las estaciones y en los movimientos aparentes de los cuerpos celestes. Este intervalo de tiempo se dividió en períodos más cortos que correspondían al ciclo completo de las fases de la luna y se llamaron *meses*. Cada uno de esos períodos abarcaba 28, 29, o 30 días y, solía haber doce meses en un año. Más adelante, observaciones más minuciosas de los cuerpos celestes hechas por los babilonios les hizo ver que el año se componía de 360 días aproximadamente. Esta se consideró durante mucho tiempo la duración del año y se dividió en 10 períodos de 36 días cada uno. Aunque esos períodos no coincidían con las fases de la luna, se siguieron llamando meses. Los primeros meses del año se designaron con los nombres de los dioses y las diosas de las diversas razas y pueblos, aplicando los romanos al sexto el nombre de su diosa principal *Juno*. A partir del séptimo, los romanos designaron los cuatro meses restantes con el nombre latino del lugar que ocupan en el calendario. Estos nombres fueron:

Septiembre	(*septem*, siete)	Octubre	(*octo*, ocho)
Noviembre	(*novem*, nueve)	Diciembre	(*decem*, diez)

En tiempos del emperador romano Julio César se sabía ya que el año se componía de $365\frac{1}{4}$ días, y por esto, el emperador decretó que el año legal se debía componer de 365 días. Este emperador, en su reforma del calendario dispuso, también, que el año debía dividirse en 11 meses en lugar de 10, insertándose el nuevo mes entre el 6° y 7° antiguos, y dándose el nombre del emperador, *Julius*. De aquí se ha derivado el nombre de Julio. Se atribuye al emperador César Augusto, que sucedió a Julio César y que gobernó prácticamente a todo el mundo civilizado de esa época, el decreto según el cual el año debía dividirse en 12 meses y que el nuevo mes llevaría su nombre, *Augustus*, de donde se ha derivado el nombre de agosto. Este mes se puso entre los meses 7° y 8° anteriores, después de julio. De esta manera se completó la lista actual de meses y las palabras *septem*, *octo*, *novem*, *decem*, no tienen ya en el calendario su significado original.

Tomado del texto: *Aritmética* de J. E. Thompson, Ed Uteha, 1949

3. Interés comercial y real[1]

Cuando se realizan cálculos financieros que involucran las variables tiempo y tasa de interés, surge la duda sobre qué número de días se toma para el año, es decir, si se toman 365 o 360 días. Esto da origen a dos tipos de interés: el interés *ordinario o comercial,* que es el que se calcula considerando el año de 360 días; y el interés *real o exacto* que se calcula considerando el año de 365 días, o 366 días si se trata de año bisiesto.

Ejemplo 2.2

Calcular el interés comercial y el interés real o exacto de $ 1.500.000 a una tasa de interés del 36% anual simple durante 45 días.

- **Interés comercial**: año de 360 días.

Se observa que no hay correspondencia entre la tasa de interés y el tiempo, por lo tanto, se convierte la tasa anual a tasa diaria o el número de días a años.

$$I = P\,i\,n = 1.500.000 \times \frac{0.36}{360} \times 45 = \$\ 67.500$$

$$I = P\,i\,n = 1.500.000 \times 0.36 \times \frac{45}{360} = \$\ 67.500$$

- **Interés real o exacto**: 365 días o 366, si es año bisiesto.

$$I = P\,i\,n = 1.500.000 \times \frac{0.36}{365} \times 45 = \$\ 66.575.34$$

$$I = P\,i\,n = 1.500.000 \times 0.36 \times \frac{45}{365} = \$\ 66.575.34$$

Nótese que el interés comercial resulta más alto que el interés real o exacto.

4. Cálculo del número de días entre fechas

Al realizar operaciones financieras la variable tiempo no siempre se expresa en número de días, meses o años, sino que aparece la fecha de iniciación de la operación y la fecha de vencimiento. Para calcular el número de días transcurridos entre las dos fechas se manejan dos criterios: el cálculo aproximado que toma en cuenta el año comercial y el cálculo exacto (días calendario) considerando el año real, que se realiza con el apoyo de tablas o de una calculadora financiera.

[1] En finanzas es común la *polisemia* (pluralidad de significados de una palabra). En este texto, el interés real o exacto es el que resulta de tomar el año de 365 días, o 366 si es año bisiesto; y el interés real o tasa real el que resulta de descontar la inflación de la tasa de interés corriente.

Tabla para calcular el número exacto de días

Día Mes	Ene.	Feb.	Mar.	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agost.	Sept.	Oct.	Nov.	Dic.
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29	(60)	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365
												(366)

La tabla anterior es una matriz compuesta por 13 columnas y 32 filas. La primera columna presenta el número de días del mes contados desde el 1 hasta el 31. Cada celda de las columnas de los meses presenta el número de días de cada fecha, transcurridos desde el primero de enero. La intersección del día del mes con el número de la celda de la fecha seleccionada representa el número de días transcurridos desde el primero de enero hasta la fecha seleccionada; así, por ejemplo, la celda 179 es la intersección del día 28 con la columna del mes de junio, lo que indica que al 28 de junio han transcurrido 179 días desde el primero de enero. Los días entre dos fechas se calculan por la diferencia entre los días transcurridos desde el primero de enero. Así, por ejemplo, los días calendario transcurridos entre el 25 de marzo y el 12 de octubre del mismo año, se calculan así: se busca en la tabla el número de la celda que corresponde a la intersección del día 12 y el mes de octubre, que es 285; se busca en la tabla el número de la celda que corresponde a la intersección del día 25 y el mes de marzo, que es 84. Los días calendario transcurridos son: $285 - 84 = 201$ días. Al calcular el número de días transcurridos entre dos fechas empleando esta tabla, se excluye el primer día y se incluye el último día. Así, para una obligación contraída el 12 de marzo y pagada el 28 del mismo mes, transcurrieron 16 días; si se contara el primer día, los días transcurridos serían 17.

Ejemplo 2.3

Calcular el número de días entre el 12 de enero y el 23 de octubre de 2003.

- Año comercial. Procedimiento aproximado, considerando año de 360 días y meses de 30 días.

		Año	Mes	Día
	Fecha actual:	2003	10	23
Menos:	Fecha inicial:	2003	01	12
		0	9	11

Son 9 meses y once días: $9 \times 30 + 11 = 281$ días

- Año real o exacto. Días calendario.

Procedimiento con la tabla

	23 de octubre	296
(−)	12 de enero	12
		= 284 días

Ejemplo 2.4

La guerra de los Mil días, denominada también la Guerra Magna, se desarrolló entre el 18 de octubre de 1899 y el 21 de noviembre de 1902. ¿Cuántos días realmente duró la guerra?

- Año comercial

	Año	Mes	Día
Fecha actual:	1902	11	21
Menos: Fecha inicial	1899	10	18
	03	01	03

Son 3 años, un mes y 3 días: $3 \times 360 + 1 \times 30 + 3 = 1.113$ días.

- Año real o exacto.

18 de octubre a 31 de dic/1899:	$365 - 291$	$=$	74 días
Días del año 1900:			365 días
Días del año 1901:			365 días
21 de nov a 1 de enero/1902	$325 - 1$	$=$	324 días
Total días:			1.128 días

Cuando el cálculo de días entre fechas implique períodos anuales intermedios completos, se sigue el mismo procedimiento seguido en el ejercicio anterior sumándole 365 por el número de años completos.

Ejemplo 2.5

Un C.D.T (certificado de depósito a término) se constituye el día 10 de marzo con un plazo de 90 días. ¿Cuándo vence el C.D.T.?

Es necesario calcular el número de días exactos o calendarios, para lo cual utilizamos la tabla.

10 de marzo	69
	$+ 90$
	$159 \Rightarrow$ 8 de junio.

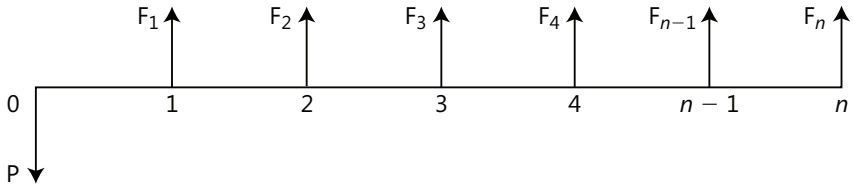
Se busca en la tabla del número de días calendario

El procedimiento es el siguiente: se busca en la tabla el número de días calendarios transcurridos desde el primero de enero hasta el 10 de marzo, para lo cual encontramos el número de la celda que corresponde a la intersección del día 10 (primera columna) y la columna del mes marzo y obtenemos 69; a este número le sumamos los 90 días del plazo del título y obtenemos 159; en la tabla encontramos que este número corresponde al 8 de junio, que viene a ser la fecha de vencimiento del C.D.T.

5. Valor futuro a interés simple

Consiste en calcular el valor futuro F, equivalente a un valor presente P, después de n períodos a una tasa de interés simple *i*. El valor futuro es igual al capital prestado más los intereses.

El flujo de caja es el siguiente:



Donde: F = valor acumulado o valor futuro. P = valor inicial o valor presente.

n = número de períodos. *i* = tasa de interés simple por período.

Período	Capital	Interés	Capital final
0–1	P	$I_1 = P \times i$	$F_1 = P + I_1$ $F_1 = P + Pi$
1–2	P	$I_2 = P \times i$	$F_2 = F_1 + I_2$ $F_2 = P + Pi + Pi$ $F_2 = P + 2Pi$
2–3	P	$I_3 = P \times i$	$F_3 = F_2 + I_3$ $F_3 = P + 2Pi + Pi$ $F_3 = P + 3Pi$
....	....	....	....
$(n - 1) - n$	P	$I_n = P \times i$	$F_n = P + nPi$ $F_n = P(1 + ni)$

Por lo tanto, el valor futuro equivalente de un valor presente dado, está dado por:

$$F = P(1 + ni) \tag{2.3}$$

La expresión (2.3) significa que si un capital P se presta o invierte durante un tiempo *n*, a una tasa de interés simple de *i*, entonces, el capital P se transforma en una cantidad F al final del tiempo *n* (*Vidaurri, 1997*). Debido a esto se dice que el dinero tiene un valor que depende del tiempo. Aplicando el concepto de equivalencia, la expresión (2.3) también indica que es equivalente P en el día de hoy (momento cero) que F dentro de *n* períodos a una tasa de interés simple *i*.

Al utilizar la ecuación (2.3), *la tasa de interés y el número de períodos deben estar expresados en la misma unidad de tiempo*. Al plantearse un problema y si la unidad de

tiempo de la tasa de interés no coincide con la unidad de tiempo empleada en el plazo, uno de ellos tiene que ser convertido para que su unidad de tiempo coincida con la del otro. Asimismo, es importante tener en cuenta que si la tasa de interés se da sin especificar explícitamente la unidad de tiempo, se supone que se trata de una tasa de interés anual (*Vidaurri, 1997*).

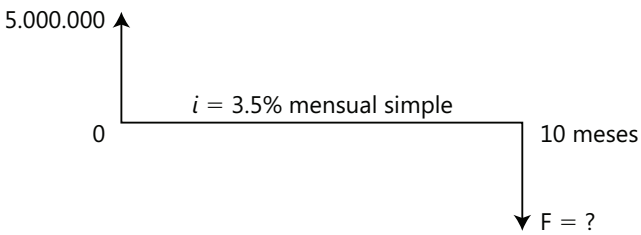
6. Desventajas del interés simple

- Su aplicación en el mundo financiero es limitado.
- Desconoce el valor del dinero en el tiempo.
- No capitaliza los intereses no pagados y, por lo tanto, estos pierden poder adquisitivo.

Ejemplo 2.6

¿Cuál será el valor a cancelar dentro de 10 meses por un préstamo de $ 5.000.000 recibidos en el día de hoy, si la tasa de interés es del 3.5% mensual simple?

El siguiente es el flujo de caja.



Se identifica la información del problema:

$P = \$\ 5.000.000$ $i = 3.5\%$ mensual simple

$n = 10$ meses. $F = ?$

La tasa de interés como el número de períodos están en la misma unidad de tiempo.

$$F = P(1 + ni) \tag{2.3}$$

$$F = 5.000.000(1 + 10 \times 0.035)$$

$$F = \$\ 6.750.000$$

El mismo resultado se obtiene al sumarle al capital inicial el valor de los 10 meses de intereses.

$F = P + Pin$ $F = 5.000.000 + 10 \times 175.000$

$F = 5.000.000 + 1.750.000$ $F = \$\ 6.750.000$

El valor de Pin es la suma de los 10 meses de intereses por valor de $ 175.000 cada mes y esto viola el principio del valor del dinero en el tiempo, porque se suman valores de diferentes fechas. Se está considerando que $ 175.000 de intereses del primer mes son comparables con $ 175.000 de intereses del mes 10.

TEMA DE INTERÉS

LA USURA

Cuando se habla de usura, se está hablando del cobro excesivamente alto de intereses en un préstamo que otorga una persona o entidad a la cual se le llamaría *usurero*.

Cuando se solicita un crédito, éste tendrá unas condiciones bajo las cuales ha de ser pagado. Estas condiciones son: el plazo, forma y períodos en los que éste debe ser retornado (mensual, trimestral, anual, etc) y el costo que, por tomarlo, asume la otra persona a quien se le otorga, costo que viene determinado por una tasa de interés.

Los intereses que se cobran en los préstamos o créditos, tienen incorporada dentro de ellos la teoría de que ha de haber un precio justo y razonable a la hora de cobrarlos y que, por lo tanto, no se determina exclusivamente con base en la oferta y demanda de los créditos. Es por esta la razón que los gobiernos de algunos países hayan establecido un límite máximo para el cobro de intereses en los préstamos, límite que recibe el nombre de *tasa de usura*. Esta tasa, si no es adecuada, puede propiciar el desarrollo de mercados no legales para los préstamos, sin embargo, su función principal es la de evitar que se cobren intereses muy altos a todas aquellas personas o empresas que soliciten créditos o préstamos.

En Colombia la tasa de usura la fija cada tres meses la Superintendencia Financiera y equivale a 1.5 veces los intereses bancarios corrientes, que resultan de hacer un promedio ponderado de las tasas de interés que cobran los bancos por sus préstamos.

FUENTE: COLOMBIALINK

7. Intereses moratorios

Cuando una deuda no se paga en la fecha de vencimiento, comienza a ganar intereses llamados *intereses de mora,* los cuales se calculan con base en el capital prestado o sobre el saldo insoluto por el tiempo que demora el pago. Por lo general, la tasa de interés moratoria es un 1.50 veces la tasa de interés corriente vigente en el momento de presentarse el incumplimiento, sin que exceda el límite máximo[2] permitido por la ley.

Ejemplo 2.7

Un pagaré por valor de $ 500.000 devenga intereses del 2.0% mensual simple y tiene un plazo de vencimiento de 45 días. Si se cancela 15 después de su fecha de vencimiento, calcular el interés moratorio y la cantidad total a pagar. La tasa de interés moratoria es del 3.0% mensual simple.

Si el pagaré se paga en la fecha de vencimiento, el valor a cancelar es:

$$F = P\,(1 + ni)$$

$$F = 500.000\left(1 + \frac{45}{30} \times 0.02\right) = \$\ 515.000$$

Al aplazarse el pago durante 15 días, se generan unos intereses moratorios a una tasa del 3.0% mensual simple.

[2] Este límite máximo permitido por la ley, es la *tasa de usura*, que en Colombia la establece cada 3 meses la Superintendencia Financiera.

$$I = Pin$$

$$\text{Intereses moratorios} = 500.000 \times \frac{15}{30} \times 0.03 = \$\ 7.500$$

La cantidad total a pagar es igual al capital más los intereses corrientes más los intereses moratorios.

$$\text{Cantidad total a pagar} = F + \text{intereses moratorios}$$

$$\text{Cantidad total a pagar} = \$\ 515.000 + \$\ 7.500 = \$\ 522.500$$

En los créditos bancarios y comerciales los intereses de mora se cobran sobre el mismo capital que genera los intereses corrientes, como se aprecia en el ejemplo anterior. Pero, generalmente, estos créditos se amortizan por medio de cuotas periódicas que contienen capital e intereses, calculados éstos últimos sobre saldos insolutos. Lo que a juicio del autor resulta abusivo y oneroso para el deudor es que al entrar en mora, después de pagadas algunas cuotas, se cobren intereses moratorios sobre el saldo insoluto y no sobre el valor de la cuota en mora.

8. Valor presente a interés simple

Consiste en calcular un valor presente P equivalente a un valor futuro F, ubicado *n* períodos adelante a una tasa de interés simple de *i*.

De la expresión $F = P(1 + ni)$ se despeja el valor de P:

$$P = \frac{F}{(1 + ni)} \tag{2.4}$$

Ejemplo 2.8

El señor Pedro Picapiedra tiene que cancelar dentro de año y medio un valor de $ 2.500.000. Si la tasa de interés es del 3% mensual simple ¿cuál es el valor inicial de la obligación?

La tasa de interés está en una unidad de tiempo diferente al número de períodos, por lo tanto, al aplicar la fórmula (2.4) se convierten los años a meses.

$$P = \frac{F}{(1 + ni)} \tag{2.4}$$

$$P = \frac{2.500.000}{(1 + 18 \times 0.03)}$$

$$P = \$\ 1.623.\ 376.62$$

La respuesta nos indica que $ 1.623.376.62 de hoy son equivalentes a $ 2.500.000 dentro de año y medio, a una tasa de interés del 3% mensual simple. La diferencia entre $ 2.500.000 y $ 1.623.376.62 es igual a $ 876.623.38, que es el valor de los intereses que producen $ 2.500.000 durante año y medio a una tasa de interés del 3% mensual simple.

9. Cálculo de la tasa de interés simple

Consiste en calcular la tasa de interés simple (i), que arroja una inversión inicial (P) y después de (n) períodos se recibe una cantidad acumulada (F).

Partiendo de la expresión (2.3), se tiene:

$$F = P(1 + ni)$$

$$\frac{F}{P} = \left(1 + ni\right)$$

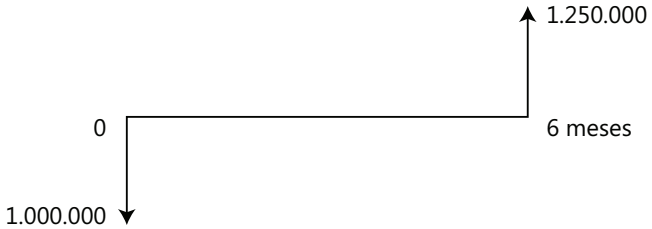
$$\frac{F}{P} - 1 = ni$$

$$i = \frac{1}{n}\left[\frac{F}{P} - 1\right] \tag{2.5}$$

Ejemplo 2.9

Un inversionista deposita en el día de hoy en una corporación $ 1.000.000 y después de 6 meses retira $ 1.250.000. Calcular la tasa de interés simple ganada.

El flujo de caja es el siguiente:



$$i = \frac{1}{6}\left[\frac{1.250.000}{1.000.000} - 1\right]$$

$$i = 0.0417 = 4.17\% \text{ mensual}$$

Al expresar en meses el número de períodos (n) en la ecuación (2.5), la tasa obtenida es mensual. Se conserva la condición que la tasa de interés y el número de períodos deben estar expresados en la misma unidad de tiempo.

10. Cálculo del tiempo de negociación

Consiste en determinar el número de períodos (n), que se requieren para que una inversión inicial (P) a una tasa de interés simple de (i) produzca un valor futuro (F).

De la misma forma como se llegó a la fórmula (2.5), podemos calcular el número de períodos (n).

$$\frac{F}{P} - 1 = ni \qquad n = \frac{1}{i}\left[\frac{F}{P} - 1\right] \tag{2.6}$$

Ejemplo 2.10

¿Cuánto tiempo se debe esperar para que un capital de $ 100 se convierta en $ 200, si la operación se realiza al 4% mensual simple?

P = $ 100 F = $ 200

i = 4% mensual simple n = ?

$$n = \frac{1}{0.04}\left[\frac{200}{100} - 1\right]$$

n = 25 meses

Sobre los $ 100 iniciales se aplica la tasa de interés del 4% mensual y se obtiene un valor de 100 × 0.04 = $ 4 mensuales de intereses. Si multiplicamos $ 4 por 25 meses de intereses se obtiene un valor acumulado de $ 100, que sumados al capital inicial de $ 100 arroja un valor futuro acumulado de $ 200.

Hemos analizado diferentes ejercicios de aplicación de la fórmula F = P(1 + ni) en la que conocidas tres variables se puede calcular la variable restante. En cada ejercicio se ha observado cómo la tasa de interés sólo se aplica sobre el capital inicial y los intereses periódicos causados no generan nuevos intereses, sino que van quedando estáticos perdiendo poder de compra, constituyéndose así en la principal desventaja del interés simple.

11. Operaciones de descuento

Un descuento es una operación financiera que consiste en cobrar sobre el valor de un título o documento el valor de los intereses en forma anticipada. Esta operación es frecuente en el mundo de los negocios cuando se tienen cuentas por cobrar o títulos valores y se necesita hacerlas efectivas antes de su fecha de vencimiento. En nuestro país esta operación es usual cuando se acude a créditos bancarios de corto plazo. En este caso, en el mismo momento en que se recibe el préstamo se cobran los intereses por anticipado. Estos intereses cobrados en forma anticipada se llaman *descuento* y la cantidad de dinero que recibe el tenedor del título, una vez descontados los intereses, se llama *valor efectivo* del pagaré.

El *valor nominal* es el monto que aparece en el pagaré. Se presentan dos situaciones con el manejo del valor nominal sobre el cual se aplica el descuento. La primera de ellas ocurre cuando en el pagaré aparece el valor del título y se indica que ganará unos intereses a una tasa prefijada. Para este caso, se le aplicará al valor del título los intereses simples durante todo el tiempo hasta la fecha de vencimiento, lo que se traduce en calcular el valor futuro a interés simple. Una segunda situación se presenta cuando se

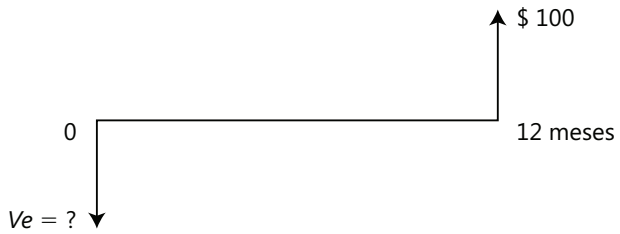
indica que el valor nominal incluye intereses, lo que significa que el valor nominal es el valor a pagar en la fecha de vencimiento.

Al vender un pagaré antes de su fecha de vencimiento, el comprador aplica una tasa de descuento sobre el valor nominal del título (valor de vencimiento). Dependiendo de la forma como se aplique la tasa de descuento sobre el valor nominal, resultan dos tipos de descuentos: *el descuento comercial y el descuento racional o justo*.

11.1 Descuento comercial

En una operación con descuento comercial los intereses simples se calculan sobre el valor nominal, que corresponde al monto que aparece en el pagaré.

Supóngase que se tiene un documento por cobrar dentro de 12 meses por valor de $ 100, que ya tiene incluido los intereses, y se desea negociar en el día de hoy. El intermediario financiero cobra una tasa de descuento del 2.0% mensual. Se desea conocer el valor efectivo.



Los intereses simples se calculan sobre el valor nominal:

$$I = V_n * i * n$$

$$I = 100 \times 0.02 \times 12$$

$$I = \$\ 24$$

El valor efectivo a recibir, que corresponde al valor presente, será igual a:

$$Ve = \$\ 100 - \$\ 24 = \$\ 76$$

Con el razonamiento anterior podemos deducir una fórmula para calcular el valor efectivo del documento en una forma directa.

$$Ve = Vn - I$$

$$Ve = Vn - Vn\ ni,$$

sacando factor común: $Ve = Vn(1 - ni)$

Calculamos el valor efectivo, aplicando directamente la fórmula:

$$Ve = 100\ (1 - 12 \times 0.02)$$

$$Ve = \$\ 76$$

11.2 Descuento racional o justo

En una operación con descuento racional los intereses simples se calculan sobre el valor efectivo.

$$I = Ve\ in$$

Pero $Ve = Vn - I$

Luego $Ve = Vn - Ve\ in$

$$Ve + Ve\ in = Vn$$

Factor común $Ve(1 + in) = Vn$

$$Ve = \frac{Vn}{(1 + ni)}$$

Se observa que el valor efectivo resulta de calcular el valor presente, con interés simple, conocido un valor futuro.

Para el ejemplo que venimos analizando, tenemos:

$$Ve = \frac{Vn}{(1 + ni)} = \frac{100}{(1 + 12 \times 0.02)} = \$\ 80.64$$

El valor del descuento es igual al valor nominal menos el valor efectivo.

Descuento comercial $= \$\ 100 - \$\ 76 \quad = \$\ 24$

Descuento racional $= \$\ 100 - \$\ 80.64 = \$\ 19.36$

Se observa que para una misma operación financiera, es mayor el descuento comercial que el descuento racional.

Si comparamos el valor efectivo con descuento comercial y descuento racional, observamos que es menor el valor efectivo con descuento comercial, lo que nos indica que el tenedor del pagaré recibe un menor valor al venderlo, al hacérsele un mayor descuento. Esto explica por qué las operaciones de descuento se realizan con descuento comercial y no racional. A juicio del autor se debe aplicar el descuento racional al realizar una operación de descuento por la misma concepción de lo que es el interés, puesto que los intereses se deben pagar sobre el dinero recibido en préstamo.

Ejemplo 2.11

Se tiene un pagaré por valor de $ 50.000.000, con fecha de vencimiento dentro de 6 meses. El dueño del título lo ofrece en venta porque necesita dinero para cumplir con un compromiso financiero. Un inversionista le ofrece comprárselo con una tasa de descuento del 2.0% mensual simple. Calcular el valor que recibirá el dueño del título.

a. Con descuento comercial

b. Con descuento racional

El ejercicio consiste en calcular el valor efectivo utilizando los dos tipos de descuento. En este caso se supone que el valor del pagaré (valor nominal) en su fecha de vencimiento ya tiene incluido los intereses.

a. Cálculo del valor efectivo con descuento comercial.

$$Ve = Vn(1 - ni)$$

$$Ve = 50.000.000(1 - 6 \times 0.02)$$

$$Ve = \$\ 44.000.000$$

b. Cálculo del valor efectivo con descuento racional.

$$Ve = \frac{Vn}{\left(1 + ni\right)} = \frac{50.000.000}{\left(1 + 6 \times 0.02\right)} = \$\ 44.642.857.14$$

Ejemplo 2.12

Se desea vender una letra por valor de $ 10.000.000 con una fecha de vencimiento dentro de 3 meses, y que gana intereses al 2.5% mensual simple. El comprador se lo negocia con una tasa de descuento del 2.0% mensual. Calcular el valor efectivo con descuento comercial.

En este caso el valor nominal sobre el cual se aplica la tasa de descuento es igual al valor de la letra más los intereses a una tasa del 2.5% mensual simple. Lo primero que debemos hacer es calcular el valor futuro.

$$F = 10.000.000\ (1 + 3 \times 0.025) = \$\ 10.750.000$$

El valor efectivo con descuento comercial, es igual a:

$$Ve = Vn(1 - ni)$$

$$Ve = 10.750.000\ (1 - 3 \times 0.02)$$

$$Ve = \$\ 10.105.000$$

Cuestionario

1. ¿Qué es la tasa de usura? ¿Cómo se fija?
2. ¿Qué son intereses corrientes? ¿Cómo se fijan?
3. ¿Qué son intereses moratorios? ¿Cómo se calculan?
4. ¿Qué es el interés simple?
5. ¿Qué es el valor nominal de un pagaré?
6. ¿Qué diferencia existe entre el descuento comercial y el descuento racional?

Solucionario capítulo 2

EJERCICIO 1. Por medio de un pagaré nos comprometimos a cancelar después de año y medio un valor de $ 3.285.000. Si la tasa de interés es del 1.5% mensual simple, hallar el valor inicial de la obligación.

P = ? n = 18 meses F = $ 3.285.000 i = 1.5 % mensual simple

$$F = P(1 + n * i) \qquad P = \frac{F}{(1 + n * i)} = \frac{3.285.000}{(1 + 18 * 0.015)} = \$\ 2.586.614.17$$

EJERCICIO 2. Un inversionista estima que un lote de terreno puede ser negociado dentro de 3.5 años por $ 85.000.000. ¿Cuánto será lo máximo que él está dispuesto a pagar hoy, si se cobra una tasa de interés de 18% semestral simple?

P = ? n = 7 semestres F = $ 85.000.000 i = 18 % semestral simple

$$F = P(1 + n * i) \qquad P = \frac{F}{(1 + n * i)} = \frac{85.000.000}{(1 + 7 * 0.18)} = \$\ 37.610.619.47$$

EJERCICIO 3. Hallar la tasa de interés mensual simple que obtenemos cuando invertimos $ 210.000 y al cabo de 10 meses podemos retirar $ 311.650.

$$F = P(1 + n * i)$$

$$i = \frac{1}{n}\left[\frac{F}{P} - 1\right] = \frac{1}{10}\left[\frac{311.650}{210.000} - 1\right] = 4.84\%\ \text{mensual}$$

EJERCICIO 4. Se compra un terreno por valor de $ 9.000.000. Si se espera venderlo dentro de un año por $ 12.000.000, ¿cuál es la tasa de interés mensual simple a que rendiría la inversión?

$$i = \frac{1}{n}\left[\frac{F}{P} - 1\right] = \frac{1}{12}\left[\frac{12.000.000}{9.000.000} - 1\right] = 2.78\%\ \text{mensual}$$

EJERCICIO 5. Una caja de ahorros reconoce una tasa del 5% trimestral simple. Si hoy deposito $ 250.000, ¿cuánto tiempo debo esperar para retirar $ 325.000?

$$n = \frac{1}{i}\left[\frac{F}{P} - 1\right] = \frac{1}{0.05}\left[\frac{325.000}{250.000} - 1\right] = 6\ \text{trimestres}$$

EJERCICIO 6. ¿Cuánto tiempo debo esperar para que se duplique una inversión, si me pagan el 2,5% mensual simple?

Se asumen valores para P y F: P = $ 100 F = $ 200 i = 2.5% mensual simple n = ?

$$n = \frac{1}{i}\left[\frac{F}{P} - 1\right] = \frac{1}{0.025}\left[\frac{200}{100} - 1\right] = 40\ \text{meses}$$

EJERCICIO 7. Se tienen dos documentos por cobrar, así: dentro de 6 meses uno por valor de $ 3.000.000 y al final del año uno por valor de $ 5.000.000. Estos documentos se venden hoy con una tasa de descuento del 1.50% mensual simple. Calcular el valor efectivo a recibir, utilizando el descuento racional.

$$P = \frac{Vn}{(1 + n * i)} = \frac{3.000.000}{(1 + 6 * 0.015)} + \frac{5.000.000}{(1 + 12 * 0.015)} = \$\ 6.989.581.72$$

EJERCICIO 8. Resuelva el ejercicio anterior, utilizando el descuento comercial

$$P = Vn(1 - n * i)$$

$$P = \$\ 3.000.000\ (1 - 6 * 0.015) + 5.000.000\ (1 - 12 * 0.015) = \$\ 6.830.000$$

EJERCICIO 9. Se hace un préstamo de $ 10.000.000 a una tasa del 2.0 % mensual simple con un plazo de 2 meses. Si la obligación se cancela 23 días después de la fecha de vencimiento, calcular los intereses moratorios, con una tasa moratoria igual a 1.2 veces la tasa de interés del crédito.

Tasa moratoria = 2.0% * 1.2 = 2.40% mensual simple

Intereses moratorios = P*i*n = $ 10.000.000 * 0.024 * 23/30 = $ 184.000

CAPÍTULO 3

Interés compuesto

En una ocasión le preguntaron al barón de Rothschild, un rico banquero, si recordaba las 7 maravillas del mundo. Contestó que no, pero que sí recordaba la octava maravilla: El interés compuesto, y dijo: esta maravilla deberíamos utilizarla todos para lograr lo que nos proponemos.

0. Introducción

En el interés simple los intereses período a período se calculan sobre el mismo capital si no se hacen abonos al capital principal, lo que significa que el capital inicial permanece constante. Así los intereses no se paguen, el capital que genera los intereses no sufrirá ninguna variación. Pero, si en cada período de tiempo pactado en una obligación los intereses periódicos se van sumando al capital, formando un nuevo capital sobre el cual se calcularán los nuevos intereses, se dice que los intereses se van capitalizando y que la operación financiera es a *interés compuesto*.

La diferencia básica entre el interés simple y el compuesto está en lo que se haga con los intereses causados periódicamente. Si se abre una cuenta de ahorros en un banco, el cual liquida los intereses trimestralmente y éstos no son retirados, automáticamente se reinvierten. Aquí empieza a funcionar el interés compuesto. Pero, si el dueño de la cuenta de ahorros está pendiente de la liquidación de los intereses y los retira, le quedará el mismo capital y sobre él le seguirán liquidando los intereses. Allí está operando el interés simple. En el caso de un préstamo personal en el que se hacen abonos al capital principal, los intereses se calcularán sobre el saldo insoluto. Que opere uno u otro tipo de interés depende, también, del destino de los intereses y del capital abonado. Si periódicamente se pagan intereses y parte del capital y estos valores se reinvierten, así sea

en otros medios diferentes, funciona el interés compuesto. Si tanto el capital abonado como los intereses se usan para satisfacer necesidades personales, está operando el interés simple. Así podríamos seguir enumerando situaciones en las cuales puede operar uno u otro tipo de interés.

En este capítulo se resuelven y plantean ejercicios de la experiencia diaria y para su solución se propone lo que algunos autores llaman el principio de la *Equidad Financiera*, que consiste en establecer una igualdad entre los egresos e ingresos que intervienen en cualquier operación financiera, todos ellos comparados en una fecha común llamada *fecha focal*. Su planteamiento, por consiguiente, se apoya en el principio del valor del dinero en el tiempo y su fácil comprensión nos permitirá desarrollar casi todos los problemas de las Matemáticas Financieras. Para resolver los ejercicios, utilizaremos la técnica de las ecuaciones de valor.

1. Definición del interés compuesto

El *interés compuesto* (llamado también interés sobre interés), es aquel que al final del período capitaliza los intereses causados en el período inmediatamente anterior. En el interés compuesto el capital cambia al final de cada período, debido a que los intereses se adicionan al capital para formar un nuevo capital sobre el cual se calculan los intereses.

1.1 Capitalización

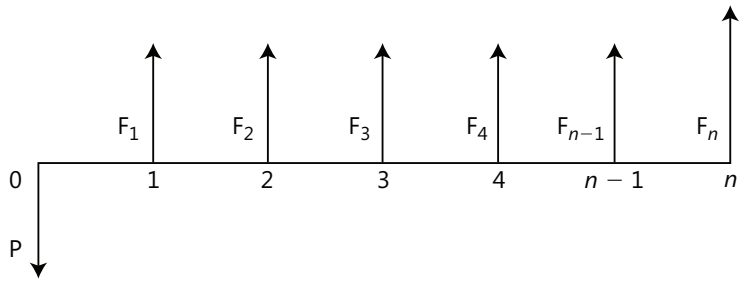
Proceso mediante el cual los intereses que se van causando periódicamente se suman al capital anterior.

1.2 Período de capitalización

Período pactado para convertir el interés en capital. Así, por ejemplo, existe capitalización diaria cuando al final de cada día los intereses generados se suman al capital. Al decir período de capitalización mensual se está indicando que al final de cada mes se suman los intereses al capital anterior. Es importante establecer la diferencia entre período de capitalización y período de pago, porque no siempre coinciden. Los intereses se pueden causar diariamente y recibirse su pago al final del mes; en este caso el período de capitalización es diario y el período de pago mensual. Se suele mencionar el período de capitalización al expresar la tasa de interés de una operación financiera; en caso contrario se supone que la tasa de interés es anual.

2. Valor futuro a interés compuesto

Consiste en calcular el valor equivalente de una cantidad P, después de estar ganando intereses por *n* períodos, a una tasa de interés *i*. La representación gráfica sería:



F = valor acumulado o valor futuro.

P = valor presente de la obligación

i = tasa de interés periódica.

n = número de períodos.

Analicemos qué sucede período a período:

Período	Capital	Interés/Período	Capital final
0–1	P	$I_1 = P \times i$	$F_1 = P + I_1$ $F_1 = P + P \times i$ $F_1 = P(1 + i)$
1–2	$P(1 + i)$	$I_2 = P(1 + i) \times i$ $I_2 = pi(1 + i)$	$F_2 = F_1 + I_2$ $F_2 = P(1 + i) + Pi(1 + i)$ $F_2 = P(1 + i)^2$
2–3	$P(1 + i)^2$	$I_3 = P(1 + i)^2 i$ $I_3 = Pi(1 + i)^2$	$F_3 = F_2 + I_3$ $F_3 = P(1 + i)^2 + Pi(1 + i)^2$ $F_3 = P(1 + i)^3$
....	....	....	....
$(n - 1) - n$	$P(1 + i)^{n-1}$	$I_n = Pi(1 + i)^{n-1}$	$F_n = P(1 + i)^n$

Por lo tanto, el valor futuro equivalente a un valor presente está dado por la siguiente fórmula:

$$F = P(1 + i)^n \tag{3.1}$$

La expresión significa que es equivalente P en el día de hoy a F dentro de n períodos a una tasa de interés de *i* por período.

Esta fórmula es conocida como la fórmula básica de las Matemáticas Financieras y el lector podrá apreciar en el desarrollo del texto, que la mayoría de las operaciones financieras se realizan con su aplicación.

El factor $(1 + i)^n$ se conoce con el nombre de "*Factor de capitalización en pago único*".

El cálculo del factor $(1 + i)^n$ por productos sucesivos resulta trabajoso, al tener que multiplicar el factor $(1 + i)$ por sí mismo un número de veces igual al exponente. Con el uso de los logaritmos se calcularon los valores futuros o montos de un peso para diferentes tasas y períodos y los resultados se dieron en las *tablas de interés compuesto*. Para utilizar estas tablas sólo era necesario buscar en ellas el monto de un peso para una tasa y un número de períodos especificados, multiplicar luego esta cantidad por el capital y el problema quedaba resuelto. Con el surgimiento de las calculadoras científicas, las calculadoras financieras y las hojas electrónicas, las tablas de interés compuesto entraron en desuso, razón por la cual no se utilizarán en este libro.

Las Matemáticas Financieras evolucionan con el tiempo y los avances tecnológicos y nuevos sistemas operacionales exigen una revisión de conceptos y modos de operar. Por esta razón, este libro se ha preparado para que el lector disponga de los métodos tradicionales (fórmulas matemáticas), de la calculadora financiera y la hoja de cálculo Excel, estas últimas como herramientas modernas de cálculo.

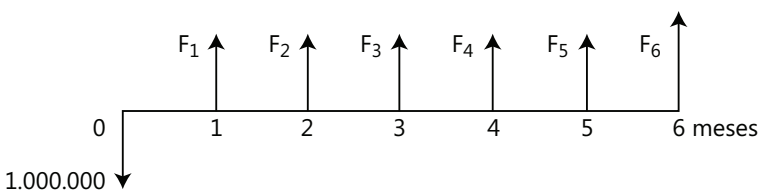
3. Características del interés compuesto

- El capital inicial cambia en cada período porque los intereses que se causan se capitalizan, o sea, se convierten en capital.
- La tasa de interés siempre se aplica sobre un capital diferente.
- Los intereses periódicos siempre serán mayores.

El siguiente ejemplo muestra lo que sucede período a período, hasta llegar a la fórmula básica: $F = P(1 + i)^n$.

Ejemplo 3.1

Se invierten $ 1.000.000 durante 6 meses en una corporación que reconoce una tasa de interés del 3% mensual[1]. Se desea saber, ¿cuánto dinero se tendrá acumulado al final del sexto mes?



Final del primer mes: $F_1 = 1.000.000 + 1.000.000 \times 0.03 = \$\ 1.030.000$

Final del segundo mes: $F_2 = 1.030.000 + 1.030.000 \times 0.03 = \$\ 1.060.900$

Final del tercer mes: $F_3 = 1.060.900 + 1.060.900 \times 0.03 = \$\ 1.092.727$

Final del cuarto mes: $F_4 = 1.092.727 + 1.092.727 \times 0.03 = \$\ 1.125.508.81$

[1] Al darse una tasa periódica y si no expresa que es simple, se supone que es compuesta.

Final del quinto mes: $F_5 = 1.125.508.81 + 1.125.508.81 \times 0.03 = \$\ 1.159.274.07$

Final del sexto mes: $F_6 = 1.159.274.07 + 1.159.274.07 \times 0.03 = \$\ 1.194.052.29$

Este valor acumulado al final del sexto mes también se puede obtener aplicando la fórmula (3.1).

$$F = P(1 + i)^n \tag{3.1}$$

$$F = 1.000.000\ (1 + 0.03)^6$$

$$F = \$\ 1.194.052.29$$

Son equivalentes $ 1.000.000 en el día de hoy que $ 1.194.052.29 dentro de 6 meses a una tasa de interés del 3% mensual, asumiendo que los intereses causados mensualmente se van capitalizando o reinvirtiendo.

Al aplicar la fórmula (3.1), el valor futuro se halla multiplicando el valor presente por $(1 + i)$, tantas veces como períodos de capitalización hay. Esto es, que el capital se multiplica por el multiplicador $(1 + i)$; este producto se multiplica por el mismo multiplicador; este producto se multiplica por el mismo multiplicador y así sucesivamente.

$$F = P(1 + i)(1 + i)(1 + i)...(1 + i)$$

TEMA DE INTERÉS

ESQUEMA DE PONZI

Un esquema en el cual un deudor asume una deuda excesiva (por ejemplo, para incrementar el consumo corriente) y propone pagarla pidiendo prestado el dinero necesario para el servicio de la deuda (pago de interés mas capital) se conoce como *esquema de ponzi*. Supongamos que el deudor debe $ 100 a una tasa de interés del 5% mensual; cuando vence el mes el deudor debe $ 105. Si contrata un nuevo préstamo igual a $ 105 para pagar a su acreedor anterior, ahora queda debiendo un monto mayor al nuevo acreedor. En el próximo periodo el deudor tendrá que pagar $ 110.25. En cada periodo, entonces, la deuda crecerá a la razón geométrica (1 + 0.05). Este ejemplo muestra como opera el interés compuesto.

4. Análisis de la fórmula de interés compuesto

Puesto que la fórmula del interés compuesto es la base para los cálculos financieros, es conveniente analizar su significado y limitaciones.

¿Qué supone la fórmula $F = P(1 + i)^n$? El procedimiento matemático seguido en la sección 2, de este capítulo, para encontrar el valor futuro equivalente a un valor presente después de *n* períodos a una tasa de interés i, se basa en las dos condiciones siguientes:

- Los intereses que se causan período a período se capitalizan, o sea, no se pagan sino que se suman al capital anterior para formar un nuevo capital. Observamos en la tabla 1, que al final de cada período se forma un nuevo capital.
- Los intereses se reinvierten a la misma tasa de interés *i*.

Esto da como origen al supuesto básico de las Matemáticas Financieras, llamado el *Supuesto de la reinversión*, que entramos a analizar al hacernos la siguiente pregunta: ¿cuándo los intereses se pagan periódicamente, la operación se hace con interés simple o con interés compuesto?

Cuando los intereses se pagan periódicamente, el acreedor recibe un pago que puede usar de inmediato. Asimismo, el prestatario, al pagar los intereses periódicamente, está perdiendo la oportunidad de utilizar el dinero que paga al acreedor (*Grant; Ireson y Leavenworth, 1960*). En consecuencia, tanto para el prestamista como para el prestatario aplica el interés simple y el interés compuesto.

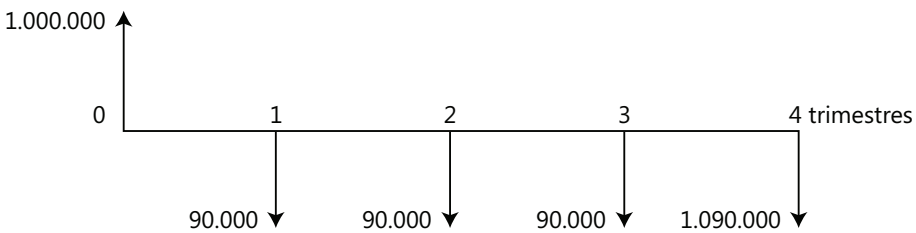
Analicemos esta situación con un ejemplo práctico:

Ejemplo 3.2

Se concede un crédito bancario a un año por $ 1.000.000 al 36% trimestre vencido (el banco presta su dinero a una tasa del 36% anual, pero los intereses tienen que ser pagados cada trimestre). La pregunta que surge es: ¿por qué si se pagan los intereses periódicamente la operación se hace con interés simple y con interés compuesto?

La tasa de interés pagada sobre saldos es del 9% trimestral, y suponemos que el valor del préstamo se reembolsa al banco al final del año y que el plazo del crédito es de un año.

Valor de los intereses trimestrales $=$ $ 1.000.000 $\times$ 0.09 $=$ $ 90.000



Situación 1

La operación se hace con interés simple porque se cumplen las tres condiciones que lo caracterizan: el capital inicial no cambia, la tasa de interés se aplica período a período sobre el capital inicial y el valor de los intereses es igual en cada trimestre, $ 90.000 en este caso.

La operación se hace con interés compuesto tanto para el banco como para el prestatario por la siguiente razón: el banco al recibir los $ 90.000 por concepto de intereses, cada vez que se cumple el trimestre, tiene la posibilidad inmediata de reinvertirlos a la misma tasa de interés, en este caso el 9% trimestral. Aplica el interés compuesto porque los intereses se reinvierten a la misma tasa de interés y esto es lo que supone la fórmula básica $F = P(1 + i)^n$. La reinversión de los $ 90.000 es repetitiva, es decir, los intereses que se pagan trimestralmente y los intereses causados por los intereses trimestrales se reinvierten cada trimestre hasta finalizar el año.

Analicemos esta situación:

Final del primer trimestre.

El prestatario paga los primeros $ 90.000 de intereses. Al recibirlos, el banco inmediatamente los presta a la misma tasa de interés (9% trimestral).

Final del segundo trimestre.

El banco recibe los $90.000 correspondientes a los intereses del segundo trimestre y $ 98.100 que corresponden a los $ 90.000 del trimestre anterior más los intereses que causaron estos $ 90.000, o sea, $ 8.100. En total, el banco recibe al finalizar el segundo trimestre: 90.000 + 90.000 + 8.100 = $ 188.100. Este valor los presta a la misma tasa del 9% trimestral.

Final del tercer trimestre.

El banco recibe los $ 90.000 correspondientes a los intereses causados durante el tercer trimestre más $ 188.100 que prestó el trimestre anterior más los intereses que causaron éstos $ 188.100, o sea, $16.929. En total el banco recibe al finalizar el tercer trimestre: 90.000 + 188.100 + 16.929 = 295.029. Este valor los presta a la misma tasa del 9% trimestral.

Final del cuarto trimestre.

El banco recibe $ 90.000 correspondientes a los intereses causados durante el cuarto trimestre, más $ 1.000.000 que devuelve al banco, más $ 295.029 que prestó en el trimestre anterior y más los intereses causados por los $ 295.029, o sea, $ 26.552. En total el banco recibe al finalizar el plazo del préstamo: 90.000 + 1.000.000 + 295.029 + 26.652 = $ 1.411.581.

Ahora miremos la operación de crédito para el prestatario:

El prestatario, al cancelarle al banco los intereses incurre en un costo de oportunidad, porque si no los cancelara tendría la oportunidad de reinvertirlos a la misma tasa de interés o dejarlos en su actividad productiva, que se supone rinden al menos esta tasa de interés (9% trimestral). En otras palabras, el prestatario al cancelar los intereses pierde la oportunidad de hacer la misma operación que hace el banco.

Analizando en forma numérica la operación financiera tendríamos el siguiente resultado: el banco invierte $ 1.000.000 y recibirá al final del año el siguiente valor futuro acumulado:

$$F = 90.000(1+0.09)^3 + 90.000(1 + 0.09)^2 + 90.000(1 + 0.09)^1 + 1.090.000$$

$$F = 116.552.61 + 106.929 + 98.100 + 1.090.000$$

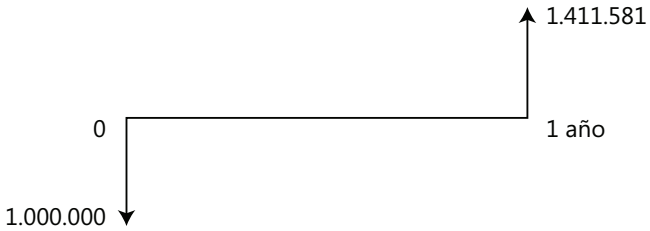
$$F = \$\ 1.411.581$$

Este valor también se obtiene aplicando la fórmula básica (3.1)

$$F = 1.000.000\ (1 + 0.09)^4$$

$$F = \$\ 1.411.581$$

Se construye el flujo de caja de la operación financiera desde el punto de vista del banco.



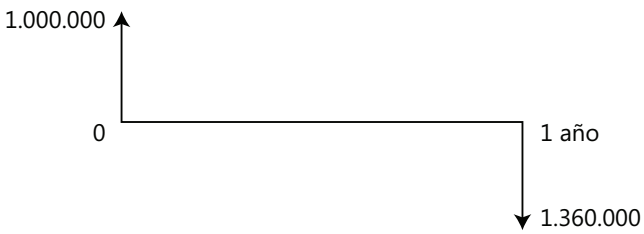
El banco presta $ 1.000.000 y después de un año tiene acumulado $ 1.411.581, producto de los intereses y reinversión de los mismos, por lo tanto, su rendimiento efectivo es:

$$i = \frac{F}{P} - 1$$

$$i = \frac{1.411.581}{1.000.000} - 1 \qquad i = 0.4116 = 41.16\% \text{ efectivo anual.}$$

El resultado de 41.16% que expresa el rendimiento efectivo anual para el banco, así como el costo efectivo anual para el prestatario, permite hacer una consideración preliminar entre lo que es una *tasa nominal* (la que se pacta en una operación financiera), en este caso el 36% anual con pago de intereses cada trimestre y una *tasa efectiva* (la que realmente se paga), en este caso el 41.16%. Cuando se pacta una tasa de interés en una operación financiera (tasa nominal) y el período de liquidación de intereses (período de capitalización) es menor que el tiempo en que está expresada la tasa nominal, la tasa que realmente se paga (tasa efectiva) es mayor que la tasa nominal. Para el ejemplo que estamos analizando, la tasa pactada para el préstamo fue del 36% anual con pago de intereses cada trimestre. Esta tasa es equivalente a una tasa efectiva del 41.16%, que resulta de considerar que los intereses que se pagan trimestralmente se van capitalizando o reinvirtiendo y van generando nuevos intereses. Además, podemos asumir que el rendimiento efectivo para el banco constituye el costo efectivo para el prestatario. Una operación financiera es como un juego en el cual intervienen dos jugadores: *el prestamista que recibe un rendimiento sobre su inversión y el prestatario que paga un costo sobre el préstamo*.

Asumamos ahora, el mismo préstamo con el mismo plazo y a la misma tasa de interés, pero suponiendo que los intereses son pagaderos al final del año.



Situación 2

El rendimiento para el banco y el costo para el prestatario será el siguiente:

$$i = \frac{F}{P} - 1$$

$$i = \frac{1.360.000}{1.000.000} - 1 \qquad i = 36\% \text{ anual}$$

¿Por qué, si el valor del préstamo es el mismo, con el mismo plazo y a la misma tasa de interés el rendimiento para el banco, así como el costo para el prestatario, es diferente como lo plantean la situación 1 y la situación 2? La situación 1 plantea la posibilidad que tiene el banco de reinvertir los intereses recibidos del prestatario y el costo de oportunidad en que incurre el prestatario al pagarle los intereses al banco. En la situación 2, el banco no tiene posibilidades de reinversión y el prestatario no incurre en ningún costo de oportunidad porque trabaja durante todo el año el valor del préstamo.

Como conclusión del ejercicio, se plantea la siguiente norma financiera:

> Cuando el prestamista tiene la posibilidad de reinvertir los intereses recibidos del prestatario, obtiene un rendimiento mayor que la tasa pactada en el préstamo. Cuando el prestatario cancela intereses en un tiempo menor al tiempo en que se expresa la tasa del préstamo, paga un costo mayor por el costo de oportunidad.

El supuesto de la reinversión (supuesto básico de las Matemáticas Financieras) considera que todos los fondos que libera un proyecto o préstamo, para nuestro caso los intereses, son reinvertidos a la misma tasa de interés. La consideración anterior tiene en la práctica sus limitaciones. *Luis Fernando Gutiérrez (1994)*, al respecto, señala lo siguiente:

- Para que la reinversión suceda se debe dar la posibilidad inmediata de hacerlo en el momento en que ocurre el desembolso. Esto en el mundo de los negocios es impráctico y solamente esta posibilidad se podría presentar en el sistema bancario que tiene la mecánica de la reinversión.
- Mucho más complicado que contar con la posibilidad inmediata de la reinversión, es poder hacerlo a la misma tasa de interés. Este es el supuesto más limitante. Una inversión podría resultar muy alta en rentabilidad sin que sea posible, con su producido, repetir el esquema de la reinversión a la misma tasa. Así, por ejemplo, un proyecto que rente el 80% anual, es probable que la única posibilidad práctica sea utilizar el efectivo que genera en la colocación en un depósito a término con una tasa del 25%. En un caso como éste, no se podría aplicar la fórmula de interés compuesto, sino que se debería deducir una en particular, en la cual la reinversión de intereses se haga a una tasa de mercado.

Después de analizadas las limitaciones del supuesto de la reinversión, podemos concluir que la reinversión de intereses tal y como lo plantea la fórmula básica $F = P(1 + i)^n$ no siempre se cumple en la práctica. Esto nos lleva a afirmar que la tasa efectiva anual obtenida (41.16%) se puede considerar como una tasa efectiva ideal. En Colombia las tasas de interés son fluctuantes en períodos de tiempo muy cortos debido al mismo comportamiento de la economía. El banco al tener la posibilidad de reinvertir los intereses que recibe, lo puede hacer a una tasa mayor o una menor de la pactada y para este caso no aplica la ecuación (3.1).

5. Introducción al manejo de la calculadora financiera

La calculadora financiera es actualmente junto con la computadora, una herramienta básica de cálculo en la vida cotidiana, indispensable en las actividades financieras. La calculadora no nos ayuda a entender conceptos o a desarrollar habilidades matemáticas; es simplemente una herramienta útil empleada para reducir el tiempo dedicado a tediosos cálculos, que anteriormente estaban reservados a los expertos en el manejo de complicadas tablas financieras (*Vidaurri, 1997*). Todas las operaciones inherentes a las Matemáticas Financieras se realizan en una forma rápida y precisa con la calculadora financiera y la hoja electrónica.

Los modelos de calculadoras financieras más populares son: la 17B II y la 19B II de Hewlett Packard, la FC 100, FC 200, FC 1.000, FC 100 V y FC 200 V de Casio. Por razones de costo, la gran mayoría de los usuarios poseen los modelos de la marca Casio. En este libro utilizaremos estos 7 modelos para darle solución a los diferentes problemas financieros.

La operación de cada modelo de calculadora financiera tiene una secuencia diferente, de tal manera que dependiendo de la marca y del modelo surgen pequeñas diferencias. Por esta razón, vamos a explicar el procedimiento de cálculo por modelo y marca. Al adquirir cada usuario cualquier calculadora recibe el manual del propietario, en el cual encuentra la reseña de todas las características y una guía general en la que se le explica la función de cada tecla.

Calculadora Casio FC 100

Para iniciar los cálculos financieros (interés compuesto, conversión de tasas de interés, anualidades, amortizaciones), con esta calculadora, a excepción de los cálculos de evaluación de proyectos, se debe especificar el modo de operación financiero para lo cual se oprime la tecla MODE y el número 1. Para realizar cálculos de evaluación financiera de proyectos se especifica el modo de flujo de caja (CF), para lo cual se oprime la tecla MODE y el número 4, y aparece en la parte superior de la pantalla CF. Antes de iniciar cualquier cálculo financiero es necesario borrar las memorias financieras, presionando SHIFT AC; si presiona solamente AC se borra la información de la pantalla, pero no así las memorias financieras.

El siguiente esquema muestra la parte superior de la pantalla de la calculadora FC 100, que muestra los diferentes modos de operación. Para nuestro propósito, solamente utilizaremos los modos financieros (MODE 1) y flujo de caja (MODE 4).

Para hacer cálculos de interés compuesto, se cuenta con las siguientes teclas que aparecen en el cuerpo de la calculadora.

La fórmula de interés compuesto $F = P(1 + i)^n$ tiene 4 variables (P, F, *i* y *n*), de tal forma que si conocemos 3 de ellas podemos calcular la restante, para ello ingresamos el valor de las variables conocidas, en cualquier orden, y pedimos el valor de la variable desconocida oprimiendo la tecla que la distingue, oprimiendo antes la tecla COMP que significa computar o calcular, que está a la izquierda de la tecla *n*. Conviene advertir que en esta calculadora las variables se manejan en el idioma inglés. Observando las teclas del menú, aparece la tecla PMT que corresponde al valor de la cuota de una anualidad, modelo financiero que analizaremos más adelante.

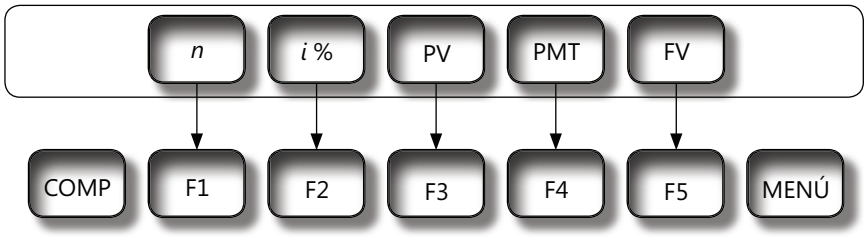
Calculadora Casio FC 200

En términos generales la operación de la calculadora financiera FC 200 es similar a la FC 100, con la diferencia de que para obtener los resultados financieros además de presionar la tecla COMP, se debe presionar la tecla EXE, que aparece de última en el cuerpo de la calculadora. Para iniciar los cálculos financieros (interés compuesto, conversión de tasas de interés, anualidades, amortizaciones), incluyendo los de evaluación de proyectos, se debe especificar el modo de operación financiero presionando la tecla MODE y el número 4. Antes de iniciar cualquier cálculo financiero es necesario borrar las memorias financieras, presionando SHIFT AC EXE AC; si presiona solamente AC se borra la información de la pantalla, pero no así las memorias financieras. Adicionalmente, se debe indicar el modo de interés con que se va a trabajar; cada vez que se presiona MODE y el número 0, la calculadora cambia entre los modos de intereses simples(S) y compuesto (C). Para nuestros cálculos financieros debemos seleccionar el modo de interés compuesto, y al seleccionarlo aparece en la pantalla el símbolo C.

Se observa en el esquema que para hacer cálculos de interés compuesto se cuenta con las mismas teclas que presenta la calculadora FC 100.

Calculadora FC 1.000

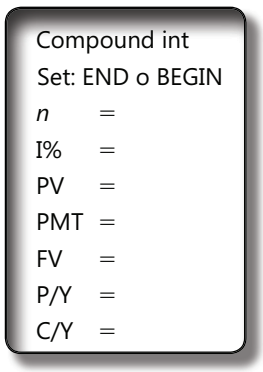
Para iniciar los cálculos financieros de interés compuesto, se oprime la tecla MENÚ y la tecla F2 (COMPOUND) y AC, y aparece el siguiente cuadro de diálogo:



Antes de iniciar cualquier cálculo financiero es necesario borrar las memorias financieras, presionando SHIFT AC EXE AC. Las teclas que aparecen en la parte inferior de la pantalla las llamaremos rótulos de menú y las que están debajo de éstas, las llamaremos teclas de menú. Existe una relación funcional entre los rótulos de menú y las teclas de menú, de tal forma que para ingresar el valor de una variable conocida, primero se presiona el valor de la variable y luego la tecla que está debajo de ella. Por ejemplo, si queremos ingresar $ 1.000.000 como valor presente, primero escribimos 1.000.000 y luego presionamos la tecla F3 que está debajo de la variable PV. Adicionalmente, se debe indicar el modo de interés con que se va a trabajar; para lo cual se oprime MODE y el número 4 para entrar a un cuadro de diálogo encabezado por MODE. Cada vez que se presiona MODE y el número 0, la calculadora cambia entre los modos de intereses simples (SMP) y compuesto (CMP). Para nuestros cálculos financieros debemos seleccionar el modo de interés compuesto, y al seleccionarlo aparece en el cuadro de diálogo ADD PERIOD: CMP.

Calculadora FC 100V y FC 200V

Para iniciar los cálculos de interés compuesto (comunes para ambos modelos) se oprime la tecla CMPD y aparece el siguiente cuadro de diálogo:



Con las flechas de la tecla REPLAY seleccionamos y se oprime EXE para ejecutarlo. Luego seleccionamos la variable que deseamos calcular y oprimimos la tecla SOLVE que se encuentra en la parte superior derecha del teclado. Se debe tener en cuenta, al configurar el cuadro de diálogo, ingresar 1 en la función P/Y y C/Y para poder ingresar la tasa periódica de la operación financiera.

Calculadora Hewlett Packard 17 B II y 19 B II

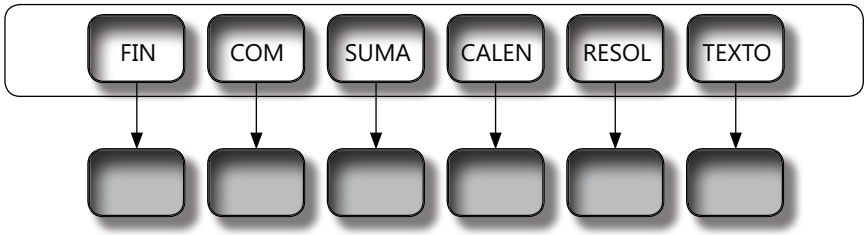
Antes de iniciar los cálculos financieros con estas calculadoras es necesario definir los parámetros básicos que orientarán la forma como se trabajará:

- Se utiliza el modo de idioma español. La calculadora puede presentar información en seis idiomas diferentes. Para cambiar el idioma, oprima la tecla anaranjada y la tecla DISP, oprima la tecla INTL y oprima E para configurar la calculadora en el idioma español.
- El menú básico usado será el financiero FIN (finanzas).
- Para el inicio de cada ejercicio se supone que se está en el menú principal (MAIN), y que la calculadora está libre de cualquier información anterior. Como norma,

cada vez que se desee hacer algún cálculo financiero, se debe borrar la información anterior por medio de CLEAR DATA, pues la calculadora tiene memoria continua.

- Para salir al menú principal basta oprimir la tecla EXIT, tantas veces como sea necesario hasta llegar a este menú, o MAIN para llegar al menú principal directamente desde cualquier menú.
- Como cualquier calculadora financiera, o científica, cada tecla puede llevar a cabo más de una función. La función marcada sobre la tecla recibe el nombre de *función primaria*, y las funciones impresas arriba de las teclas se llaman *funciones secundarias*. Las funciones secundarias se eligen presionando antes la tecla de cambio o tecla de doble función, que en estas calculadoras es la tecla de color amarillo; y para operarlas es necesario presionar primero la tecla amarilla y luego oprimir la tecla correspondiente a la función deseada.
- El lector deberá consultar en el manual del fabricante las indicaciones básicas para el manejo de la calculadora.

Menú principal (MAIN)



Entre las seis teclas de la parte superior del teclado (teclas de color gris) y los seis rótulos de la parte inferior de la pantalla existe una relación funcional. Los rótulos indican la función de las teclas. Las seis teclas se llaman *teclas de menú*; los rótulos se llaman *rótulos de menú*. Cuando se desea entrar a un menú, por ejemplo FIN, se oprime la tecla de menú que está debajo, como lo indica la flecha.

El menú main de la calculadora Hewlett Packard 17 B II y 19 B II.

El menú MAIN (menú principal), contiene las siguientes funciones:

FIN: (Finanzas)	Valor del dinero en el tiempo.
	Conversiones de tasas de interés
	Flujos de caja, tasa interna de retorno, valor presente neto
	Bonos, depreciación
COM: (Comercio)	Porcentajes comerciales
	Cambio de moneda
	Conversión de unidades
SUMA:	Estadística
CALEN:	Reloj, calendario, alarmas, aritmética con fechas

RESOL: Creación y uso de menús propios a través del registro de fórmulas.

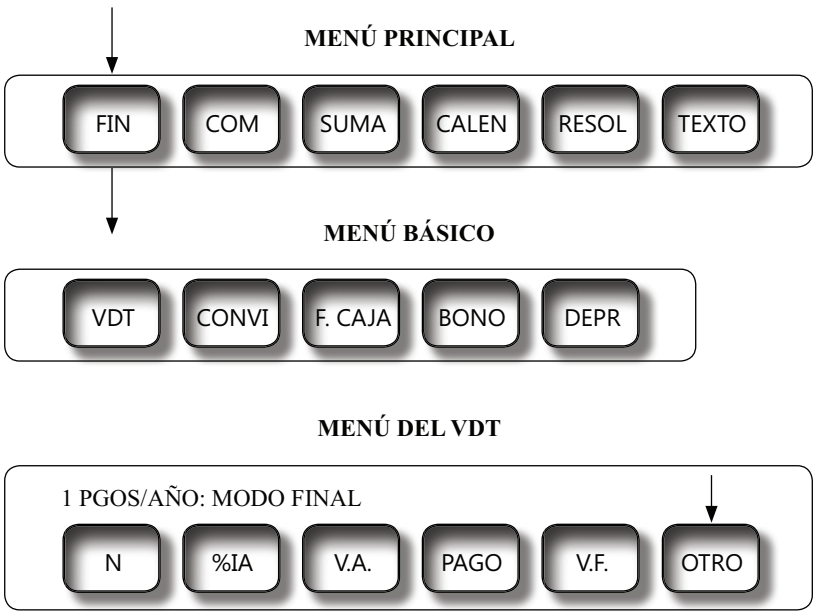
TEXTO: Almacenamiento de información textual.

Menú del VDT de la calculadora Hewlett Packard 17 B II y 19 B II

El menú del valor del dinero en el tiempo (VDT) se utiliza para realizar ciertos cálculos de interés compuesto, en particular cuando se trata de una serie de flujos de caja (dinero recibido o pagado) y:

- El valor de cada pago o ingreso es igual. Este menú se utiliza para operaciones en interés compuesto en las que intervienen un pago y un ingreso, o cuando se realiza una operación financiera con pagos o ingresos periódicos de igual valor, lo que corresponde a una serie uniforme o anualidad. En el caso de pagos o ingresos de diferentes valores se utiliza el menú F. CAJA.
- Los períodos de pago coinciden con los períodos de capitalización. Se realizan pagos mensuales a una tasa de interés mensual, pagos trimestrales a una tasa de interés trimestral.
- Al utilizar el menú VDT es necesario que las cantidades monetarias sean ingresadas a la calculadora con el signo adecuado, + (más) o − (menos), de acuerdo con la siguiente convención de signos: dinero recibido, se ingresa como valor positivo. El dinero pagado se ingresa como valor negativo. Para la calculadora financiera toda operación financiera es un flujo de caja, y no debe sorprendernos que suponga que se necesita una inversión (flujo negativo) para obtener un flujo positivo en el futuro. Si todos los flujos fueran positivos (*Bodie y Merton, 1999*), habríamos creado una máquina de hacer dinero y eso, desgraciadamente, es imposible.

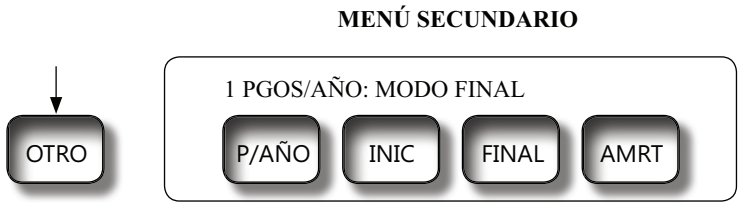
El siguiente diagrama muestra la secuencia que se debe seguir para llegar al menú VDT. La flecha indica la tecla que se debe oprimir.



Los rótulos de menú que presenta el menú VDT y que aparecen en la parte inferior de la pantalla, son los que se utilizan para realizar las operaciones en interés compuesto. Estos rótulos se describen así:

- N: número total de pagos o de períodos de capitalización. N puede expresarse en cualquier unidad de tiempo, por ejemplo: años, meses, trimestres o días.
- %IA: es la tasa nominal anual. Por ejemplo, si la operación financiera se realiza a una tasa del 3% mensual, la tasa %IA a ingresar será igual a $3\% \times 12 = 36\%$ IA.
- V.A: es el valor actual o valor presente de la operación. Corresponde a P de la notación que utilizamos en este texto.
- PAGO: valor de cada uno de los pagos iguales y periódicos que conforman una serie uniforme o anualidad. Los pagos pueden ocurrir al final o al principio de cada período.
- V.F: valor futuro o valor acumulado después de *n* períodos de pago. Corresponde a F de la notación de este texto.
- La tecla OTRO presenta un menú secundario que se utiliza para cambiar las condiciones de pago y para presentar el menú de amortización (AMRT). El menú de amortización será utilizado en el capítulo 7 dedicado a este tema. El mensaje que aparece en la parte superior de la pantalla indica el modo de pago y debe corresponder al período de capitalización de intereses: así, si la tasa de la operación es una tasa mensual, debe aparecer en la pantalla el mensaje de 12 PGOS/AÑO: MODO FINAL; si la tasa es trimestral, debe aparecer en la pantalla 4 PAGOS/AÑO: MODO FINAL.

Con el siguiente diagrama se ilustra el procedimiento para cambiar la forma de capitalización de los intereses.



Si al entrar al menú VDT aparece en la pantalla el mensaje de 12 PAGOS/AÑO: MODO FINAL, y la nueva operación financiera se va a realizar a una tasa de interés del 9% trimestral, es necesario cambiar el período de pago por 4 PAGOS/AÑO: MODO FINAL, de la siguiente manera:

- Oprima OTRO
- Ingrese 4 PAGOS/AÑO.
- Oprima EXIT para salir al menú VDT.

Este procedimiento de cambio de las condiciones de pago puede resultar engorroso, porque cada vez que se realice una operación financiera el lector debe estar atento al mensaje de la forma de pago que aparece en la parte superior de la pantalla. Sí la operación anterior estipuló una tasa de interés mensual, el mensaje debió ser 12 PGOS/

AÑO. Al realizarse una nueva operación con una tasa de interés trimestral, utilizando el procedimiento de cambio en la modalidad del pago, se debe cambiar a 4 PGOS/AÑO. Esta dificultad se puede obviar trabajando siempre con el mensaje de 1 PGOS/AÑO, pero teniendo en cuenta que la tasa de interés que se debe ingresar es la tasa periódica. Así por ejemplo, si la operación se hace con una tasa de interés del 2% mensual, debe aparecer 1 PGOS/AÑO, e ingresar 2% IA. En este texto utilizaremos la opción de 1 PGOS/AÑO, en aras de la simplicidad, por lo tanto, se le recomienda al lector dejar en forma definitiva esta composición de pagos y limitarse, cuando utilice el menú VDT, a ingresar la tasa periódica.

5.1 La hoja de cálculo EXCEL

Con el propósito de familiarizar al lector con esta herramienta computacional y con la intención de enseñar las instrucciones básicas para la construcción de una hoja de cálculo y utilizarla para hacer los cálculos propios de las matemáticas financieras, a continuación se exponen algunas de las características de la aplicación de la hoja de de cálculo EXCEL.

El término "hoja electrónica" (hoja de cálculo) proviene de las hojas verdes que algunos contadores todavía utilizan para registrar la información contable. Las formas de papel tienen pequeñas filas y columnas en las cuales se puede registrar todo tipo de datos. Básicamente una hoja de cálculo es una gran tabla con datos dispersos por toda la página, que pueden contabilizarse de alguna manera. Una hoja electrónica es un ordenamiento de filas y columnas, las cuales se intersectan para formar los pequeños cuadros a los que llamamos *celdas*. Las filas se mencionan por números y las columnas por letras. Cada celda tiene una dirección, la cual está integrada por su letra de columna y por su número de fila. Por ejemplo, la dirección de la celda E50 resulta de la intersección de la columna E con la fila 50.

Excel puede aceptar casi cualquier tipo de datos, pero lo que más nos interesa para nuestro propósito son los números y las fórmulas. Los números son los datos sin procesar que Excel necesita, los cuales se deben introducir en filas o columnas para mantenerlos en orden. Las fórmulas son entradas que le indican a Excel que desarrolle cálculos. Todas las fórmulas empiezan con un signo igual y utilizan celdas de dirección para obtener valores de otras celdas. Por ejemplo, la fórmula = A1 + D3 calcula la suma de los valores de las celdas A1 y D3. Las fórmulas se pueden introducir escribiéndolas o seleccionando las referencias de celdas. Para escribir una fórmula se procede de la siguiente forma: seleccione la celda donde quiera que aparezcan los cálculos de la fórmula, escriba el signo igual y escriba la fórmula utilizando los símbolos + (suma), − (resta), * (multiplicación), / (división) y ^ (elevar a la potencia). El programa interno de Excel está estructurado de tal forma que permite hacer todo tipo de operaciones aritméticas entre filas y columnas. Por ejemplo, si desea multiplicar el número 2 (ubicado en la celda B3) por el número 10 (ubicado en la celda C4) escriba = B3 * C4 en la celda donde usted desea que aparezca el resultado (por ejemplo, la celda D3). Sí se variara cualquiera de las cantidades en las celdas B3 y C4, la cantidad en la celda D3 cambiará automáticamente para reflejar las modificaciones realizadas.

En Excel (en español), para hacer operaciones con interés compuesto como, por ejemplo, hacer el cálculo de cada una de las variables de la fórmula básica, se utilizan las siguientes funciones:

NOTACIÓN TEXTO	SIGNIFICADO	NOTACIÓN EXCEL
P	Valor presente	VA
F	Valor futuro	VF
n	Número de períodos	NPER
i	Tasa de interés	TASA

Para calcular cada una de las variables de la fórmula del interés compuesto, basta con incluir en la celda en que queremos que aparezca el resultado, la función que se va a calcular precedido del signo = (igual) para indicar que es una fórmula. Por ejemplo, si queremos calcular el valor futuro equivalente a un valor presente, dada una tasa de interés y dado el número de períodos, se procede así: = VF y se abre paréntesis. Al abrir el paréntesis aparecen los argumentos (variables) que se deben reemplazar por los valores conocidos. De todos los argumentos que aparecen dentro del paréntesis algunos no aplican para el cálculo de la función, por lo cual se deben dejar sin valor o se le coloca el valor de cero. Cada argumento se separa de otro con un punto y coma, o coma (dependiendo como se tenga configurado el sistema operativo). Luego de ingresados los valores se oprime ENTER y aparece el resultado.

Existe otro procedimiento para calcular una variable, utilizando el cuadro de diálogo de la función *Argumentos de función,* que se abre a partir de la ventana *Insertar función* (*fx*), u oprimiendo su botón a la izquierda de la barra de fórmulas (*fx*). Sin embargo, en este texto utilizaremos el procedimiento que acabamos de describir arriba.

A continuación se resuelve una tanda de ejercicios de aplicación de la fórmula básica:

$F = P(1 + i)^n$, en los cuales se propone el cálculo de cada una de las variables que ésta contiene.

Ejemplo 3.3

Se depositan $ 1.000.000 durante un año, en una corporación que reconoce el 3% mensual. Calcular el valor acumulado al final del año.

- Con interés simple (sin reinversión de intereses)
- Con interés compuesto (con reinversión de intereses)

1. *Con interés simple:* $F = P(1 + ni)$ (2.1)

$F = 1.000.000(1 + 12 \times 0.03)$

$F = \$\ 1.360.000$

Es equivalente $ 1.000.000 hoy a $ 1.360.000 dentro de 12 meses a una tasa del 3% mensual simple.

2. *Con interés compuesto*

Aplicando la fórmula: $F = P(1 + i)^n$ (3.1)

$F = 1.000.000(1 + 0.03)^{12}$

$F = \$\ 1.425.760.88$

Son equivalentes $ 1.425.760.88 dentro de 12 meses a $ 1.000.000 en el día de hoy a una tasa de interés del 3% mensual.

La diferencia entre el valor futuro con interés simple y con interés compuesto plantea, al mismo tiempo, la diferencia entre lo que es la acumulación y la capitalización de intereses. Con interés simple, los intereses causados y no pagados se acumulan sin generar nuevos intereses. El interés compuesto supone la capitalización de los intereses no pagados y, por consiguiente, intereses sobre intereses. Visto el problema de otra forma, se podría expresar que el valor de $ 1.425.760.88 obtenido con interés compuesto está dividido en tres componentes: el capital original de $ 1.000.000, los intereses simples de 12 meses por un valor de $ 360.000, generados al aplicar la tasa del 3% sobre el capital inicial, y los intereses compuestos por valor de $ 65.760.88 que resultan de aplicarle a los intereses dejados de pagar la misma tasa de interés. Sin embargo, en la práctica poco nos interesa conocer qué parte del valor de los intereses es interés simple y qué es interés compuesto. Lo importante es comprender que el interés compuesto corrige la desvalorización que sufren los intereses con el interés simple.

A continuación presentamos el cuadro de cálculo del valor futuro utilizando los diferentes modelos de calculadoras financieras que hemos anunciado.

CASIO FC 100	CASIO FC 200	CASIO FC 1.000	CASIO FC 100V Y 200V	H.P. 17BII Y 19BII
MODE 1	MODE 4	MENÚ	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	(−) 1.000.000 PV EXE	VDT
1.000.000 +/− PV	(−) 1.000.000 PV	SHIFT AC EXE AC	3 I% EXE	CLEAR DATA
3 *i*%	3 *i*%	(−) 1.000.000 F3	12 n EXE	1.000.000 +/− VA
12 n	12 n	3 F2	0 PMT EXE	3% IA
COMP FV	COMP FV EXE	12 F1	FV SOLVE	12 N
		COMP F5		VF

En Excel: = VF (tasa; nper; pago; VA; tipo)
= VF (3%; 12; 0; −1000000)

Aquí no aplica el argumento pago, que es el valor de la cuota de una serie uniforme o anualidad, por lo tanto ingresamos un valor de cero o simplemente lo dejamos en blanco pero escribiendo el punto y coma. La tasa de interés se puede ingresar como decimal o en porcentaje. El argumento Tipo que aparece al final del paréntesis hace referencia a si es una cuota anticipada o vencida. Si la cuota es vencida se omite el valor tipo. Si es anticipada se ingresa el número 1. Este parámetro no aplica para la resolución de la fórmula del interés compuesto, por lo tanto, se omite.

Para los ejercicios siguientes obviaremos el procedimiento de la progresión geométrica en el cálculo de las variables que contiene la fórmula básica, debido a que su uso es poco frecuente y sólo pretendíamos ilustrar al lector sobre los diferentes métodos de resolución de la fórmula.

Ejemplo 3.4

Calcular el valor acumulado después de 38 días, si se depositan $ 25.000.000 en una cuenta de ahorros que reconoce el 3% mensual.

Se construye el flujo de caja.

Aplicando la fórmula:

$$F = P(1 + i)^n \qquad (3.1)$$

$$F = 25.000.000\ (1 + 0.03)^{38/30}$$

$$F = \$\ 25.953.772.49$$

La tasa de interés (*i*) y el número de períodos (n) deben estar expresados en la misma unidad de tiempo. A una tasa mensual corresponde un número de períodos mensuales. En la aplicación de la fórmula (3.1) el valor de *n*, expresado en meses, será igual a 38/30.

La pequeña diferencia observada en los resultados se debe al ajuste de los decimales.

CASIO FC 100	CASIO FC 200	CASIO FC 1.000	CASIO FC 100V Y 200V	H.P. 17BII Y 19BII
MODE 1	MODE 4	MENÚ		FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	CMPD	VDT
25.000.000 +/− PV	(−) 25.000.000 PV	SHIFT AC EXE AC	(−) 25.000.000 PV EXE	CLEAR DATA
3 *i*%	3 *i*%	(−) 25.000.000 F3	3 I % EXE	25.000.000+/− VA
38/30 n	38/30 n	3 F2	38/30 n EXE	3% IA
COMP FV	COMP FV EXE	38/30 F1	0 PMT EXE	38/30 N
		COMP F5	FV SOLVE	VF

En Excel: = VF (tasa; nper; pago; VA; tipo)

= VF (3%; 38/30; 0; −25.000.000)

Ejemplo 3.5

El señor Pérez entra a trabajar a una empresa ganando un sueldo mensual de $ 200.000 y espera recibir un aumento anual promedio del 20%. ¿Cuánto quedará ganando después de 5 años?

Cada año se incrementará el sueldo en 20% sobre el sueldo devengado el año anterior, por ello, la operación se asimila al interés compuesto. De esta manera se deben reajustar los sueldos de los empleados tanto en el sector privado como en el público; lo que sucede es que la mayoría de las veces el porcentaje de incremento anual se hace por debajo de la tasa de inflación, trayendo como consecuencia el empobrecimiento del empleado al perder poder adquisitivo, es decir, cada año comprará una cantidad menor de lo que compraba en años anteriores.

Aplicando la fórmula:

$$F = P(1 + i)^n \quad (3.1)$$

$$F = 200.000\ (1 + 0.20)^5$$

$$F = \$\ 497.664$$

CASIO FC 100	CASIO FC 200	CASIO FC 1.000	CASIO FC 100V Y 200V	H.P. 17BII Y 19BII
MODE 1	MODE 4	MENÚ		FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	CMPD	VDT
200.000 +/− PV	(−) 200.000 PV	SHIFT AC EXE AC	(−) 200.000 PV EXE	CLEAR DATA
20 *i*%	20 *i*%	(−) 200.000 F3	20 I % EXE	200.000 +/− VA
5 n	5 n	20 F2	5 n EXE	20% IA
COMP FV	COMP FV EXE	5 F1	0 PMT EXE	5 N
		COMP F5	FV SOLVE	VF

En Excel: = VF (tasa; nper; pago; VA; tipo)

= VF (20%; 5; 0; −200000)

6. Valor futuro con tasa variable

Tal como se analizó en el inciso 4, la fórmula básica $F = P(1 + i)^n$ presenta una importante limitación y es que la reinversión de los intereses a la misma tasa de interés, tal como lo plantea el factor $(1 + i)^n$, no es siempre posible en la práctica. En otras palabras, la tasa de interés para todos los períodos de cálculo no es siempre la misma. Por ejemplo, las tasas de interés que pagan los bancos por las cuentas de ahorros y los CDT_s son fluctuantes en períodos cortos de tiempo, por lo que los cálculos de rentabilidades realizados con la aplicación de la fórmula básica $F = P(1 + i)^n$ resultan ser irreales.

La fórmula para calcular el valor futuro con interés compuesto, cuando la tasa de interés para cada período proyectado es diferente, queda de la siguiente forma:

$$F = P(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3)...(1 + i_n) \quad 3.1.1$$

Siendo:

F = valor futuro

P = valor presente

i_1 = tasa de interés del primer período

i_2 = tasa de interés del segundo período

i_3 = tasa de interés del tercer período

Ejemplo 3.6

Blanca Helena desea invertir $ 2.500.000 durante 6 meses. La tasa de interés inicial que le reconocen es del 1.0% mensual. Si se espera que cada mes la tasa de interés aumente 0.20%, ¿cuánto recibirá al final del semestre?

En este caso no podemos aplicar la fórmula básica $F = P(1 + i)^n$ debido a que la tasa de interés no permanece constante, es decir, la reinversión de intereses a la misma tasa de interés supuesta en la fórmula (3.1) no se da.

Para solucionar el ejercicio partimos de la siguiente información:

P = $ 2.500.000

$i_1 = 1.00\%$, $i_2 = 1.20\%$, $i_3 = 1.40\%$, $i_4 = 1.60\%$, $i_5 = 1.80\%$, $i_6 = 2.00\%$

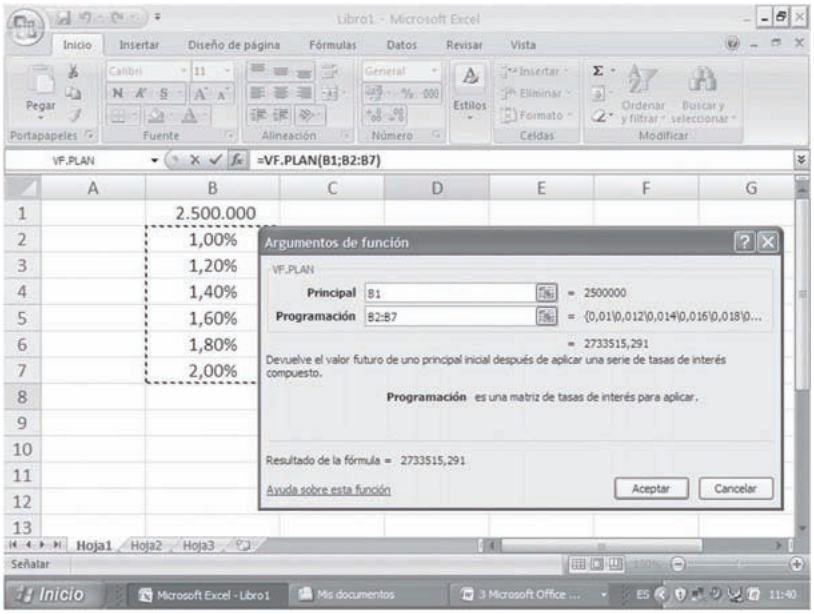
Aplicando la fórmula 3.1.1., tenemos:

F = 2.500.000 (1.010)(1.012)(1.014)(1.016)(1.018)(1.020)

F = $ 2.733.515.29

En Excel podemos hacer el cálculo directo utilizando la función VF.PLAN. Esta función sólo tiene dos argumentos: *Principal* y *Programación* (rango de tasas de interés). Para resolver el ejercicio, en la hoja de cálculo Excel registramos $ 2.500.000 en la celda B1 y en las celdas B2 hasta B7 las tasas de interés; hacemos clic en *fx* y buscamos en funciones financieras VF.PLAN, la activamos y aparece un cuadro de diálogo con dos casillas: *Principal* que corresponde al valor presente y *Programación* que corresponde al rango de tasas. En la casilla *Principal* escribimos 2.500.000 y en la casilla *Programación* escribimos el rango de tasas B2:B7 y damos aceptar. (Ver figura 3.1).

Figura 3.1



Ejemplo 3.7

Las ventas de una estación de gasolina en los últimos 2 años aumentaron así: para el primer año se incrementaron en 15% y en el segundo año 23%. Si se tuvieron ventas hace dos años por $ 50.000.000, ¿a cuánto ascienden las ventas hoy?

Las ventas no tuvieron un aumento constante en los dos años. Como se explicó en el ejercicio 3.5, los aumentos se hacen a interés compuesto (sin ser interés compuesto), es decir, sobre el valor acumulado cada año. Es necesario calcular primero el valor de las ventas para el primer año a una tasa del 15% y sobre este valor de ventas aplicar un incremento del 23% para el segundo año.

$$F_1 = 50.000.000\ (1 + 0.15\ )^1 \qquad (3.1)$$
$$F_1 = \$\ 57.500.000$$
$$F_2 = 57.500.000\ (1 + 0.23\ )^1$$
$$F_2 = \$\ 70.725.000$$

Este resultado también se obtiene si se conoce el aumento promedio de las ventas para los dos años, para lo cual es necesario apoyarse en índices de crecimiento, partiendo de un índice base (I_0) al que le asignamos un valor arbitrario, por ejemplo, 100.

$$I_0 = 100$$
$$I_1 = 115$$
$$I_2 = 141.45$$

Los índices I_1 y I_2, se obtuvieron así: $I_1 = 100 \times 1.15 = 115$

$$I_2 = 115 \times 1.23 = 141.45$$

Se observa que para el cálculo de I_1 y I_2 aplica el interés compuesto; el valor de I_1 se calcula con base en I_0 y el valor de I_2 se calcula con base en I_1.

Si se asume que $I_0 = P$ y $I_2 = F$, aplicando la expresión (3.1) calculamos la tasa de interés que corresponde al incremento promedio en los dos años.

$$F = P(1 + i)^n \qquad (3.1)$$
$$141.45 = 100(1 + i)^2$$
$$i = 18.9328\%\ \text{anual}$$

Conocida la tasa de incremento promedio en las ventas en los dos años, calculamos el valor de las ventas actuales, aplicando la expresión (3.1)

$$F = 50.000.000\ (1 + 0.189328)^2$$
$$F = \$\ 70.725.054$$

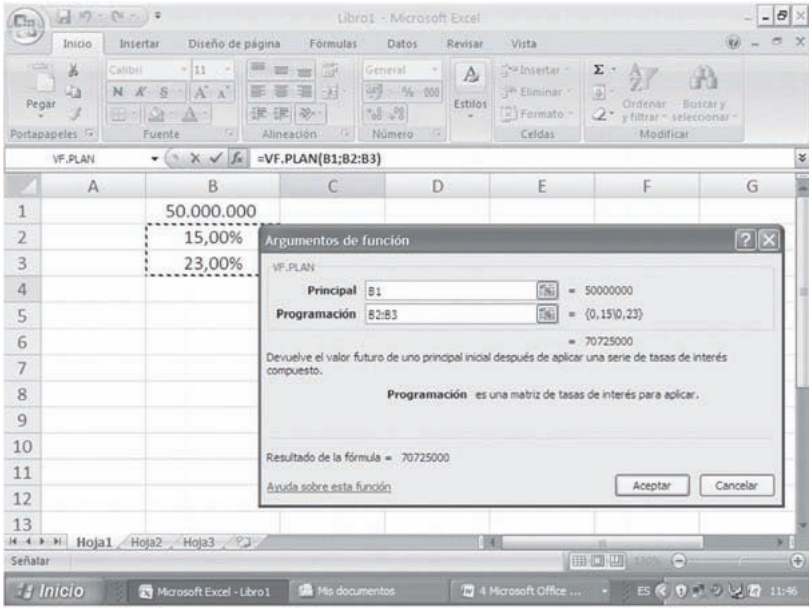
CASIO FC 100	CASIO FC 200	CASIO FC 1.000	CASIO FC 100V Y 200V	H.P. 17BII Y 19BII
MODE 1	MODE 4	MENÚ		FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	CMPD	VDT
50.000.000 +/− PV	(−) 50.000.000 PV	SHIFT AC EXE AC	(−) 50.000.000 PV EXE	CLEAR DATA
18.9328 *i*%	18.9328 *i*%	(−) 50.000.000 F3	18.9328 I % EXE	50.000.000 +/− VA
2 n	2 n	18.9328 F2	2 n EXE	18.9328% IA
COMP FV	COMP FV EXE	2 F1	0 PMT EXE	2 N
		COMP F5	FV SOLVE	VF

En Excel: = VF (tasa; nper; pago; VA; tipo)

= VF (18,9328%; 2; 0; −50.000.000)

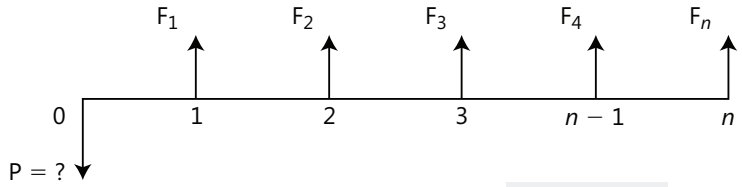
Al no ser constantes las tasas de incremento no aplica directamente la fórmula básica, como lo acabamos de apreciar en las soluciones matemáticas anteriores. Utilizando la función de Excel VF.PLAN podemos hacer el cálculo directo del valor futuro. En la hoja de cálculo Excel escribimos en la celda B1 el valor de $ 50.000.000 que corresponde al valor de las ventas y en las celdas B2 y B3 escribimos las tasas de incremento anuales; hacemos clic en F_x y activamos VF.PLAN y llenamos las casillas *Principal* con 50.000.000 y *Programación* con el rango B2:B3, damos aceptar y encontramos el valor de $ 70.725.000. (Ver figura 3.2).

Figura 3.2



7. Valor presente a interés compuesto

Consiste en calcular el valor P, equivalente hoy a una cantidad futura F, ubicada n períodos adelante (en el futuro), considerando una tasa de interés compuesta *i*. Esta operación de calcular el valor actual de un capital equivalente a lo pagado en el futuro, se presenta con mucha frecuencia en los negocios y se conoce como el procedimiento para *descontar una deuda.*



De la expresión $F = P(1 + i)^n$ (3.1) , se despeja P: $$P = \frac{F}{(1+i)^n} \qquad (3.2)$$

La fórmula (3.2) también se puede expresar en forma algebraica de la siguiente manera:

$$P = \frac{F}{(1+i)^n} = F(1+i)^{-n} \quad \text{(véase exponente negativo)}$$

El factor $(1 + i)^{-n}$ se conoce como *"factor de descuento"*.

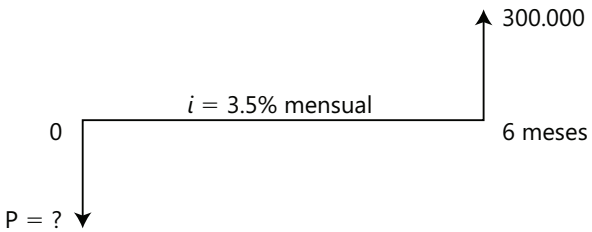
Ejemplo 3.8

El señor Pedro Picapiedra necesita disponer de $ 300.000 dentro de 6 meses para el pago de la matrícula de su hijo. Si una corporación le ofrece el 3.5% mensual, ¿cuánto deberá depositar hoy para lograr su objetivo?

$F = \$\ 300.000$ $\qquad$ $n = 6$ meses

$i = 3.5\%$ mensual $\qquad$ $P = ?$

Se construye el flujo de caja:



Aplicando la fórmula:

$$P = \frac{F}{(1+i)^n} \tag{3.2}$$

$$P = \frac{300.000}{(1+0.035)^6}$$

$$P = \$\ 244.050.19$$

El ejercicio supone que los intereses que se van causando cada mes se van capitalizando.

CASIO FC 100	CASIO FC 200	CASIO FC 1.000	CASIO FC 100V Y 200V	H.P. 17BII Y 19BII
MODE 1	MODE 4	MENÚ		FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	CMPD	VDT
300.000 +/− FV	(−) 300.000 FV	SHIFT AC EXE AC	(−) 300.000 FV EXE	CLEAR DATA
3.5 *i*%	3.5 *i*%	(−) 300.000 F5	3.5 I% EXE	300.000 +/− VF
6 n	6 n	3.5 F2	6 n EXE	3.5% IA
COMP VA EXE	COMP VA EXE	6 F1	0 PMT EXE	6 N
		COMP F3	PV SOLVE	VA

En Excel: $\qquad$ = VA (tasa; nper; pago; VF; tipo)

= VA (3,5%; 6; 0; −300.000)

Ejemplo 3.9

Un inversionista aceptó, inicialmente, recibir $ 50.000.000 después de dos años, por la venta de una propiedad. Recibe dos ofertas: Pedro y Juan le ofrecen pagarle hoy un valor equivalente, calculado así: Pedro, con una tasa del 2.0% mensual, y Juan, con una tasa del 3.0% mensual. ¿Qué oferta debe aceptar y por qué?

Oferta de Pedro:

$$P = \frac{50.000.000}{(1 + 0.02)^{24}} = \$\ 31.086.074.40$$

Oferta de Juan:

$$P = \frac{50.000.000}{(1 + 0.03)^{24}} = \$\ 24.596.686.82$$

CASIO FC 100	CASIO FC 200	CASIO FC 1.000	CASIO FC 100V Y 200V	H.P. 17BII Y 19BII
MODE 1	MODE 4	MENÚ	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	(−) 50.000.000 FV EXE	VDT
50.000.000 +/− FV	(−) 50.000.000 FV	SHIFT AC EXE AC	2 I% EXE	CLEAR DATA
2 *i*%	2 *i*%	(−) 50.000.000 F5	24 n EXE	50.000.000 +/− VF
24 n	24 n	2 F2	PMT 0 EXE	2% IA
COMP PV	COMP PV EXE	24 F1	PV SOLVE	24 N
3 *i*%	3 *i*%	COMP F3	3 I%	VA
COMP PV	COMP PV EXE	3 F2	PV SOLVE	3 I% IA
		COMP F3		VA

En Excel: = VA (tasa; nper; pago; VF; tipo)

= VA (2%; 24; 0; −50.000.000)

Para calcular el valor presente con una tasa del 3.0% mensual, cambiamos en la barra de fórmulas la tasa de interés.

Por los resultados obtenidos, el inversionista debe aceptar la propuesta de Pedro por tener un mayor valor presente. Se concluye que: *el valor presente es inversamente proporcional a la tasa de interés.*

TEMA DE INTERÉS

ACEPTACIONES BANCARIAS

Es un título valor (Letra de Cambio) que emite un banco o entidad financiera con la cual se garantizan operaciones de pagos entre un comprador y un vendedor.

Características:

Emisión: se otorga previa presentación de los documentos que reflejen una operación cierta de compra-venta de mercancías y la identificación plena del beneficiario de la misma.

Monto: se establece de acuerdo con la situación financiera y dimensiones de cada cliente.

Plazo: hasta 180 días es el más común, pero se puede expedir hasta un año en casos especiales.

Costos: se cobra una comisión por emisión y en el evento en que el cliente no cancele la aceptación en el plazo estipulado se le cobran intereses de mora.

Descuento: al ser un título valor, la aceptación bancaria puede ser vendida en el mercado secundario (Bolsa de Valores) o en la mesa de dinero del mismo banco.

En finanzas, en el proceso de valoración de activos, es de mucha aplicación el concepto del valor presente y su relación de dependencia con la tasa de interés. El valor de cualquier activo financiero (Aceptación Bancaria, Bono, CDT), un arrendamiento y, aún, un activo físico tal como un edificio o una pieza de una maquinaria, se basa en el valor presente de los flujos de efectivo que se espera que produzca tal activo (*Weston y Brigham, 1995*). Así, por ejemplo, si una persona posee una aceptación bancaria y necesita venderla en el mercado secundario (bolsa de valores), en una fecha anterior a su vencimiento a través de un comisionista de bolsa, su precio de venta viene determinado por el valor presente del valor de la aceptación bancaria a una tasa de interés de mercado pactada con el comisionista. Es evidente que este valor total dependerá de la tasa de interés porque el valor de la aceptación bancaria es fijo. Los inversionistas en activos financieros (aquellos que tienen su capital invertido en un portafolio de papeles financieros), esperan que las tasas de interés del mercado bajen para proceder a venderlos, y así, obtener un mayor precio de venta.

Ejemplo 3.10

Blanca Helena tiene una aceptación bancaria por $ 20.000.000 a 180 días y necesita negociarla faltando 72 días para su vencimiento con un comisionista de bolsa que le cobra una tasa del 18% anual. ¿Cuánto recibirá Blanca Helena?

$$P = \frac{20.000.000}{(1 + 0.18)^{\frac{72}{360}}} = \$\ 19.348.780.34$$

CASIO FC 100	CASIO FC 200	CASIO FC 1.000	CASIO FC 100V Y 200V	H.P. 17BII Y 19BII
MODE 1	MODE 4	MENÚ	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	(−) 20.000.000 FV EXE	VDT
20.000.000 +/− FV	(−) 20.000.000 FV	SHIFT AC EXE AC	18 I% EXE	CLEAR DATA
18 *i*%	18 *i*%	(−) 20.000.000 F5	72/360 n EXE	20.000.000 +/− VF
72/360 n	72/360 n	18 F2	PMT 0 EXE	18% IA
COMP PV	COMP PV EXE	72/360 F1	PV SOLVE	72/360 N
		COMP F3		VA

En Excel: = VA (18%; 72/360; 0; 20.000.000)

7.1 Valor presente con tasa variable

En forma similar a lo explicado en el estudio del valor futuro con tasa variable, inciso 6, al hacer cálculos del valor presente en la vida práctica las tasas de interés varían período a período lo que nos indica que la fórmula básica $F = P(1 + i)^n$ no es aplicable.

Para este nuevo caso la fórmula matemática es:

$$P = \frac{F}{(1 + i_1)(1 + i_2)...(1 + i_n)} \qquad (3.2.1)$$

Donde:

P = Valor Presente

F = Valor Futuro

i_1 = Tasa del primer período

i_2 = Tasa del segundo período

i_n = tasa del período *n*

Ejemplo 3.11

Un padre de familia necesita tener disponibles $ 2.000.000 dentro de 6 meses. Calcular el valor del depósito inicial si se esperan las siguientes tasas de interés para los próximos 6 meses.

MES	MES 1	MES 2	MES 3	MES 4	MES 5	MES 6
TASA	0.50%	0.60%	0,70%	0,80%	0,90%	1,00%

La solución matemática del problema es:

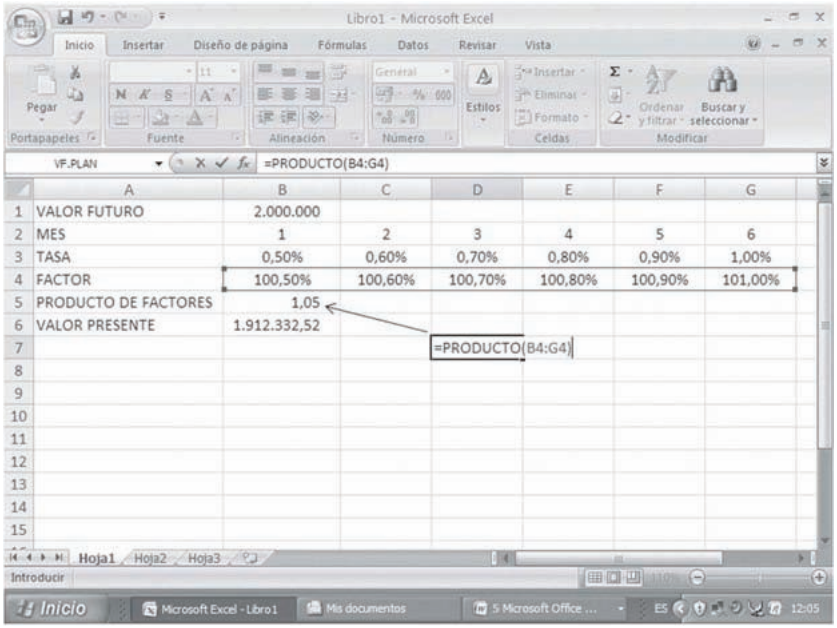
$$P = \frac{2.000.000}{(1+0.005)(1+0.006)(1+0.007)(1+0.008)(1+0.009)(1+0.01)}$$

P = $ 1.912.332.52

El Excel no trae ninguna función que resuelva el ejercicio en forma directa, sin embargo, haciendo algunas operaciones en la hoja de cálculo podemos llegar al resultado.

En la hoja de cálculo Excel, en la celda B1 escribimos $ 2.000.000 que corresponde al valor futuro. En las celdas B3 hasta G3 escribimos las tasas de interés de los 6 períodos mensuales. En las celdas B4 hasta G4 calculamos un factor para cada período mensual igual a la tasa de interés sumada más el número 1, que corresponde a cada factor del denominador de la fórmula 3.2.1; es decir, en la celda B4 escribimos = 1 + B3, en la celda C4 escribimos = 1 + C3 y así sucesivamente. Sí copiamos horizontalmente la celda B4 obtenemos el mismo resultado. En la celda B5 calculamos el producto de los factores utilizando la función PRODUCTO de Excel, para lo cual simplemente escribimos el signo igual (para indicarle al Excel que es una fórmula), escribimos PRODUCTO, abrimos paréntesis y escribimos en *número 1* el rango de factores B4:G4; esto equivale a hacer el cálculo del denominador de la fórmula 3.2.1. En la celda B6 calculamos el valor presente dividiendo el valor futuro (B1) entre el producto de los factores (B5) y obtenemos un valor de $ 1.912.332.52. (Ver figura 3.3).

Figura 3.3



8. Tasa de interés compuesta

En algunos casos se conoce la cantidad invertida y la recibida después de un número de períodos determinado, y se desea conocer la tasa de interés. Cuando sólo existe una única cantidad invertida y una cantidad única recibida, la tasa de interés se puede calcular por solución directa aplicando la ecuación básica $F = P(1 + i)^n$.

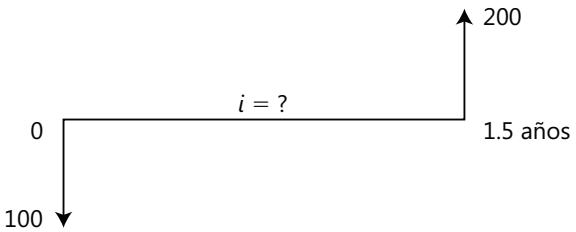
Ejemplo 3.12

Si en el día de hoy se invierten $ 100 y después de año y medio se tienen acumulados $ 200, ¿qué tasa de interés arrojó la operación?

$P = \$\ 100$ $F = \$\ 200$

$n = 1.5$ años $i = ?$

El flujo de caja es el siguiente:



Aplicando la fórmula: $F = P(1 + i)^n$ (3.1)

$$200 = 100(1 + i)^{18}$$

$$2 = (1 + i)^{18}$$

Sacando raíz 18 a ambos miembros de la igualdad, esta subsiste:

- $\sqrt[18]{2.00} = (2.00)^{\frac{1}{18}}$, que es la raíz de una potencia.
- $\sqrt[18]{(1+i)^{18}} = (1+i)$, que es la raíz de una potencia.

$$(2.00)^{1/18} = 1 + i$$

$$1.0393 = 1 + i$$

$$1.0393 - 1 = i$$

$$i = 0.0393 = 3.93\% \text{ mensual.}$$

En Excel: = TASA (nper; pago; VA; VF; tipo)

= TASA (18; 0; −100; 200)

CASIO FC 100	CASIO FC 200	CASIO FC 1.000	CASIO FC 100V Y 200V	H.P. 17BII Y 19BII
MODE 1	MODE 4	MENÚ	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	18 n EXE	VDT
100 +/− PV	(−) 100 PV	SHIFT AC EXE AC	(−) 100 PV EXE	CLEAR DATA
200 FV	200 FV	(−) 100 F3	200 FV EXE	100 +/− VA
18 n	18 n	200 F5	0 PMT EXE	200 FV
COMP *i*%	COMP *i*% EXE	18 F1	I% SOLVE	18 N
		COMP F2		%IA

Para hacer cálculos financieros utilizando la calculadora financiera se requiere que al ingresar la información se tenga en cuenta la regla de los signos: *egresos con signo negativo e ingresos con signo positivo*. Si le ingresa el valor presente y futuro con el mismo signo, la calculadora le marca error. En este ejercicio, también puede apreciar el lector la sencillez del cálculo de la tasa de interés utilizando la calculadora financiera Hewlett Packard 17 B II y 19 B II con la composición de 1 PGOS/AÑO, porque la tasa se obtiene directamente. Si se utilizara 12 PGOS/AÑO, la tasa calculada sería una tasa nominal anual, la que tendría que dividirse entre 12 para obtener la tasa mensual.

En la solución del problema se observó que al expresar el número de períodos en meses, la tasa de interés obtenida es mensual. Se conserva la condición de que: *el número de períodos y la tasa de interés deben estar expresados en la misma unidad de tiempo.*

Ahora, si se aplica la fórmula básica considerando el número de períodos anuales, se tiene:

$$F = P(1 + i)^n \quad (3.1)$$

$$200 = 100\ (1 + i)^{1.5}$$

$$2.0 = (1 + i)^{1.5}$$

Aplicando radicales a ambos miembros de la igualdad, ésta no se altera:

$$\sqrt[1.5]{2.0} = \sqrt[1.5]{(1+i)^{1.5}}$$

$$(2)^{1/1.5} = 1 + i$$

$$(2)^{0.6667} = 1 + i$$

$$1.5874 - 1 = i$$

$$i = 0.5874 = 58.74\% \text{ anual}$$

CASIO FC 100	CASIO FC 200	CASIO FC 1.000	CASIO FC 100V Y 200V	H.P. 17BII Y 19BII
MODE 1	MODE 4	MENÚ	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	(−) 100 PV EXE	VDT
100 +/− PV	(−) 100 PV	SHIFT AC EXE AC	200 FV EXE	CLEAR DATA
200 FV	200 FV	(−) 100 F3	1.5 n EXE	100 +/− VA
1.5 n	1.5 n	200 F5	0 PMT EXE	200 FV
COMP *i*%	COMP *i*% EXE	1.5 F1	I% SOLVE	1.5 N
		COMP F2		%IA

En Excel: = TASA (nper; pago; VA; VF; tipo)

= TASA (1,5; 0; −100; 200)

Observación. Una tasa del 3.93% mensual es equivalente a una tasa del 58.74% efectiva anual. Esta equivalencia se demostrará en el capítulo 4 dedicado a las tasas de interés.

9. Tiempo de negociación

Con frecuencia se hace una inversión inicial a una conocida tasa de interés con el propósito de obtener una cantidad futura determinada, y se desea conocer en cuánto tiempo se obtendrá esta cantidad futura. Desde el punto de vista matemático, se plantea el problema de la siguiente forma: conocidos el valor presente (P), el valor futuro (F) y la tasa de interés (*i*), se desea calcular el número de períodos (*n*).

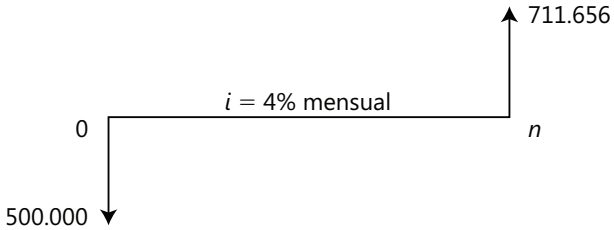
Ejemplo 3.13

Si se realiza una operación financiera con una tasa de interés del 4% mensual, ¿cuánto tiempo se debe esperar para que $ 500.000 de hoy se conviertan en $ 711.656?

F = $ 711.656 P = $ 500.000

i = 4% mensual *n* = ?

Se construye el flujo de caja:



$$F = P(1 + i)^n \qquad (3.1)$$

$$711.656 = 500.000(1 + 0.04)^n$$

$$\frac{711.656}{500.000} = \left(1 + 0.04\right)^n$$

$$1.4233 = (1 + 0.04)^n$$

La anterior es una ecuación exponencial, que se resuelve aplicando logaritmos a ambos miembros de la igualdad.

$$\text{Log } 1.4233 = n \text{ Log } 1.04 \qquad n = \frac{\text{Log } 1.4233}{\text{Log } 1.04} \qquad n = \frac{0.1533}{0.0170} \qquad n = 9 \text{ meses}$$

CASIO FC 100	CASIO FC 200	CASIO FC 1.000	CASIO FC 100V Y 200V	H.P. 17BII Y 19BII
MODE 1	MODE 4	MENÚ	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	(−) 500.000 PV EXE	VDT
500.000 +/− PV	(−) 500.000 PV	SHIFT AC EXE AC	711.656 FV EXE	CLEAR DATA
711.656 FV	711.656 FV	(−) 500.000 F3	4 I% EXE	500.000 +/− VA
4 *i*%	4 *i*%	711.656 F5	0 PMT EXE	711.656 FV
COMP n	COMP n EXE	4 F2	n SOLVE	4 I%
		COMP F1		N

En Excel: = NPER (Tasa; pago; VA; VF; tipo)

= NPER (4%; 0; −500000; 711.656)

Las calculadoras FC 200 y FC 1.000, redondean el valor de *n*, por lo tanto, para obtener su valor exacto se debe oprimir RCL *n* EXE.

Ejemplo 3.14

Se emprende hoy un negocio que da un rendimiento del 2% mensual. ¿Cuánto tiempo tomará en incrementarse la inversión en un 100%?

El ejercicio no suministra información sobre el valor de la inversión inicial, pero por la condición de que debe incrementarse en un 100%, podemos asumir valores para P y F.

P = $ 150.000 F = $ 300.000

i = 2% mensual *n* = ?

$$F = P(1 + i)^n \qquad (3.1)$$

$$300.000 = 150.000(1 + 0.02)^n$$

$$2 = (1.02)^n$$

Resolviendo la ecuación exponencial aplicando, ahora, logaritmos naturales, se tiene:

$$\text{Ln } 2 = n \text{ Ln}(1.02) \qquad n = \frac{\text{Ln } 2}{\text{Ln } 1.02} = \frac{0.6931}{0.0198} \qquad n = 35 \text{ meses}$$

Esto indica que si se realiza hoy una inversión P, con un rendimiento del 2% mensual, después de 35 meses se incrementa en un 100%.

CASIO FC 100	CASIO FC 200	CASIO FC 1.000	CASIO FC 100V Y 200V	H.P. 17BII Y 19BII
MODE 1	MODE 4	MENÚ	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	(−) 150.000 PV EXE	VDT
150.000 +/− PV	(−) 150.000 PV	SHIFT AC EXE AC	300.000 FV EXE	CLEAR DATA
300.000 FV	300.000 FV	(−) 150.000 F3	2 I% EXE	150.000 +/− VA
2 *i*%	2 *i*%	300.000 F5	0 PMT EXE	300.000 FV
COMP n	COMP n EXE	2 F2	n SOLVE	2% IA
		COMP F1		N

En Excel: = NPER (Tasa; pago; VA; VF; tipo)

= NPER (2%; 0; −150.000; 300.000)

10. Ecuaciones de valor

Es común en el mundo de los negocios que una persona decida en determinado momento, de acuerdo con su acreedor, modificar la forma de pagar una obligación que haya sido pactada inicialmente, mediante el pago de otra(s) obligación(es) en fechas diferentes con la condición de que sean equivalentes en valor a la obligación inicial.

Por ejemplo, si se recibe un préstamo (P) hoy para cancelarlo por medio de un pago en el mes 6 por valor de $ 500.000 y otro pago en el mes 12 por valor de $ 700.000, sería absurdo hacerlo hoy por $ 1.200.000 que resultaría de sumar $ 500.000 del mes 6 con $ 700.000 del mes 12. Al estar ubicados en fechas diferentes son valores de diferentes poder adquisitivo y, por lo tanto, no son comparables. Si las partes (acreedor-deudor) acuerdan hacer la operación con interés compuesto, el problema se reduciría a fijar una tasa de interés, por ejemplo el 2% mensual, y sumar el valor presente de $ 500.000 con vencimiento dentro de 6 meses con el valor presente de $ 700.000 con vencimiento dentro de un año.

$$P = \frac{500.000}{(1 + 0.02)^6} + \frac{700.000}{(1 + 0.02)^{12}}$$

$$P = \$\ 995.930{,}91$$

Al hacer esta operación se les están descontando a los valores ubicados en el futuro, el efecto de los intereses.

Para este mismo ejemplo, supongamos ahora que el deudor no dispone del dinero en efectivo para cancelar hoy $ 995.930,91 y solicita al acreedor que le permita hacer un solo pago dentro de dos años. Si la tasa de interés sigue siendo el 2,0% mensual, el valor a pagar sería:

$$F = \$\ 995.930,91(1 + 0.02)^{24} = \$\ 1.601.892.37$$

Podemos concluir que para una misma obligación se están dando tres alternativas de pago equivalentes, a saber:

$ 995.930,91 en el día de hoy

$ 500.000 dentro de 6 meses y $ 700.000 dentro de un año

$ 1.601.892.37 dentro de dos años

Situaciones similares a ésta se presentan cada día en el manejo de los créditos. Para plantear situaciones equivalentes se utilizan las ecuaciones de valor, que se apoyan en el siguiente principio financiero: ***para comparar sumas de dinero ubicadas en fechas diferentes, deberán trasladarse todas ellas a una misma fecha, denominada fecha focal***. O como lo ilustran Bodie y Merton (1999): dos cosas diferentes no se pueden comparar; y dos cantidades de dinero ubicadas en fechas diferentes, son dos cosas diferentes.

Cuando se realizan operaciones financieras con interés compuesto, la fórmula que traslada cantidades de dinero a través del tiempo a valores equivalentes es la fórmula básica $F = P(1 + i)^n$.

Cuando se calcula F, se traslada un valor presente (P) a un valor futuro equivalente y cuando se calcula P, se traslada un valor futuro (F) a un valor presente equivalente. **Calcular valores futuros es lo contrario de calcular valores presentes (Bodie Merton, 1999)**. De tal forma que, si los valores están antes de la fecha focal se trasladan a sus valores futuros equivalentes y si están después de la fecha focal se traen a sus valores presentes equivalentes.

Con la explicación anterior, podemos definir una *ecuación de valor* como una igualdad que se establece entre ingresos y egresos, ambos ubicados en una misma fecha, llamada *fecha focal*. La fecha focal es una fecha elegida en forma arbitraria, que se ubica en cualquier fecha dentro del flujo de caja y que nos permite construir una ecuación de valor.

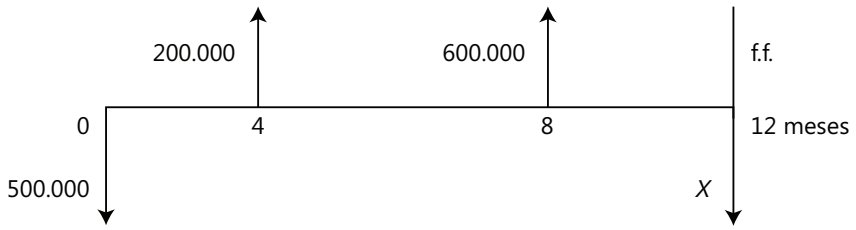
10.1 Pasos para construir una ecuación de valor

a) Se construye el flujo de caja del problema, considerando valores hacia arriba como ingresos y valores hacia abajo como egresos. En casos excepcionales no habrá ingresos, como al considerar solo gastos, en cuyo caso el valor de arriba es cero.

b) Se ubica la fecha focal en cualquier fecha dentro del flujo de caja.

c) Se trasladan los ingresos y egresos a la fecha focal aplicando la fórmula básica $F = P(1 + i)^n$ y se igualan. La ecuación resultante es la ecuación de valor. Recuérdese que valores que se encuentran antes de la fecha focal, son valores presentes con respecto a ésta, los cuales hay que trasladarlos calculando su valor futuro equivalente y valores que se encuentran después de la fecha focal son valores futuros con respecto a ésta, los cuales hay que trasladarlos calculando su valor presente equivalente.

Supongamos el siguiente flujo de caja de una operación financiera, con una tasa de interés del 2,0% mensual:



Se observa que los ingresos son diferentes a los egresos y, además, que están ubicados en fechas diferentes, por lo tanto, no son comparables. El valor de X lo podemos calcular construyendo una ecuación de valor. Para este caso ubiquemos la fecha focal en el mes 12:

$$200.000(1 + 0.02)^8 + 600.000(1 + 0.02)^4 = 500.000(1 + 0.02)^{12} + X$$

$$234.331.88 + 649.459.30 = 634.120.89 + X$$

$$X = \$\ 249.670.29$$

¿Qué sucede si se ubica la fecha focal, ahora, en el mes 8?

Se plantea la ecuación de valor de la siguiente forma:

$$200.000\left(1 + 0.02\right)^4 + 600.000 = 500.000\left(1 + 0.02\right)^8 + \frac{X}{\left(1 + 0.02\right)^4}$$

$$216.486.43 + 600.000 = 585.829.69 + 0.9238X$$

$$X = \$\ 249.670.29$$

Se observa que al modificar la fecha focal el resultado es el mismo, en consecuencia, puede seleccionarse cualquier fecha para efectuar la igualdad de las obligaciones.

De la aplicación de las ecuaciones de valor se puede plantear lo siguiente: ***lo que se debe es exactamente igual a lo que se tiene que pagar***. Si se paga de contado las cantidades (lo recibido y lo pagado) son exactamente las mismas. Si se paga a plazos las cantidades parecerán diferentes por los intereses que se pagarán, pero si esas cantidades con intereses se trasladan a una misma fecha, *la fecha focal*, las cantidades que se deben y las que se pagarán serán las mismas (Baca, 1994).

Las ecuaciones de valor se constituyen en una de las técnicas más útiles de las Matemáticas Financieras para la solución de los diversos problemas financieros.

Cualquier problema financiero que se pueda representar por medio de un flujo de caja, se resuelve con una ecuación de valor.

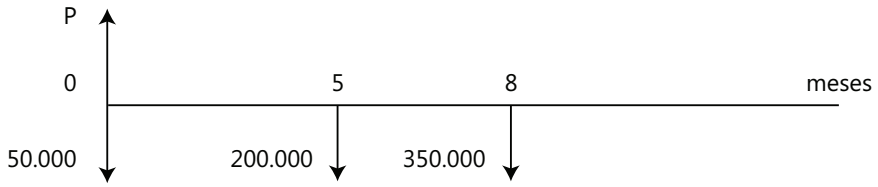
A continuación se presenta una tanda de ejercicios resueltos cuya solución se logra con una ecuación de valor. Como se comentó en un acápite anterior, en Matemáticas Financieras el primer paso y quizás el más importante para la solución de los problemas es la correcta construcción del flujo de caja, porque permite visualizar la operación que

se está realizando. En los ejercicios que el lector encontrará resueltos a continuación notará que para cada uno de ellos se construye el flujo de caja.

Ejemplo 3.15

Pablo se comprometió a cancelar una deuda con los siguientes pagos: un pago en el día de hoy por valor de $ 50.000, un pago dentro de 5 meses por valor de $ 200.000 y un pago dentro de 8 meses por valor de $ 350.000. Posteriormente, convino con el acreedor en cancelarle la deuda con dos pagos iguales en los meses 6 y 12. Calcular el valor de estos pagos, si la operación financiera se realiza con una tasa de interés del 3% mensual.

Si Pablo tiene pagos por hacer significa que adquirió una deuda inicial, que se puede calcular por medio de una ecuación de valor.



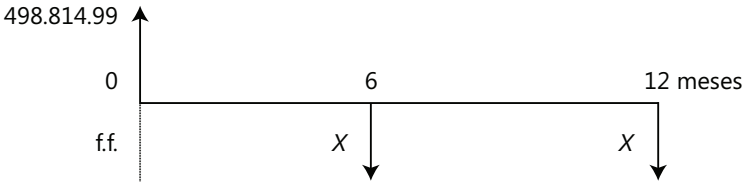
Se elige como fecha focal el período cero (fecha focal natural).

$$P = 50.000 + \frac{200.000}{(1+0.03)^5} + \frac{350.000}{(1+0.03)^8}$$

$$P = 50.000 + 172.521.76 + 276.293.23$$

$$P = \$\ 498.814.99$$

Esta deuda inicial se va a cancelar con dos pagos iguales en los meses 6 y 12:



Se escoge como fecha focal el momento cero para plantear la ecuación de valor.

$$498.814.99 = \frac{X}{(1+0.03)^6} + \frac{X}{(1+0.03)^{12}}$$

$$498.814.99 = \frac{X}{1.19405} + \frac{X}{1.42576}$$

$$498.814.99 = 0.837486X + 0.701380X$$

$$498.814.99 = 1.538866X$$

$$X = \frac{498.814.99}{1.538866}$$

$$X = \$\ 324.144.53$$

La solución dada al ejercicio plantea tres soluciones de pagos equivalentes para una misma deuda: es equivalente pagar hoy la suma de $ 498.814.99, que pagar una cuota inicial de $ 50.000 y dos pagos por $ 200.000 y $ 350.000 en los meses 5 y 8 respectivamente y que hacer dos pagos iguales en los meses 6 y 12 por valor de $ 324.144.53 cada uno.

Prueba. La deuda inicial de $ 498.814.99 transcurridos 6 meses tendrá un valor equivalente a:

$$F = 498.814.99\ (1 + 0.03)^6$$

$$F = \$\ 595.611.18$$

En el mes 6 se pagan $ 324.144.53; se quedan debiendo:

$$595.611.18 - 324.144.53 = \$\ 271.466.65$$

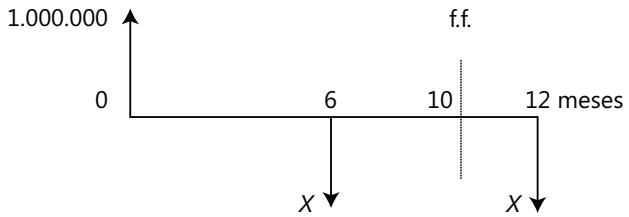
Los $ 271.466.65, transcurridos los 6 meses restantes, tendrán un valor equivalente a:

$$F = 271.466.65\ (1 + 0.03)^6$$

$F = \$\ 324.145.38 = \$\ 324.144.53$, que es lo que se paga en el mes 12.

Ejemplo 3.16

Un electrodoméstico tiene un valor de contado[2] de $ 1.000.000 y se debe financiar con dos pagos iguales en los meses 6 y 12. Hallar el valor de estos pagos, si la tasa de interés que se cobra es del 2% mensual.



Se eligió el mes 10 como fecha focal para plantear la ecuación de valor.

$$1.000.000\left(1 + 0.02\right)^{10} = X\left(1 + 0.02\right)^{4} + \frac{X}{\left(1 + 0.02\right)^{2}}$$

$$1.218.994.42 = 1.0824X + \frac{X}{1.0404}$$

$$1.218.994.42 = 1.0824X + 0.9612X$$

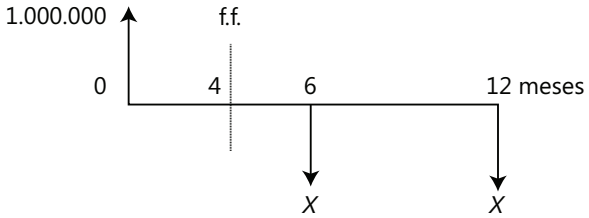
$$1.218.994.42 = 2.0436X$$

$$X = \frac{1.218.994.42}{2.0436}$$

$$X = \$\ 596.493.65$$

[2] La Superintendencia de Industria y Comercio (Colombia) expidió la resolución No 19907 del 24 de junio de 2.002, mediante la cual se reglamenta la financiación de bienes muebles y prestación de servicios. De acuerdo a la disposición, las casas comerciales tienen la obligación de suministrarle a los clientes, entre otras informaciones, el valor de contado del electrodoméstico, plazo y tasa de interés del crédito. Esta reglamentación tiene como propósito evitar que al cliente le sigan cobrando intereses por encima de los límites que establece la ley colombiana.

También podemos resolver el ejercicio eligiendo otra fecha focal, por ejemplo, el mes 4:



$$1.000.000(1+0.02)^4 = \frac{X}{(1+0.02)^2} + \frac{X}{(1+0.02)^8}$$

$$1.082.432.16 = 0.9612X + 0.8535X$$

$$1.082.432.16 = 1.8147X$$

$$X = \frac{1.082.432.16}{1.8147}$$

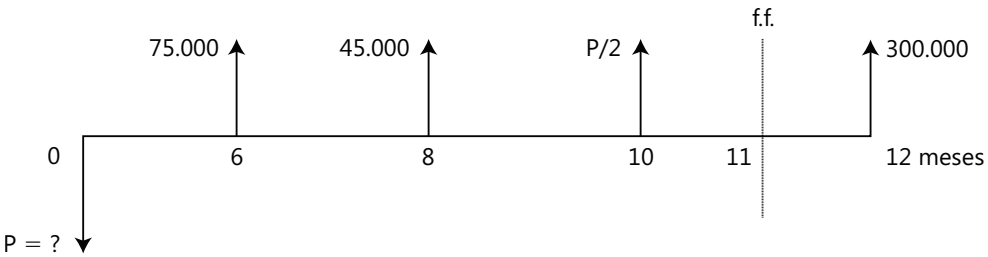
$$X = \$\ 596.493.65$$

Los resultados coinciden. No obstante, antes de resolver un ejercicio que implique formar una ecuación de valor es recomendable analizar con qué fecha focal se plantea una ecuación fácil de resolver.

Ejemplo 3.17

¿Cuánto se debe depositar hoy en una cuenta de ahorros que paga un interés del 2% mensual, para poder retirar $ 75.000 dentro de seis meses, $ 45.000 dentro de ocho meses, la mitad de lo depositado dentro de diez meses y aún se tenga un saldo de $ 300.000 dentro de 12 meses?[3]

Con fecha focal en el mes 11 se plantea la ecuación de valor.



[3] Un ejemplo similar fue formulado por Jaime García, en su libro Matemáticas Financieras.

$$P(1+0.02)^{11} = 75.000(1+0.02)^{5} + 45.000(1+0.02)^{3} + 0.5P(1+0.02)^{1} + \frac{300.000}{(1+0.02)^{1}}$$

$$1.243374\ P = 82.806.06 + 47.754.36 + 0.51\ P + 294.117.65$$

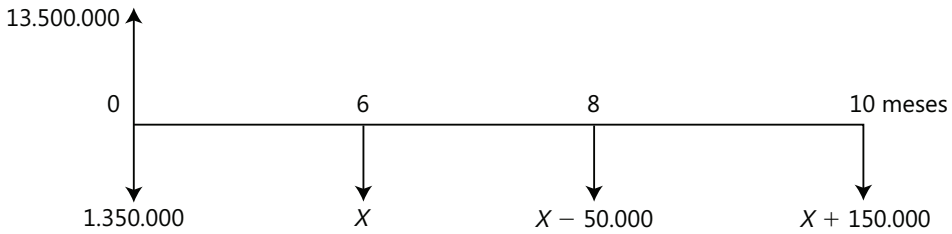
$$0.733374\ P = 424.678.07$$

$$P = \frac{424.678.07}{0.733374}$$

$$P = \$\ 579.074.35$$

Ejemplo 3.18

Un equipo que vale de contado $ 13.500.000 se va a financiar a una tasa de interés del 2% mensual por medio de una cuota inicial del 10% y tres pagos en los meses 6, 8 y 10 respectivamente, de tal forma que el segundo pago sea $ 50.000 menos que el primero y el tercer pago sea $ 200.000 más que el segundo. Calcular el valor de los pagos.



La composición de los pagos es la siguiente:

Pago en el mes 6: X

Pago en el mes 8: $X - \$\ 50.000$

Pago en el mes 10: $X - \$\ 50.000 + \$\ 200.000 = X + \$\ 150.000$

Se plantea la ecuación de valor con fecha focal en el momento cero.

$$13.500.000 = 1.350.000 + \frac{X}{(1.02)^{6}} + \frac{(X - 50.000)}{(1.02)^{8}} + \frac{(X + 150.000)}{(1.02)^{10}}$$

$$12.150.000 = 0.88797X + 0.85349(X - 50.000) + 0.82035\ (X + 150.000)$$

$$12.069.622 = 2.56181X$$

$$X = \$\ 4.711.365.01$$

Los pagos a realizar serán:

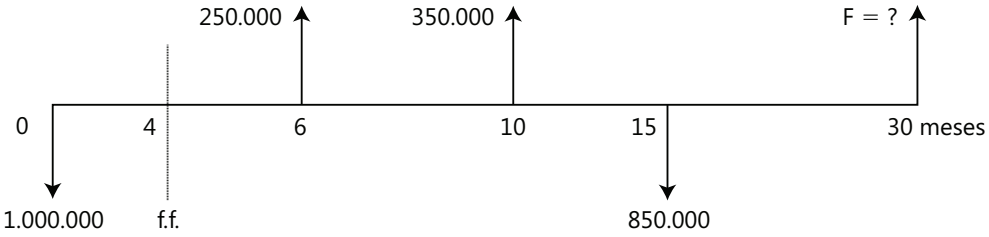
Pago en el mes 6: $ 4.711,365.01

Pago en el mes 8: $ 4.711.365.01 − $ 50.000 = $ 4.661.365.01

Pago en el mes 10: $ 4.711.365.01 + $ 150.000 = $ 4.861.365.01

Ejemplo 3.19

Un ahorrador deposita hoy la suma de $ 1.000.000 en una corporación que paga un interés del 2% mensual, retira $ 250.000 dentro de 6 meses, $ 350.000 dentro de 10 meses, hace un nuevo depósito en el mes 15 por valor de $ 850.000. ¿Qué saldo tendrá en la cuenta de ahorros dentro de 2.5 años?



Se eligió el mes 4 como fecha focal para plantear la ecuación de valor.

$$1.000.000(1+0.02)^4 + \frac{850.000}{(1+0.02)^{11}} = \frac{250.000}{(1+0.02)^2} + \frac{350.000}{(1+0.02)^6} + \frac{F}{(1+0.02)^{26}}$$

$$1.082.432.16 + 683.623.58 = 240.292.19 + 310.789.98 + 0.5976\,F$$

$$1.214.973.52 = 0.5976F$$

$$F = \frac{1.214.973.52}{0.5976}$$

$$F = \$\ 2.033.088.30$$

Prueba

Si se deposita en el día de hoy $ 1.000.000 a una tasa de interés del 2% mensual, el ahorrador tendrá en la cuenta después de 6 meses:

$$F = 1.000.000(1 + 0.02)^6$$

$$F = \$\ 1.126.162.42$$

Si en esta fecha (sexto mes), retira $ 250.000, le queda un saldo de:

$$\$\ 1.126.162.42 - \$\ 250.000 = \$\ 876.162.42$$

Este nuevo saldo gana intereses durante 4 meses, o sea, hasta el mes 10. Al final del mes 10, tendrá en la cuenta:

$$F = 876.162.42\ (1 + 0.02)^4$$

$$F = \$\ 948.386.38$$

Si en esta fecha retira $ 350.000, le queda un saldo de:

$$\$\ 948.386.38 - \$\ 350.000 = \$\ 598.386.38$$

Este nuevo saldo gana intereses del 2% mensual durante 5 meses. Al final del mes 15 tendrá un saldo de:

$$F = 598.386.38\ (1 + 0.02)^5$$

$$F = \$\ 660.666.91$$

En esta fecha deposita $ 850.000, quedando un saldo de:

$$\text{Saldo} = \$\ 660.666.91 + \$\ 850.000 = \$1.510.666.91$$

Este nuevo saldo gana intereses durante 15 meses. Al final del mes 30, tendrá un nuevo saldo a su favor de:

$$F = 1.510.666.91\ (1 + 0.02)^{15}$$

$$F = \$\ 2.033.158.76$$

Ejemplo 3.20

El señor Pedro Picapiedra tiene dos opciones para vender su casa:

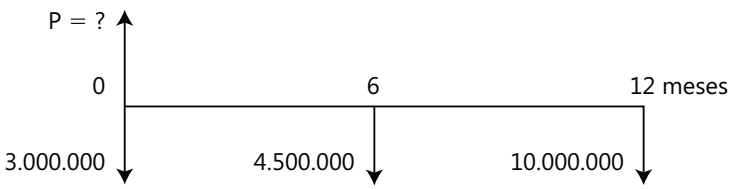
Primera opción: una cuota inicial de $ 3.000.000, un pago de $ 4.500.000 dentro de 6 meses y un pago de $ 10.000.000 dentro de 1 año.

Segunda opción: venderla de contado por $ 14.500.000.

El señor Picapiedra solicita su asesoría financiera. ¿Qué opción le recomendaría, si él está dispuesto a prestar su dinero al 3% mensual?

Comparemos las dos opciones en el presente (momento cero).

Veamos qué sucede con la primera opción: al ubicar la fecha focal en el momento cero, y al trasladar todos los valores a esta fecha, a una tasa de interés del 3% mensual, se está calculando el valor de contado para esta alternativa.



Se elige el momento cero para plantear la ecuación de valor.

$$P = 3.000.000 + \frac{4.500.000}{(1 + 0.03)^6} + \frac{10.000.000}{(1 + 0.03)^{12}}$$

$$P = 3.000.000 + 3.768.679.15 + 7.013.798.80$$

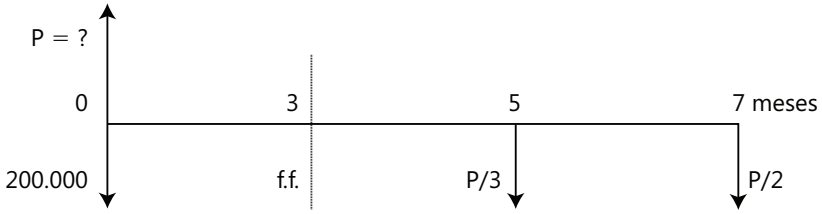
$$P = \$\ 13.782.477.95$$

Este valor indica que es equivalente vender la casa por un valor de contado de $ 13.782.477.95.

Al comparar las dos opciones de venta, el señor Picapiedra debe elegir la segunda opción.

Ejemplo 3.21

Calcular el valor de contado de un activo que financiado se paga de la siguiente forma : una cuota inicial de $ 200.000, al final del mes 5 un pago igual a la tercera parte de su valor y al final del mes 7 un pago igual a la mitad de su valor. La tasa de interés que le cobraron fue del 3% mensual.



Se plantea la ecuación de valor con fecha focal en el mes 3.

$$P(1+0.03)^3 = 200.000(1+0.03)^3 + \frac{0.3333P}{(1+0.03)^2} + \frac{0.5P}{(1+0.03)^4}$$

$$1.0927P = 218.545.40 + 0.3142P + 0.4442P$$

$$0.3343P = 218.545.40$$

$$P = \frac{218.545.40}{0.3343}$$

$$P = \$\ 653.740.35$$

El valor de contado del activo es de $ 653.740.35.

Si se comprara el activo financiado, el comprador tendría que pagar:

cuota inicial: $ 200.000

Pago dentro de 5 meses: P/3 = 653.740.35/3 = $ 217.913.45

Pago dentro de 7 meses: P/2 = 653.740.35/2 = $ 326.870.17

Los dos esquemas son equivalentes. Es equivalente pagar hoy por el activo $ 653.740.35, que pagar hoy una cuota inicial de $ 200.000, un pago dentro de 5 meses de $ 217.913.45 y un pago dentro de 7 meses de $ 326.870.17.

Prueba

Si el activo vale de contado $ 653.740.35 y se paga una cuota inicial hoy de $ 200.000, se quedan debiendo $ 453.740.35.

Este saldo de $ 453.740.35 se presta al 3% mensual durante 5 meses. Al final del tercer mes, se tendrá una deuda acumulada de:

$$F = 453.740.35(1 + 0.03)^5 = \$\ 526.009.42$$

En esta fecha se abonan $ 217.913.45, quedando un saldo de:

$$\$\ 526.009.42 - \$\ 217.913.45 = \$\ 308.095.97$$

Este saldo se presta al 3% mensual durante 2 meses. Al final del mes 7, se tiene un saldo de:

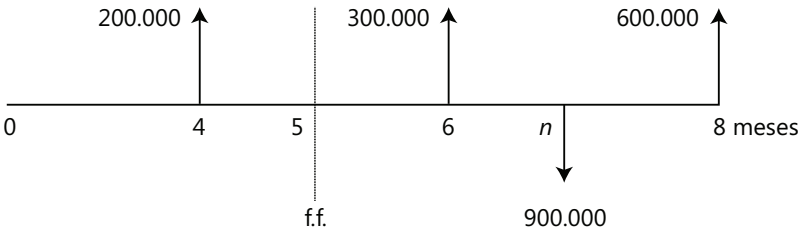
$F = 308.095.97(1 + 0.03)^2 = \$\ 326.870.01$, que es el valor que se abona al final del mes 7.

11. Cálculo de fechas desconocidas

En los ejercicios precedentes, dentro de los planes de reestructuración de créditos, se reemplazaban valores por sus equivalentes y se fijaban nuevas fechas para hacer los pagos. Algunas veces se propone cambiar los pagos pactados inicialmente por nuevos pagos conocidos, pero es necesario establecer fechas que cumplan con la equivalencia de valores. El procedimiento para calcular estas fechas se desarrolla con el mismo planteamiento de las ecuaciones de valor aplicando el teorema fundamental.

Ejemplo 3.22

Usted tiene tres documentos por cobrar así: uno por $ 200.000 dentro de 4 meses, otro por $ 300.000 dentro de 6 meses y el último por $ 600.000 dentro de 8 meses. Pacta con su deudor cambiar los tres pagos por uno de $ 900.000. Si la operación financiera se realiza con una tasa de interés del 4% mensual, ¿en qué fecha se debe pagar?



Con fecha focal en el mes 5 se plantea la ecuación de valor.

$$200.000\left(1+0.04\right)^{1}+\frac{300.000}{\left(1+0.04\right)^{1}}+\frac{600.000}{\left(1+0.04\right)^{3}}=\frac{900.000}{\left(1+0.04\right)^{n-5}}$$

$$208.000+288.461.54+533.397.81=\frac{900.000}{\left(1+0.04\right)^{n-5}}$$

$$1.029.859.35=\frac{900.000}{\left(1+0.04\right)^{n-5}}$$

$$\left(1.04\right)^{n-5}=\frac{900.000}{1.029.859.35}$$

$$(1.04)^{n-5}=0.873906$$

(véase ecuación exponencial)

$$(n-5)\ \text{Log}\ (1.04)=\text{Log}(0.873906)$$

$$n-5=\frac{\text{Log}\left(0.873906\right)}{\text{Log}\left(1.04\right)}\quad n-5=\frac{-0.058535}{0.017033}\quad n=-3.436496+5\quad n=1.5635\ \text{meses}$$

La respuesta indica que los $ 900.000, equivalentes a los tres pagos en sus respectivas fechas, se deben pagar en un mes más una fracción de 0.5635 meses. Para conocer la fecha más exacta se convierte el resultado a días, de la siguiente manera:

Si un mes tiene 30 días, ¿cuántos días tienen 0.5635 meses?

$$1 \text{ mes} \longrightarrow 30 \text{ días}$$

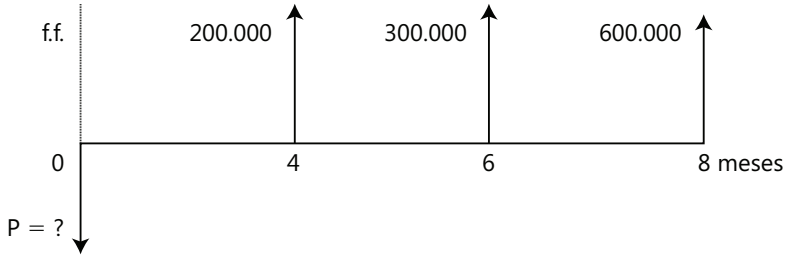
$$0.5635 \text{ mes} \longrightarrow X$$

$X = 17$ días; luego 1.5635 meses $= 47$ días

Es equivalente pagar $ 900.000 dentro de 47 días, contados a partir del momento cero, que pagar: $ 200.000 dentro de 4 meses, $ 300.000 dentro de 6 meses y $ 600.000 dentro de 8 meses.

Prueba. El tener 3 documentos por cobrar indica que existió un préstamo inicial.

Se calcula el valor del préstamo inicial equivalente a los tres pagos. Para plantear la ecuación de valor se elige como fecha focal el momento cero, como se observa en el flujo de caja.



$$P = \frac{200.000}{(1+0.04)^4} + \frac{300.000}{(1+0.04)^6} + \frac{600.000}{(1+0.04)^8}$$

$$P = 170.960.84 + 237.094.36 + 438.414.12$$

$$P = \$\ 846.469.32$$

Se traslada el valor del préstamo inicial a su valor equivalente dentro de 47 días.

$$846.469.32 = \frac{F}{(1+i)^n}$$

Se observa que la tasa de interés está expresada en forma mensual y F está ubicado en 47 días, por lo tanto, es necesario expresar los días en meses en la fórmula:

$$846.469.32 = \frac{F}{(1 + 0.04)^{\frac{47}{30}}}$$

$$846.469.32 = \frac{F}{1.063373}$$

$$F = 846.469.32 \times 1.063373$$

$$F = \$\ 900.000$$

La solución de este ejercicio plantea una situación financiera importante, porque define tres soluciones de pagos equivalentes para una misma deuda: es equivalente pagar hoy $ 846.469.32, que pagar $ 900.000 dentro de 47 días, que pagar: $ 200.000 dentro de 4 meses, $ 300.000 dentro de 6 meses y $ 600.000 dentro de 8 meses.

La fecha en la cual un conjunto de deudas, con fechas de vencimiento diferentes, puede ser pagado mediante un valor único equivalente a la suma de las distintas deudas, se llama *fecha equivalente*. El tiempo que debe transcurrir desde el momento actual hasta la fecha equivalente se conoce como *tiempo equivalente* (*Vidaurri, 1997*).

Ejemplo 3.23

Calcular el tiempo equivalente[4] para el siguiente conjunto de obligaciones:

$ 200.000 a pagar dentro de 4 meses

$ 500.000 a pagar dentro de 6 meses

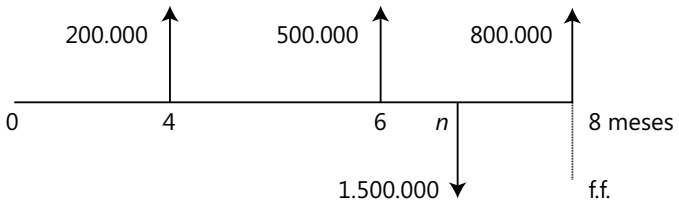
$ 800.000 a pagar dentro de 8 meses

La tasa de interés es del 4% mensual.

El problema consiste en encontrar el tiempo en el cual es equivalente cancelar $ 1.500.000 a cancelar las tres obligaciones en sus fechas respectivas. Al plantearse una serie de obligaciones como la del ejercicio, es común que personas sin formación financiera expresen que el valor total pagado es la suma de los valores nominales de las obligaciones, desconociendo que son valores diferentes ubicados en diferentes fechas y, por lo tanto, no son comparables. Para este caso, es un error decir que al cancelarse las 3 obligaciones en sus fechas respectivas, se han cancelado $ 1.500.000. Miremos con el resultado obtenido al desarrollar una ecuación de valor, en qué fecha es equivalente cancelar $ 1.500.000 a cancelar las 3 obligaciones en sus fechas correspondientes.

[4] Algunos autores denominan *vencimiento medio* al tiempo equivalente.

En el flujo de caja siguiente, las obligaciones iniciales se indican con flechas hacia arriba y el valor que las reemplaza, con flecha hacia abajo.



$$200.000(1.04)^4 + 500.000\ (1.04)^2 + 800.000 = 1.500.000\ (1.04)^{8-n}$$

$$233.971.71 + 540.800 + 800.000 = 1.500.000\ (1.04)^{8-n}$$

$$(1.04)^{8-n} = 1.0498$$

La anterior es una ecuación exponencial, que se resuelve aplicando logaritmos:

$$(8 - n)\ \text{Log}(1.04) = \text{Log}(1.0498)$$

$$(8 - n) = \frac{\text{Log}(1.0498)}{\text{Log}(1.04)}$$

$$8 - n = 1.2391$$

$$n = 6.76 \text{ meses}$$

El resultado indica que aproximadamente en 6.8 meses es equivalente cancelar $ 1.5000.000 a cancelar las tres obligaciones en las fechas indicadas. Si se desea obtener un resultado más claro y exacto, se expresan los meses en días, haciendo los siguientes cálculos:

6.76 meses = 6 meses + 0.76 meses

6.76 meses = 180 días + 23 días (30 días × 0.76) = 203 días

El tiempo equivalente para el pago de un conjunto de deudas se puede calcular en una forma aproximada aplicando la siguiente regla, la cual se anunciará sin demostración (*Vidaurri, 1997*): *el tiempo equivalente es aproximadamente igual a la suma de los productos obtenidos al multiplicar el valor de las obligaciones por sus respectivos plazos y dividiendo este resultado por la suma de los valores de las obligaciones.* Esto es, si F_1, F_2, F_3...F_n son los valores de las obligaciones, y n_1, n_2, n_3,... n_n son los plazos correspondientes, entonces el tiempo equivalente, n, viene dado por:

$$n = \frac{F_1 n_1 + F_2 n_2 + F_3 n_3 + \ldots + F_n n_n}{F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n}$$

Reemplazando los valores del ejercicio, se tiene:

$$n = \frac{200.000 \times 4 + 500.000 \times 6 + 800.000 \times 8}{200.000 + 500.000 + 800.000} = 6.80 \text{ meses}$$

Este resultado es bastante aproximado al que se obtuvo arriba planteando la ecuación de valor, lo que demuestra la validez de la fórmula.

Supongamos ahora que se propone cambiar las tres obligaciones por un valor equivalente de $ 1.400.000. En este caso, el valor equivalente no es la suma de los valores nominales de las tres obligaciones, por lo tanto, no aplica la regla anterior. La solución se logra por medio de una ecuación de valor.

Tomando como fecha focal el mes 8, se tiene:

$$200.000(1.04)^4 + 500.000(1.04)^2 + 800.000 = 1.400.000(1.04)^{8-n}$$

$$1.574.771.71 = 1.400.000\ (1.04)^{8-n}$$

$$1.1248 = (1.04)^{8-n}$$

Resolviendo la ecuación exponencial por logaritmos, se tiene:

$$\text{Log } 1.1248 = (8 - n)\ \text{Log } 1.04$$

$$(8 - n) = \frac{\text{Log } 1.1248}{\text{Log } 1.04}$$

$$(8 - n) = \frac{0.0511}{0.0170}$$

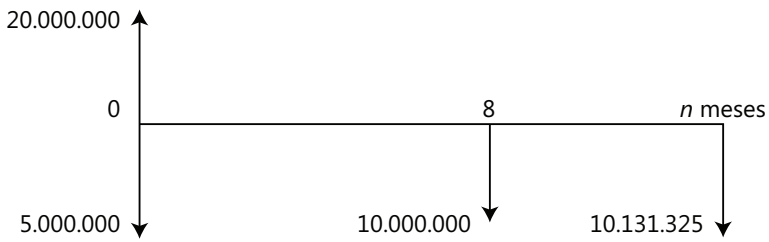
$$(8 - n) = 3$$

$$n = 5 \text{ meses}$$

Este tiempo equivalente en el que el valor nominal de la nueva obligación es diferente a la suma de los valores nominales de las obligaciones que se desean reemplazar, se denomina *vencimiento común*. Se infiere de los resultados obtenidos, que es equivalente cancelar $200.000, $ 500.000 y $ 800.000 en los meses 4, 6 y 8 respectivamente, a cancelar $ 1.500.000 dentro de 203 días, a cancelar $ 1.400.000 dentro de 5 meses.

Ejemplo 3.24

El señor Pedro Picapiedra compra una casa por $ 20.000.000 y se compromete a pagarla de la siguiente forma: una cuota inicial de $ 5.000.000, un pago de $ 10.000.000 dentro de 8 meses y un último pago por valor de $ 10.131.325. Si le cobran el 3% mensual, calcular la fecha de este pago.



Se escoge como fecha focal el momento cero (fecha focal natural).

$$20.000.000 = 5.000.000 + \frac{10.000.000}{(1+0.03)^{8}} + \frac{10.131.325}{(1+0.03)^{n}}$$

$$15.000.000 = 7.894.092.34 + \frac{10.131.325}{(1.03)^{n}}$$

$$7.105.907.66 = \frac{10.131.325}{(1.03)^{n}}$$

$$(1.03)^{n} = \frac{10.131.325}{7.105.907.66}$$

$$(1.03)^{n} = 1.425761$$

$$n \text{ Log } (1.03) = \text{Log } 1.425761$$

$$n \times 0.012837 = 0.154047$$

$$n = \frac{0.154047}{0.012837}$$

$n = 12$ meses a partir del momento cero.

Prueba. En el momento cero (hoy) el señor Pedro Picapiedra está debiendo $ 15.000.000.

Dentro de 8 meses estará debiendo: $F = \$ 15.000.000 (1 + 0.03)^{8}$

$$F = \$ 19.001.551$$

En esta fecha paga $ 10.000.000, luego quedará debiendo:

$$19.001.551 - 10.000.000 = \$ 9.001.551$$

Dentro de 4 meses más (mes 12) estará debiendo: $F = 9.001.551(1 + 0.03)^{4}$

$$F = \$ 10.131.325$$

En esta fecha cancela este mismo valor quedando un saldo de 0.

Al resolver ejercicios que requieran el cálculo de una fecha desconocida, se pueden obtener tres respuestas diferentes: si *n* es un número mayor de 0, significa que el pago propuesto se debe realizar en la fecha obtenida, contada a partir del momento cero. Si *n* es menor de cero, significa que con ese pago no existe equivalencia entre la situación planteada inicialmente y la propuesta. Y cuando *n* es igual a cero, significa que el pago se debe hacer en el momento cero, lo que equivaldría al pago de una cuota inicial.

Ejemplo 3.25

Usted le debe hoy a un amigo $ 10.000.000 al 2.5% mensual y al mismo tiempo a usted le deben $ 8.000.000, prestados al 2.8% mensual. ¿En qué tiempo logrará tener el dinero suficiente para pagarle al amigo?

Se podrá cancelar la deuda cuando el valor futuro de lo que debe sea igual al valor futuro de lo que tiene prestado.

$$F_1 = 10.000.000\ (1 + 0.025)^n$$

$$F_2 = 8.000.000\ (1 + 0.028)^n$$

$$F_1 = F_2 \Rightarrow 10.000.000\ (1 + 0.025)^n = 8.000.000(1.028)^n$$

$$1.25 = \frac{(1.028)^n}{(1.025)^n}$$

El segundo miembro de la igualdad es el cociente de potencias de diferentes bases y el mismo exponente, que se resuelve de la siguiente manera:

$$\frac{(1.028)^n}{(1.025)^n} = \left(\frac{1.028}{1.025}\right)^n \qquad 1.25 = (1.0029)^n$$

La anterior es una ecuación exponencial que la resolvemos aplicando logaritmos.

$$\text{Log } 1.25 = n \text{ Log } (1.0029) \qquad n = \frac{\text{Log}(1.25)}{\text{Log}(1.0029)} \qquad n = 76.27 \text{ meses}$$

12. Ecuaciones de valor con *BUSCAR OBJETIVO* de Excel

Buscar objetivo es una herramienta de Excel que resuelve una ecuación de primer grado con una incógnita. Se utiliza para hallar el valor de una variable específica incluida en una fórmula, igualando ésta última a un resultado determinado que generalmente es cero.

Las ecuaciones que resuelven los problemas de las Matemáticas Financieras son precisamente ecuaciones de este orden, por lo tanto, los podemos resolver aplicando correctamente *Buscar objetivo* y construyendo la tabla de amortización del crédito. Para que el lector pueda asimilar esta nueva herramienta con una mayor coherencia, le daremos solución a los ejemplos de ecuaciones de valor que fueron resueltos en este capítulo, en páginas anteriores.

Referencias relativas y referencias absolutas

En Excel, al escribir fórmulas que posteriormente se vayan a copiar, es importante definir el tipo de referencia en las direcciones de las celdas. Normalmente el Excel trabaja con direcciones relativas cuya notación se crea tecleando la letra de la columna seguida del número de la fila. Por ejemplo, si se escribe 100 en la celda A1 esta es una referencia relativa, que indica que el valor de 100 está en la celda que intercepta la columna A con la fila 1. Pero al copiar esta referencia en otra celda, el Excel la ajusta a la nueva posición de la fórmula. (Ver figura 3.4).

Hoja de cálculo Excel

Figura 3.4

	A	B	C
1	10.000.000	3.00%	REFERENCIA RELATIVA
2			=A1*B1
3			=A2*B2
4			=A3*B3
5			=A4*B4

En la celda C2 escribimos la fórmula = A1*B1 que multiplica 10.000.000 (A1) por la tasa de interés del 3.00% (B1). En la celda C2 obtenemos un resultado de $ 300.000. Pero al copiar esta fórmula en las celdas C3, C4 y C5 observamos que el resultado en estas celdas es cero, debido a que el Excel ajusta las referencias relativas a la nueva posición de la fórmula. Es decir, al copiar A1*B1 de la celda C2 a la celda C3 el Excel ajusta las dirección relativa de la celda a A2*B2 y así sucesivamente. (Ver figura 3.4).

En muchos casos, cuando se hacen cálculos en Excel, al copiar una fórmula se requiere conservar la referencia de una celda, es decir, mantener constante el valor de la celda. En este caso se utiliza la referencia absoluta, para lo cual se escribe el signo pesos antes y después de la letra de la columna, o, simplemente, se coloca el cursor antes de la letra de la columna y se oprime F4. (Ver figura 3.5).

Hoja de cálculo Excel

Figura 3.5

	A	B	C
1	10.000.000	3.00%	REFERENCIA ABSOLUTA
2			=A1*$B$1
3			=A2*$B$1
4			=A3*$B$1
5			=A4*$B$1

Al copiar la fórmula A1*B1 en las celdas C3, C4 y C5 se mantiene constante el valor de la celda B1.

Amortización

La amortización financiera se define como el proceso por medio del cual se cancela una deuda, junto con sus respectivos intereses, mediante una serie de pagos en un tiempo determinado. La palabra amortización proviene del latín *mors*, que significa muerte, por lo tanto, la amortización es el proceso con el que se *mata* una deuda. En términos concretos, amortizar una deuda es pagarla con sus respectivos intereses.

Composición de los pagos

Por lo general, cada cuota de pago que amortiza una deuda tiene dos componentes: *interés y abono al capital.* Existen casos especiales en los cuales al principio del plazo del crédito las cuotas periódicas no cubren el valor de los intereses y, entonces, el saldo del crédito aumenta; ejemplo de estos casos fueron los sistemas de amortización de los créditos de vivienda en el sistema UPAC y algunos sistemas de pago de largo plazo que consideran cuotas crecientes cada período.

Tabla de amortización

Al diseñar un plan de amortización de una deuda se acostumbra construir la tabla de amortización, que registra período a período la forma como se va pagando la deuda. Una tabla de amortización debe contener como mínimo 5 columnas: la primera muestra los períodos de pago, la segunda muestra el valor de la cuota periódica, la tercera el valor de los intereses, la cuarta muestra el abono a capital y la quinta columna muestra el saldo de la deuda cada período. (Ver figura 3.6).

Figura 3.6

No.	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO

A continuación resolvemos los ejemplos de ecuaciones de valor desarrollados en este capítulo, utilizando *Buscar objetivo* de Excel.

Ejemplo 3.26

Pablo se comprometió a cancelar una deuda con los siguientes pagos: un pago en el día de hoy por valor de $ 50.000, un pago dentro de 5 meses por valor de $ 200.000 y un pago dentro de 8 meses por valor de $ 350.000. Posteriormente convino con el acreedor en cancelarle la deuda con dos pagos iguales en los meses 6 y 12. Calcular el valor de estos pagos, si la operación financiera se realiza con una tasa de interés del 3% mensual.

En primer lugar calculamos el valor de la deuda en el momento cero. Este cálculo lo vamos a realizar con la ayuda de *Buscar objetivo* apoyándonos en una tabla de amortización de la deuda.

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

Figura 3.7

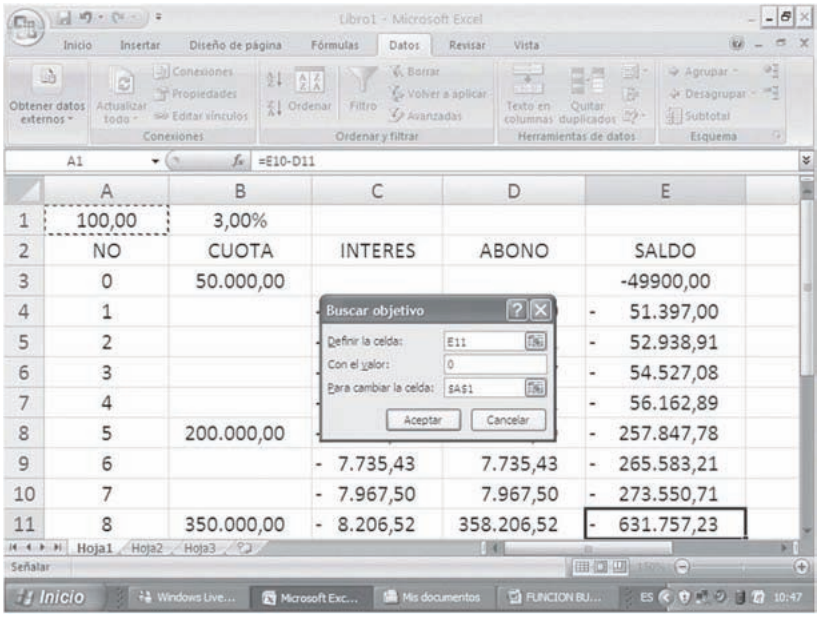
	A	B	C	D	E
1	100	3.00%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	50.000			=A1−B3
4	1	0	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	0			
6	3	0			
7	4	0			
8	5	200.000			
9	6	0			
10	7	0			
11	8	350.000			

En la celda A1 escribimos un valor arbitrario de 100 (siempre la incógnita tiene que ser un número), que es la incógnita del problema y corresponde al valor de la deuda, y en la celda B1 escribimos la tasa de interés del 3.00% mensual. En la fila 2 anotamos los elementos constitutivos de una tabla de amortización (ver figura 3.7). En la celda B3 registramos el pago inicial de $ 50.000, en la celda B8 registramos el pago de $ 200.000 y en la celda B11 registramos el pago de $ 350.000; en las períodos en los cuales no hay pagos escribimos el número cero (el Excel ignora la celda que no contenga algún valor). En la celda C4 calculamos los intereses multiplicando el saldo inicial (E3) por la tasa de interés (B1 con referencia absoluta), en la celda D4 calculamos el abono a capital restando de la cuota (B4) el valor de los intereses (C4) y en la celda E4 calculamos el saldo al final del período restando del saldo anterior (E3) el abono a capital (D4). Este procedimiento de cálculo de intereses, abono a capital y saldo es igual para cualquier sistema de amortización. (Ver figura 3.7).

Para completar las celdas en blanco (rango C5:E11) copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 hasta C11, D11 y E11. Hacemos clic en C4 y barremos hasta E4 y soltamos el ratón; aparece en la esquina inferior de la celda E4 un pequeño cuadro llamado *controlador de relleno*. Al colocar el puntero del ratón en el cuadro toma la forma de una cruz. Arrastre la cruz sobre las celdas que desea rellenar y luego suelte el botón del ratón. Se observa que la tabla de amortización resultante está desajustada porque el saldo final, para que una deuda se amortice, debe ser igual a cero. El ajuste de la tabla de amortización y el cálculo de la incógnita del ejercicio (valor de A1), que corresponde al valor inicial de la deuda lo logramos con *Buscar objetivo*. Hacemos clic en DATOS y en Análisis Y si, y en *Buscar objetivo* (en el caso de utilizar Excel 2.003 haga clic en Herramientas y clic en *Buscar objetivo*) y aparece un cuadro diálogo que tenemos que rellenar. En la casilla *Definir celda* se indica la celda que queremos tome cierto valor, en este caso la celda E11 que corresponde al saldo final; en la casilla *Con el valor* se indica el valor que se desea tome la casilla anterior, en este caso un valor de cero para

que la obligación se amortice, y en la casilla *Para cambiar la celda* se indica la celda que debe tomar un valor, que en este caso es la celda A1 que es la incógnita y corresponde al valor de la deuda. Se oprime aceptar y el programa hace iteraciones hasta que aparece el mensaje *La búsqueda con la celda E11 ha encontrado una solución* y hacemos clic en aceptar. En la tabla de amortización definitiva aparece en la celda A1 un valor de $ 498.814.99 que corresponde al valor del activo. (Ver figura 3.8).

Figura 3.8



	A	B	C	D	E
1	100,00	3,00%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	50.000,00			-49900,00
4	1				- 51.397,00
5	2				- 52.938,91
6	3				- 54.527,08
7	4				- 56.162,89
8	5	200.000,00			- 257.847,78
9	6		- 7.735,43	7.735,43	- 265.583,21
10	7		- 7.967,50	7.967,50	- 273.550,71
11	8	350.000,00	- 8.206,52	358.206,52	- 631.757,23

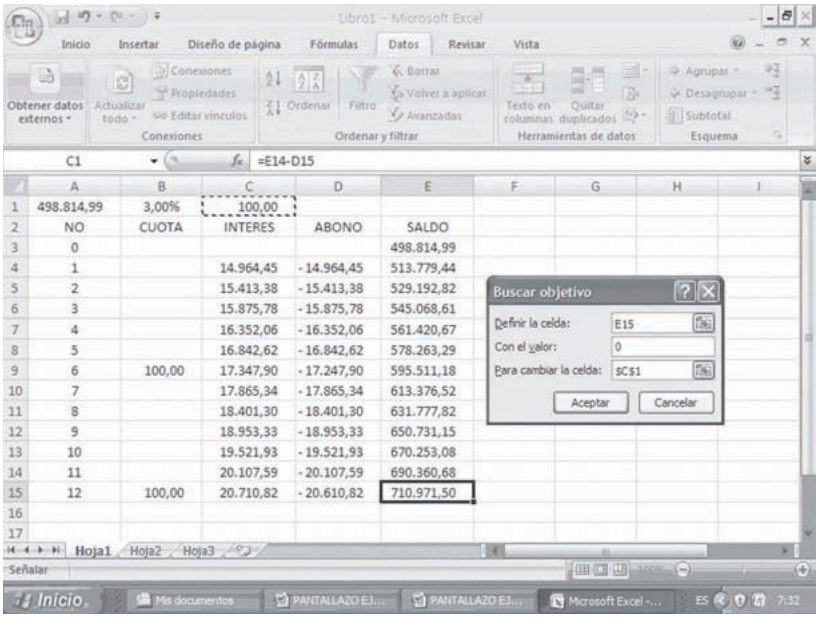
Este valor de $ 498.814.99 corresponde al valor inicial de la deuda, el cual se va a cancelar con dos pagos iguales en los meses 6 y 12.

Para calcular el valor de las dos cuotas iguales que amortizan la deuda de $ 498.814.99 construimos una nueva tabla de amortización. (Ver figura 3.9).

En la celda A1 registramos 498.814.99 como valor de la deuda, en B1 la tasa de interés del 3.00% y en C1 escribimos un valor arbitrario de 100, como la incógnita del ejercicio. En la celda B9 y B15 escribimos = C1 y procedemos a completar la tabla de amortización con el procedimiento descrito anteriormente. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, abono a capital y saldo al final del período.

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicando *Buscar objetivo* obtenemos en la celda C1 un valor de $ 324.144.53, que corresponde al valor de las cuotas en los meses 6 y 12. (Ver figura 3.9).

Figura 3.9



	A	B	C	D	E
1	498.814,99	3,00%	100,00		
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				498.814,99
4	1		14.964,45	-14.964,45	513.779,44
5	2		15.413,38	-15.413,38	529.192,82
6	3		15.875,78	-15.875,78	545.068,61
7	4		16.352,06	-16.352,06	561.420,67
8	5		16.842,62	-16.842,62	578.263,29
9	6	100,00	17.347,90	-17.247,90	595.511,18
10	7		17.865,34	-17.865,34	613.376,52
11	8		18.401,30	-18.401,30	631.777,82
12	9		18.953,33	-18.953,33	650.731,15
13	10		19.521,93	-19.521,93	670.253,08
14	11		20.107,59	-20.107,59	690.360,68
15	12	100,00	20.710,82	-20.610,82	710.971,50

Ejemplo 3.27

Un electrodoméstico tiene un valor de contado de $ 1.000.000 y se debe financiar con dos pagos iguales en los meses 6 y 12. Hallar el valor de estos pagos, si la tasa de interés que se cobra es del 2% mensual.

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

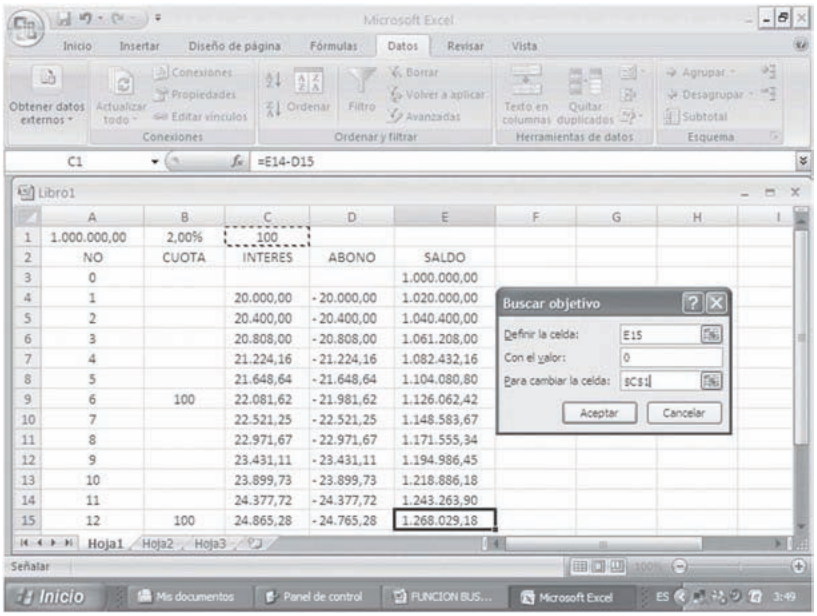
Figura 3.10

	A	B	C	D	E
1	1.000.000	2.00%	100		
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1		=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
.....	.....	.....	.....	.....	.....
9	6	=C1			
10	7				
.....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12	=C1			

En la celda A1 registramos 1.000.000 como valor del electrodoméstico, en la B1 la tasa de interés del 2.00% y en la C1 un valor arbitrario de 100. En la celda B9 y B15 escribimos = C1 y procedemos a completar la tabla de amortización. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, abono a capital y saldo insoluto. (Ver figura 3.10).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicando *Buscar objetivo* obtenemos en C1 un valor de $ 596.493.65. (Ver figura 3.11).

Figura 3.11



	A	B	C	D	E
1	1.000.000,00	2,00%	100		
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				1.000.000,00
4	1		20.000,00	-20.000,00	1.020.000,00
5	2		20.400,00	-20.400,00	1.040.400,00
6	3		20.808,00	-20.808,00	1.061.208,00
7	4		21.224,16	-21.224,16	1.082.432,16
8	5		21.648,64	-21.648,64	1.104.080,80
9	6	100	22.081,62	-21.981,62	1.126.062,42
10	7		22.521,25	-22.521,25	1.148.583,67
11	8		22.971,67	-22.971,67	1.171.555,34
12	9		23.431,11	-23.431,11	1.194.986,45
13	10		23.899,73	-23.899,73	1.218.886,18
14	11		24.377,72	-24.377,72	1.243.263,90
15	12	100	24.865,28	-24.765,28	1.268.029,18

Ejemplo 3.28

¿Cuánto se debe depositar hoy en una cuenta de ahorros que paga un interés del 2% mensual, para poder retirar $ 75.000 dentro de 6 meses, $ 45.000 dentro de 8 meses, la mitad de lo depositado dentro de 10 meses y aún se tenga un saldo de $ 300.000 dentro de 12 meses?

Solución con *Buscar objetivo* de Excel. Punto de vista del banco

Figura 3.12

	A	B	C	D	E
1	100	2.00%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1		=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2				
.....	.....	.....	.....	.....	.....
8	5				
9	6	75.000			
10	7				
11	8	45.000			
12	9				
13	10	=A1/2			
14	11				
15	12	300.000			

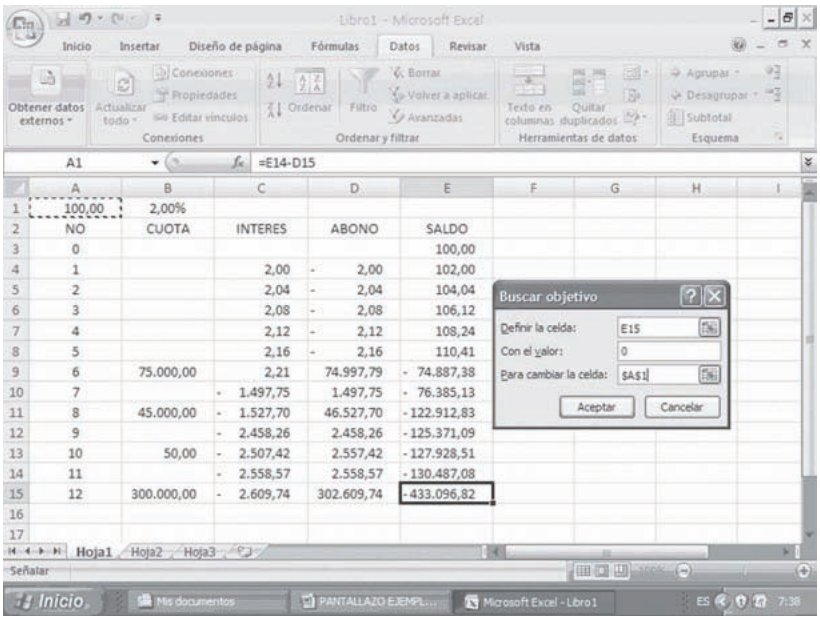
Una operación financiera constituye una inversión para el prestamista y un préstamo para el prestatario. Existirá, por lo tanto, un flujo de caja equivalente para ambos actores.

En este caso realizaremos la operación financiera desde el punto de vista del prestatario quien recibe un préstamo y tiene que amortizarlo.

En la celda A1 escribimos un valor arbitrario de 100 que corresponde al valor del depósito inicial y en B1 registramos la tasa de interés del 2.00%. En la celda B9 registramos el valor del retiro por valor de $ 75.000, en B11 el retiro por valor de $ 45.000, en la B13 registramos el retiro por la mitad del valor depositado escribiendo = A1/2 (A1 es el valor inicial depositado que vamos a calcular y al que le hemos dado un valor arbitrario de 100) y en la celda B15 registramos el saldo final por valor de $ 300.000. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, abono a capital y saldo insoluto. (Ver figura 3.12).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicando *Buscar objetivo* obtenemos en A1 un valor de $ 579.074. (Ver figura 3.13).

Figura 3.13



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	100,00	2,00%							
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO				
3	0				100,00				
4	1		2,00	- 2,00	102,00				
5	2		2,04	- 2,04	104,04				
6	3		2,08	- 2,08	106,12				
7	4		2,12	- 2,12	108,24				
8	5		2,16	- 2,16	110,41				
9	6	75.000,00	2,21	74.997,79	- 74.887,38				
10	7		- 1.497,75	1.497,75	- 76.385,13				
11	8	45.000,00	- 1.527,70	46.527,70	- 122.912,83				
12	9		- 2.458,26	2.458,26	- 125.371,09				
13	10	50,00	- 2.507,42	2.557,42	- 127.928,51				
14	11		- 2.558,57	2.558,57	- 130.487,08				
15	12	300.000,00	- 2.609,74	302.609,74	- 433.096,82				
16									
17									

Ejemplo 3.29

Un equipo que vale de contado $ 13.500.000 se va a financiar a una tasa de interés del 2% mensual por medio de una cuota inicial del 10% y tres pagos en los meses 6, 8 y 10 respectivamente, de tal forma que el segundo pago sea $ 50.000 menos que el primero y el tercer pago sea $ 200.000 más que el segundo. Calcular el valor de estos pagos.

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

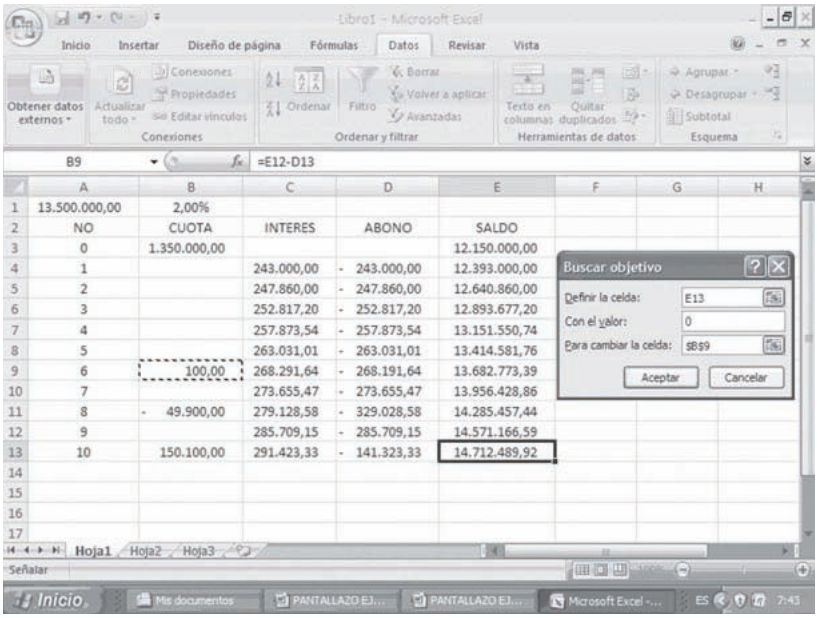
Figura 3.14

	A	B	C	D	E
1	13.500.000	2.00%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	=0.10*A1			= A1−B3
4	1		=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2				
.....	.....	.....	.....	.....	
9	6	100			
10	7				
11	8	= B9−50.000			
12	9				
13	10	= B11 +200.000			

En la celda A1 registramos $ 13.500.000 que es el valor del equipo que se va a financiar y en la B1 la tasa de interés del 2.00%. En la celda B3 registramos el valor de la cuota inicial y en la E3 calculamos el saldo. En la celda B9 escribimos un número arbitrario de 100, que corresponde al valor del primer pago y que se constituye en la incógnita del ejercicio. En la celda B11 calculamos la cuota del mes 8 y en la B13 calculamos la cuota del mes 10. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, abono a capital y saldo. (Ver figura 3.14).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E13 y aplicando *Buscar objetivo* obtenemos en la celda B9 un valor de $ 4.711.365.01, en la celda B11 un valor de $ 4.661.365.01 y en la celda B13 $ 4.861.365.01. (Ver figura 3.15).

Figura 3.15



	A	B	C	D	E
1	13.500.000,00	2,00%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	1.350.000,00			12.150.000,00
4	1		243.000,00	- 243.000,00	12.393.000,00
5	2		247.860,00	- 247.860,00	12.640.860,00
6	3		252.817,20	- 252.817,20	12.893.677,20
7	4		257.873,54	- 257.873,54	13.151.550,74
8	5		263.031,01	- 263.031,01	13.414.581,76
9	6	100,00	268.291,64	- 268.191,64	13.682.773,39
10	7		273.655,47	- 273.655,47	13.956.428,86
11	8	- 49.900,00	279.128,58	- 329.028,58	14.285.457,44
12	9		285.709,15	- 285.709,15	14.571.166,59
13	10	150.100,00	291.423,33	- 141.323,33	14.712.489,92

Ejemplo 3.30

Un ahorrador deposita hoy la suma de $ 1.000.000 en una corporación que paga un interés del 2% mensual, retira $ 250.000 dentro de 6 meses, retira $ 350.000 dentro de 10 meses, hace un nuevo depósito en el mes 12 por valor de $ 850.000. ¿Qué saldo tendrá en la cuenta de ahorros a los 18 meses?

Este ejercicio plantea una situación diferente a la de los ejemplos anteriores y nos muestra como operan los depósitos en las cuentas bancarias.

Hoja de cálculo Excel

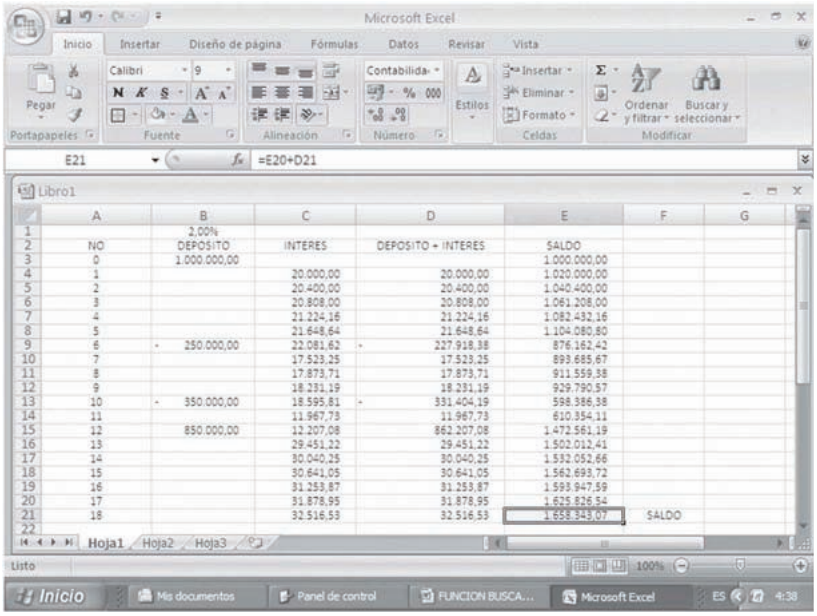
Figura 3.16

	A	B	C	D	E
1		2.00%			
2	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO+INTERÉS	SALDO
3	0	1.000.000			=B3
4	1		=E3*$B$1	=B4+C4	=E3+D4
5	2				
.....	.....	.....	.....	.....	.....
9	6	−250.000			
.....	.....	.....	.....		.....
13	10	−350.000			
.....	.....	.....	.....		.....
15	12	850.000			
.....	.....	.....	.....		.....
21	18				SALDO FINAL

En la celda B1 registramos la tasa de interés del 2.00%, que es la tasa que reconocen por los depósitos. En la fila 2 registramos los elementos que componen la tabla de amortización: número de depósitos (o retiros), valor de los depósitos (o retiros), interés, depósito más interés y saldo final. En la celda B3 registramos el depósito inicial de $ 1.000.000, en las celdas B9 y B13 los retiros (con signo negativo) y en la celda B15 el valor del nuevo depósito. Calculamos los intereses del primer depósito en la celda C4 y en la celda D4 sumamos el valor del segundo depósito (B4), en este caso no lo hay pero se escribe para crear la fórmula, más los intereses del primer depósito (C4). En la celda E4 sumamos el saldo anterior (E3, valor del primer depósito) más D4 (segundo depósito más intereses del primer depósito). (Ver figura 3.16).

Rellenamos las celdas en blanco copiando las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E21 y obtenemos en E21 un saldo final de $ 1.658.343.07. (Ver figura 3.17).

Figura 3.17



Ejemplo 3.31

Calcular el valor de contado de un activo que financiado se paga de la siguiente forma: una cuota inicial de $ 200.000, al final del mes 5 un pago igual a la tercera parte de su valor y al final del mes 7 un pago igual a la mitad de su valor. La tasa de interés que le cobraron fue del 3% mensual.

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

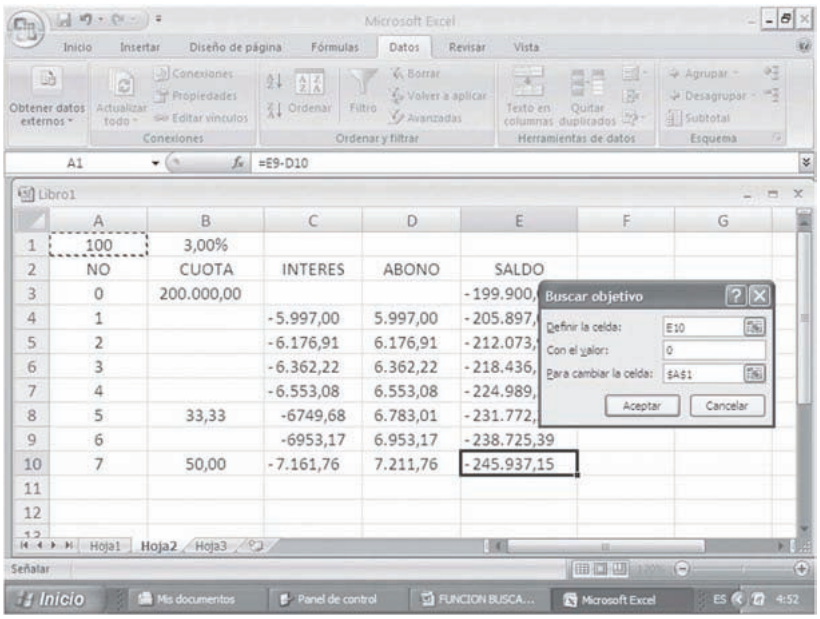
Figura 3.18

	A	B	C	D	E
1	100	3.00%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	200.000			=A1−B3
4	1		= E3*$B$1	= B4−C4	=E3−D4
5	2				
.....	.....	.....	.....	.....	.....
8	5	=A1/3			
9	6				
10	7	=A1/2			

En la celda A1 escribimos un valor arbitrario de 100, que corresponde al valor del activo y es la incógnita del ejercicio, y en la B1 registramos la tasa de interés del 3.00%. En la celda B3 registramos 200.000 como cuota inicial y en la E3 calculamos el saldo insoluto. En la celda B8 calculamos el pago en el mes 6 y en la B10 el pago en el mes 7. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, abono a capital y saldo. (Ver figura 3.18).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E10 y aplicando *Buscar objetivo* obtenemos en la celda A1 un valor de $ 653.740.35. (Ver figura 3.19).

Figura 3.19



	A	B	C	D	E	F	G
1	100	3,00%					
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO		
3	0	200.000,00			-199.900,		
4	1		-5.997,00	5.997,00	-205.897,		
5	2		-6.176,91	6.176,91	-212.073,		
6	3		-6.362,22	6.362,22	-218.436,		
7	4		-6.553,08	6.553,08	-224.989,		
8	5	33,33	-6749,68	6.783,01	-231.772,		
9	6		-6953,17	6.953,17	-238.725,39		
10	7	50,00	-7.161,76	7.211,76	-245.937,15		
11							
12							

Cuestionario

1. Explique la diferencia entre el interés simple y compuesto.
2. ¿Qué es la capitalización de intereses?
3. Explique los tres pasos para construir una ecuación de valor.
4. ¿Qué es el tiempo equivalente?
5. ¿Qué es el vencimiento común?
6. ¿Qué diferencia existe entre período de pago y período de capitalización?
7. En la construcción de una ecuación de valor, ¿para qué sirve la fecha focal?
8. ¿Qué significa que el valor presente sea inversamente proporcional a la tasa de interés? Explique mediante un ejemplo práctico.
9. Explique la diferencia entre la capitalización de intereses y la acumulación de intereses.

Solucionario capítulo 3

NOTA ACLARATORIA:

- Los cálculos para la solución de los ejercicios se harán en la hoja de cálculo Excel.
- Por razones de espacio en la presentación del pantallazo en Excel, el tiempo máximo de la operación financiera, considerado en el planteamiento de los ejercicios, será de 12 meses.
- Con la consideración de que se debe construir una ecuación de valor la más fácil de resolver, en todos los ejercicios tomaremos como fecha focal el final del período de la operación financiera. Sin embargo, tal como se explicó en este capítulo, la fecha focal se puede ubicar en cualquier fecha y el resultado es el mismo.

EJERCICIO 1. Blanca Elena hace los siguientes depósitos en una cuenta de ahorros que le reconoce una tasa del 1.0% mensual: $ 500.000 dentro de 5 meses, $ 800.000 dentro de 7 meses y $ 1.000.000 dentro de 10 meses. Calcular:

a) Saldo en la cuenta al final del año.

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

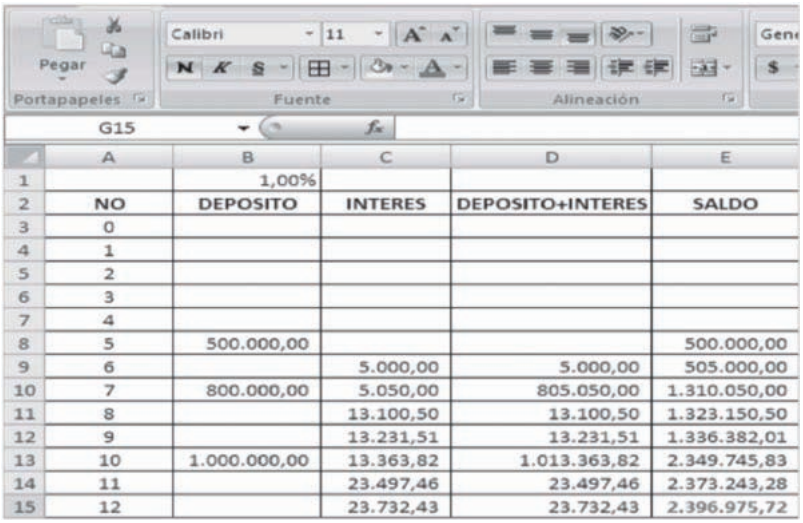
$S = 500.000(1 + 0.01)^7 + 800.000(1 + 0.01)^5 + 1.000.000(1 + 0.01)^2$

$S = \$\ 2.396.975.72$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1		1,0%			
2	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO + INTERÉS	SALDO
3	0				
....	.....	.....	.....	.....	.....
8	5	500.000			=B8
9	6		= E8*$B$1	= B9+C9	= E8+D9
10	7	800.000			
....	.....	.....	.....	.....	.....
13	10	1.000.000			
14	11				
15	12				

En la celda B1 escribimos la tasa de interés y en las celdas B8, B10 y B13 registramos los depósitos. En las celdas C9, D9 y E9 calculamos intereses, depósito más interés y saldo al final del periodo. Copiamos las fórmulas de las celdas C9, D9 y E9 en el rango C10:E15 y encontramos en la celda E15 un saldo al final del año por valor de $ 2.396.975.72.



	A	B	C	D	E
1		1,00%			
2	NO	DEPOSITO	INTERES	DEPOSITO+INTERES	SALDO
3	0				
4	1				
5	2				
6	3				
7	4				
8	5	500.000,00			500.000,00
9	6		5.000,00	5.000,00	505.000,00
10	7	800.000,00	5.050,00	805.050,00	1.310.050,00
11	8		13.100,50	13.100,50	1.323.150,50
12	9		13.231,51	13.231,51	1.336.382,01
13	10	1.000.000,00	13.363,82	1.013.363,82	2.349.745,83
14	11		23.497,46	23.497,46	2.373.243,28
15	12		23.732,43	23.732,43	2.396.975,72

b) El valor del depósito en el día de hoy para tener el mismo saldo al final del año.

Dado el valor futuro (F) de $ 2.396.975,72, la tasa de interés (*i*) del 1,0 % y el número de períodos (*n*) de 12, se calcula su valor presente equivalente.

$$P = \frac{F}{(1+i)^n} = \frac{2.396.975.72}{(1+0.01)^{12}} = \$\ 2.127.194.25$$

En Excel: = VA (1,0%; 12; 0; −2396975,72)

EJERCICIO 2. Una obligación de $ 5.000.000 al 2,0% mensual, se desea pagar con dos cuotas iguales en los meses 6 y 8, de tal forma que al final del año quede un saldo pendiente de pago de $ 500.000. Calcular el valor de las dos cuotas iguales.

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

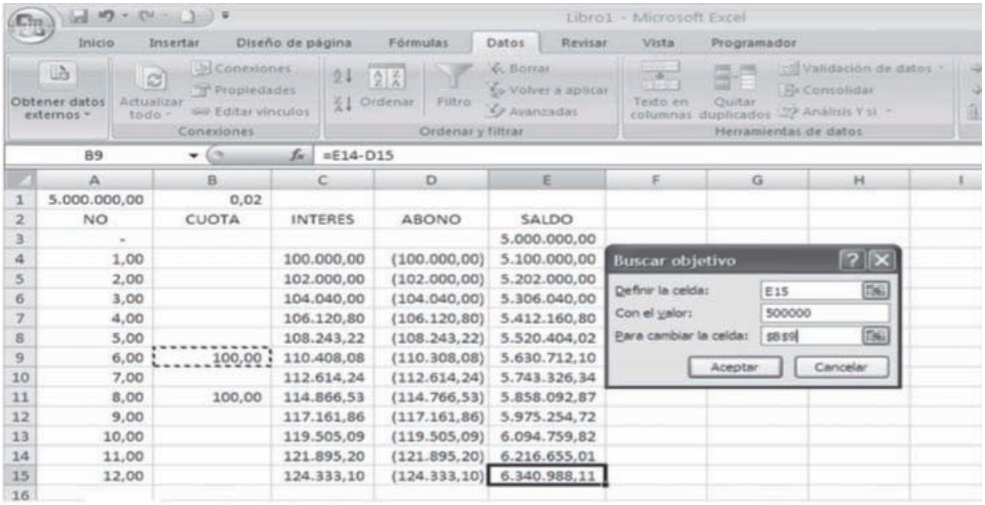
$$5.000.000\ (1 + 0.02)^{12} = X(1 + 0.02)^6 + X(1 + 0.02)^4 + 500.000$$

$$X = \$\ 262.89$$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	5.000.000	2,0%			
2	N°	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1		=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2				
9	6	100			
10	7				
11	8	=B6			
	.....	.....	.....	.....	.....
15	12				

Calculamos en las celdas C4, D4 y E4 intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicamos *Buscar objetivo*. Se obtiene un valor de las cuotas en los meses 6 y 8 de $ 2.644.762.89.



	A	B	C	D	E
1	5.000.000,00	0,02			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	-				5.000.000,00
4	1,00		100.000,00	(100.000,00)	5.100.000,00
5	2,00		102.000,00	(102.000,00)	5.202.000,00
6	3,00		104.040,00	(104.040,00)	5.306.040,00
7	4,00		106.120,80	(106.120,80)	5.412.160,80
8	5,00		108.243,22	(108.243,22)	5.520.404,02
9	6,00	100,00	110.408,08	(110.308,08)	5.630.712,10
10	7,00		112.614,24	(112.614,24)	5.743.326,34
11	8,00	100,00	114.866,53	(114.766,53)	5.858.092,87
12	9,00		117.161,86	(117.161,86)	5.975.254,72
13	10,00		119.505,09	(119.505,09)	6.094.759,82
14	11,00		121.895,20	(121.895,20)	6.216.655,01
15	12,00		124.333,10	(124.333,10)	6.340.988,11
16					

EJERCICIO 3. Calcular la tasa de interés mensual compuesta equivalente a una tasa del 6% mensual simple, durante 2.5 años.

Para que una operación con interés simple sea equivalente a una con interés compuesto, el valor futuro tiene que ser igual.

Interés simple: $F = P(1 + n*i_s)$

Interés compuesto: $F = P(1 + i_c)^n$

Igualando las dos ecuaciones, tenemos: $1 + n*i_s = (1 + i_c)^n$, reemplazando valores:

$$(1 + 30*0{,}06) = (1 + i_c)^{30}$$

$$2.80 = (1 + i_c)^{30}$$

$$i_c = (2.80)^{(1/30)} - 1$$

$$i_c = 3.49\% \text{ mensual}$$

EJERCICIO 4. ¿Cuánto tiempo debe esperar un inversionista para que una inversión de $ 500.000 se convierta en $ 1.631.018.89, si el rendimiento es del 3% mensual?

$P = \$\ 500.000 \quad F = \$\ 1.631.018.89 \quad i = 3\%$ mensual $\quad n = ?$

$$F = P(1 + i)^n$$

$$1.631.018.89 = 500.000(1 + 0.03)^n$$

$$3.2620 = (1.03)^n$$

$$\text{Log } 3.2620 = n \text{ Log } 1.03$$

$$n = \frac{\text{Log } 3.2620}{\text{Log } 1.03} = 40 \text{ meses}$$

En Excel: = nper (tasa; pago; va; vf; tipo)

= nper(3%; 0; −500000; 1631018,89)

EJERCICIO 5. Una persona debe pagar $ 10.000.000 dentro de 2 años y $ 20.000.000 dentro de 5 años. Pacta con su acreedor efectuar un pago único al final de 3 años a la tasa del 15% semestral. Calcular el valor único de pago a los 3 años.

Calculamos el valor de la obligación (P) con una ecuación de valor con fecha focal en el momento 0:

$$P = \frac{10.000.000}{\left(1 + 0.15\right)^{4}} + \frac{20.000.000}{\left(1 + 0.15\right)^{10}} = \$\ 10.661.226.58$$

La tasa de interés y el número de períodos deben estar en la misma unidad de tiempo. Convertimos los años a semestres.

Conocido este valor presente, calculamos su valor futuro equivalente a los 3 años.

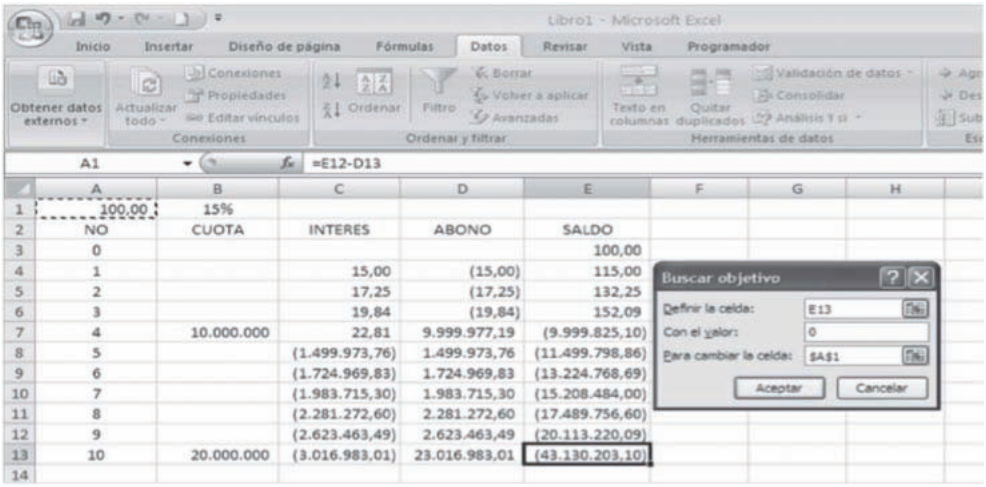
$$F = P(1 + i)^{n} = 10.661.226.58(1 + 0.15)^{6}$$

$$F = \$\ 24.660.064.92$$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	100	15%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1		=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
....	.....	.....	.....	.....	.....
6	3				
7	4	10.000.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
13	10	20.000.000			

La incógnita es el valor de la obligación (A1) a la cual le asignamos un valor arbitrario. Calculamos en las celdas C4, D4 y E4 intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E13 y aplicamos *Buscar objetivo*. Se obtiene un valor de $ 10.661.226.58.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	100,00	15%						
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO			
3	0				100,00			
4	1		15,00	(15,00)	115,00			
5	2		17,25	(17,25)	132,25			
6	3		19,84	(19,84)	152,09			
7	4	10.000.000	22,81	9.999.977,19	(9.999.825,10)			
8	5		(1.499.973,76)	1.499.973,76	(11.499.798,86)			
9	6		(1.724.969,83)	1.724.969,83	(13.224.768,69)			
10	7		(1.983.715,30)	1.983.715,30	(15.208.484,00)			
11	8		(2.281.272,60)	2.281.272,60	(17.489.756,60)			
12	9		(2.623.463,49)	2.623.463,49	(20.113.220,09)			
13	10	20.000.000	(3.016.983,01)	23.016.983,01	(43.130.203,10)			
14								

Conocido el valor presente de la obligación, calculamos su valor futuro equivalente a los 3 años.

$$= \text{VF}\ (15\%;\ 6;\ 0;\ -10661226{,}58)$$

$$\text{F} = \$\ 24.660.064.92$$

EJERCICIO 6. ¿Cuánto tiempo se debe esperar para que una inversión al 1,89 % mensual se incremente en un 40?

El ejercicio no suministra los valores de P y F, pero los podemos asumir bajo la condición que P se incremente en un 40%.

$$\text{P} = 100 \qquad \text{F} = 140 \qquad i = 1{,}89\%\ \text{mensual} \qquad n = ?$$

Aplicando la fórmula:

$$\text{F} = \text{P}(1 + i)^n$$

$$140 = 100(1 + 0{,}0189)^n$$

$$1.4 = (1.0189)^n \qquad \text{Log } 1.4 = n\text{Log } 1.0189$$

$$n = \frac{\text{Log } 1.4}{\text{Log } 1.0189} = 18\ \text{meses}$$

En Excel: $= \text{NPER}\ (1{,}89\%;\ 0;\ -100\ ;140)$

EJERCICIO 7. Jose Luis está vendiendo su casa y recibe las siguientes ofertas:

A) Un empleado del gobierno le ofrece $ 100.000.000 de contado.

B) Un familiar le ofrece pagarle dentro de un año la suma de $ 137.000.000.

C) Juan David le ofrece pagarle hoy $ 70.000.000 y dentro de 10 meses la suma de $ 39.000.000.

Si José Luis puede invertir su dinero a una tasa del 2.50% mensual. ¿Cuál oferta le conviene?

Para escoger la mejor oferta es necesario compararlas en una misma fecha, que para este caso se elige el momento cero.

Primera oferta: recibir hoy $ 100.000.000.

Segunda oferta: calculamos el valor presente de $ 137.000.000 al 2.50% mensual, que es la tasa de oportunidad de José Luis.

$$P = \frac{137.000.000}{(1 + 0.025)^{12}} = \$\ 101.867.156.25$$

En Excel: = VA (2,50%; 12; 0; −137000000)

Tercera oferta: se calcula el valor presente de $ 39.000.000 y se le suman los $ 70.000.000 pagados en el día de hoy.

$$P = \frac{39.000.000}{(1 + 0.025)^{10}} = \$\ 30.466.737.67$$

En Excel: = VA (2,50%; 10; 0; −39000000)

El valor total de la tercera oferta es de $ 100.466.737.67

Al comparar las tres ofertas en una misma fecha (momento cero) y teniendo en cuenta el costo de oportunidad del dinero y el riesgo, la mejor sería la oferta A.

EJERCICIO 8. Una persona debe pagar $ 5.000.000 dentro de 2 años. El acreedor acepta un pago hoy de $ 2.000.000 y un nuevo pago al final del año. Hallar el valor del nuevo pago con la tasa de interés del 2.0% mensual.

Calculamos el valor presente de la obligación:

$$P = \frac{5.000.000}{(1 + 0.02)^{24}} = \$\ 3.108.607.44$$

En Excel: = VA(2%; 24; 0; −5000000)

Este valor corresponde al valor inicial de la obligación, el cual se va a cancelar mediante un pago hoy de $ 2.000.000 y otro pago al final del año.

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

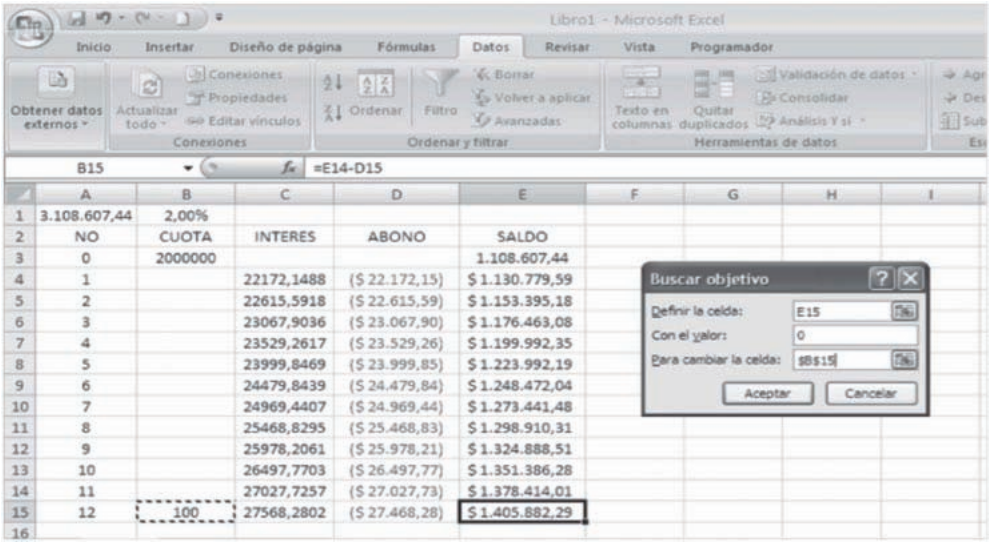
$$3.108.607.44\ (1 + 0.02)^{12} = 2.000.000(1 + 0.02)^{12} + X$$

$$X = \$\ 1.405.982.29$$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	3.108.607.44	2,0 %			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	2.000.000			=A1−B3
4	1		=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
	.....	.....	.....	.....	.....
15	12	100			

En la celda A1 escribimos el valor de la obligación inicial y en la celda B1 la tasa de interés. En la celda B3 escribimos 200.000, que corresponde al pago de hoy, en la celda B15 escribimos un valor arbitrario que es la incógnita y en la celda E3 calculamos el saldo insoluto. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15. Aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E
1	3.108.607,44	2,00%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	2000000			1.108.607,44
4	1		22172,1488	($ 22.172,15)	$ 1.130.779,59
5	2		22615,5918	($ 22.615,59)	$ 1.153.395,18
6	3		23067,9036	($ 23.067,90)	$ 1.176.463,08
7	4		23529,2617	($ 23.529,26)	$ 1.199.992,35
8	5		23999,8469	($ 23.999,85)	$ 1.223.992,19
9	6		24479,8439	($ 24.479,84)	$ 1.248.472,04
10	7		24969,4407	($ 24.969,44)	$ 1.273.441,48
11	8		25468,8295	($ 25.468,83)	$ 1.298.910,31
12	9		25978,2061	($ 25.978,21)	$ 1.324.888,51
13	10		26497,7703	($ 26.497,77)	$ 1.351.386,28
14	11		27027,7257	($ 27.027,73)	$ 1.378.414,01
15	12	100	27568,2802	($ 27.468,28)	$ 1.405.882,29
16					

EJERCICIO 9. Se depositan $ 3.000.000 en una cuenta de ahorros que paga el 0.45% mensual. ¿Cuánto se puede retirar al final del mes 6 para tener un saldo al final del año de $ 800.000?

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

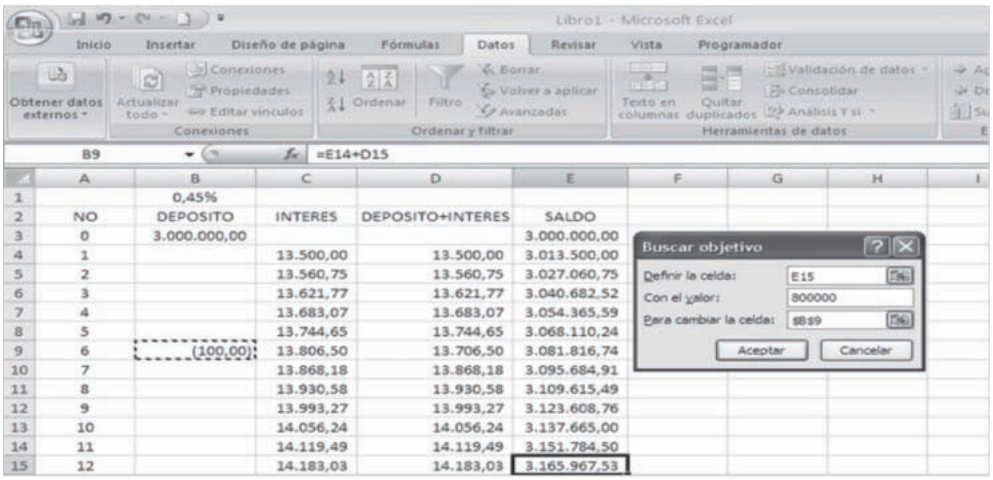
$$3.000.000(1 + 0.0045)^{12} = X(1 + 0.0045)^{6} + 800.000$$

$$X = \$\ 2.303.180.58$$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1		0,45 %			
2	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO+INTERÉS	SALDO
3	0	3.000.000			=B3
4	1		=E3*$B$1	=B4+C4	=E3+D4
....	.....	.....	.....	.....	.....
9	6	(100)			
10	7				
.....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12				

En la celda B1 escribimos la tasa de interés del 0.45%. En la celda B3 escribimos el valor del depósito inicial y en la celda B9 escribimos un valor arbitrario, con signo negativo porque es un retiro. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, depósito más interés y saldo al final del período. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E
1		0,45%			
2	NO	DEPOSITO	INTERES	DEPOSITO+INTERES	SALDO
3	0	3.000.000,00			3.000.000,00
4	1		13.500,00	13.500,00	3.013.500,00
5	2		13.560,75	13.560,75	3.027.060,75
6	3		13.621,77	13.621,77	3.040.682,52
7	4		13.683,07	13.683,07	3.054.365,59
8	5		13.744,65	13.744,65	3.068.110,24
9	6	(100,00)	13.806,50	13.706,50	3.081.816,74
10	7		13.868,18	13.868,18	3.095.684,91
11	8		13.930,58	13.930,58	3.109.615,49
12	9		13.993,27	13.993,27	3.123.608,76
13	10		14.056,24	14.056,24	3.137.665,00
14	11		14.119,49	14.119,49	3.151.784,50
15	12		14.183,03	14.183,03	3.165.967,53

EJERCICIO 10. Un electrodoméstico que tiene un valor de $ 2.500.000 se debe financiar de la siguiente forma: cuota inicial del 20% y el saldo con dos pagos iguales en los meses 4 y 7 y un último pago de $ 250.000 al final del año. Calcular el valor de los pagos iguales si la tasa de financiación es del 2,5% mensual.

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

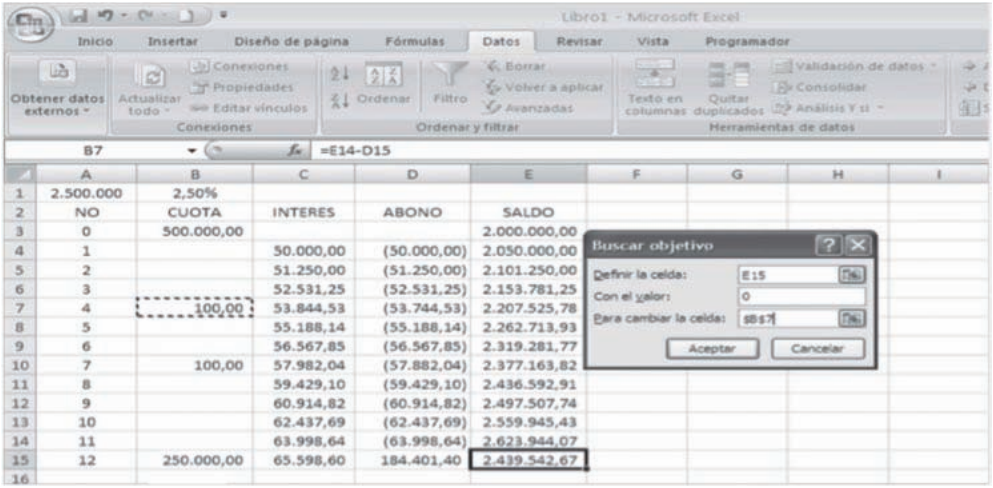
$$2.500.000(1+0.025)^{12} = 500.000(1+0.025)^{12} + X(1+0.025)^{8} + X(1+0.025)^{5} + 250.000$$

$$X = \$\ 1.038.286.71$$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	2.500.000	2,5%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	=0,20%*A1			=A1−B3
4	1		=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
....	.....	.....	.....	.....	.....
7	4	100			
....	.....	.....	.....	.....	.....
10	7	=B7			
....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12	250.000			

En la celda A1 escribimos el valor de la obligación inicial y en la celda B1 la tasa de interés. En la celda B3 calculamos el valor de la cuota inicial. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E
1	2.500.000	2,50%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	500.000,00			2.000.000,00
4	1		50.000,00	(50.000,00)	2.050.000,00
5	2		51.250,00	(51.250,00)	2.101.250,00
6	3		52.531,25	(52.531,25)	2.153.781,25
7	4	100,00	53.844,53	(53.744,53)	2.207.525,78
8	5		55.188,14	(55.188,14)	2.262.713,93
9	6		56.567,85	(56.567,85)	2.319.281,77
10	7	100,00	57.982,04	(57.882,04)	2.377.163,82
11	8		59.429,10	(59.429,10)	2.436.592,91
12	9		60.914,82	(60.914,82)	2.497.507,74
13	10		62.437,69	(62.437,69)	2.559.945,43
14	11		63.998,64	(63.998,64)	2.623.944,07
15	12	250.000,00	65.598,60	184.401,40	2.439.542,67
16					

EJERCICIO 11. Jhonny Alberto me debe pagar dentro de 8 meses la suma de $ 20.000.000. Me ofrece pagar hoy la suma de $ 17.500.000. Si mi tasa de oportunidad es del 2.0% mensual, ¿me conviene aceptar el pago?

Conocidos F = $ 20.000.000, n = 8 meses e i = 2.0% mensual, se calcula el valor presente equivalente P.

$$P = \frac{20.000.000}{(1 + 0.02)^8} = \$\ 17.069.807.42$$

En Excel: = VA (2%; 8; 0; −20000000)

El resultado indica que para mi es equivalente recibir hoy $ 17.069.807.42 que recibir dentro de 8 meses $ 20.000.000, por lo tanto debo aceptar el pago.

EJERCICIO 12. Deposito hoy $ 2.500.000 en una cuenta de ahorros que me paga una tasa del 0.5% mensual. Deseo hacer retiros en los meses 4 y 8 tales que el retiro del mes 8 sea la mitad del retiro del mes 4. Calcular el valor de los retiros si necesito tener al final del año un saldo en la cuenta de $ 1.000.000.

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

$$2X(1 + 0.005)^8 + X(1 + 0.005)^4 + 1.000.000 = 2.500.000(1 + 0.005)^{12}$$

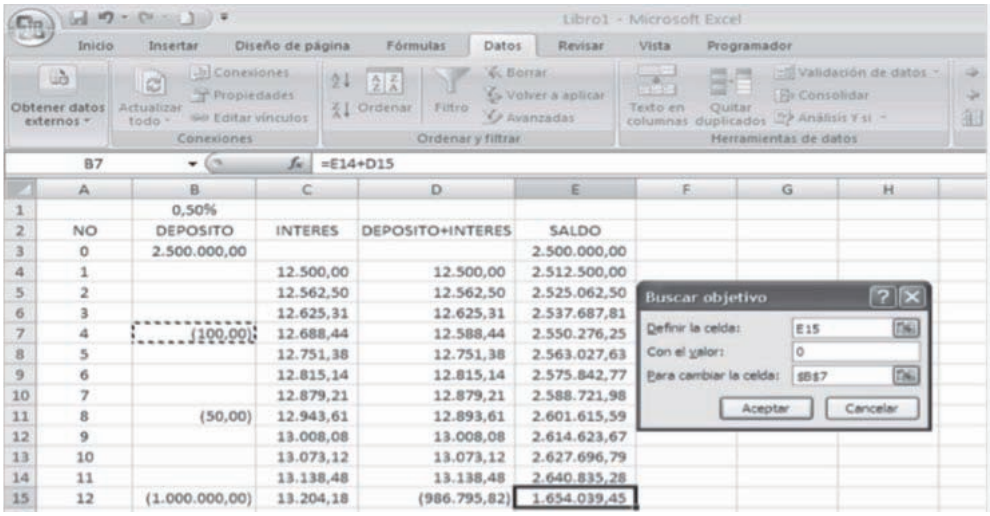
$$X = 533.341.96 = \text{retiro en el mes 8}$$

$$2X = \$\ 1.066.683.92 = \text{retiro en el mes 4}$$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1		0,5%			
2	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO + INTERÉS	SALDO
3	0	2.500.000			=B3
4	1		=E3*$B$1	=B4+C4	=E3+D4
....	.....	.....	.....	.....	.....
7	4	−100			
....	.....	.....	.....	.....	.....
11	8	=B7/2			
....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12	−1.000.000			

En la celda B1 escribimos la tasa de interés del 0.5%. En la celda B3 escribimos el valor del depósito inicial y en la celda B7 escribimos un valor arbitrario, con signo negativo porque es un retiro. En las celdas B11 y B15 (el saldo se asume como retiro) registramos los retiros. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, depósito más interés y saldo al final del período. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		0,50%						
2	NO	DEPOSITO	INTERES	DEPOSITO+INTERES	SALDO			
3	0	2.500.000,00			2.500.000,00			
4	1		12.500,00	12.500,00	2.512.500,00			
5	2		12.562,50	12.562,50	2.525.062,50			
6	3		12.625,31	12.625,31	2.537.687,81			
7	4	(100,00)	12.688,44	12.588,44	2.550.276,25			
8	5		12.751,38	12.751,38	2.563.027,63			
9	6		12.815,14	12.815,14	2.575.842,77			
10	7		12.879,21	12.879,21	2.588.721,98			
11	8	(50,00)	12.943,61	12.893,61	2.601.615,59			
12	9		13.008,08	13.008,08	2.614.623,67			
13	10		13.073,12	13.073,12	2.627.696,79			
14	11		13.138,48	13.138,48	2.640.835,28			
15	12	(1.000.000,00)	13.204,18	(986.795,82)	1.654.039,45			

EJERCICIO 13. Me deben pagar durante los próximos 4 meses la suma de $ 500.000 cada mes. Calcular el tiempo equivalente (vencimiento medio) considerando una tasa de interés del 3.0% mensual.

La solución consiste en calcular en que tiempo sería equivalente cancelar $ 2.000.000 (resultado de sumar 4 meses de $ 500.000) a cancelar 4 pagos de $ 500.000 cada mes.

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 4:

$$500.000(1+0.03)^3 + 500.000(1+0.03)^2 + 500.000(1+0.03) + 500.000 = 2.000.000(1+0.03)^{4-n}$$

$$n = 2.48 \text{ meses}$$

EJERCICIO 14. Calcular el valor del depósito inicial en una cuenta de ahorros que reconoce una tasa del 0.5%, para poder retirar dentro de 6 meses la suma de $ 1.000.000, dentro de 10 meses la suma de $ 250.000 y al final del año todavía se tenga un saldo equivalente a la mitad del depósito inicial.

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

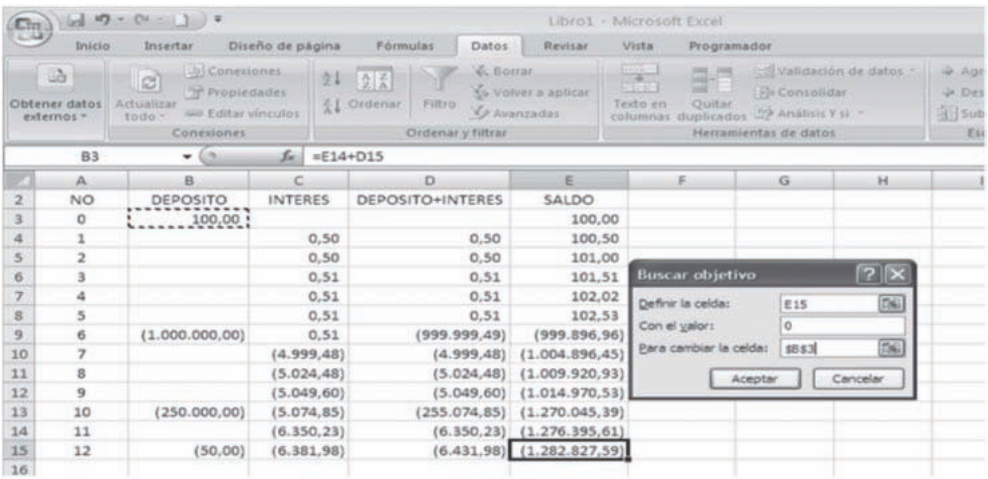
$$1.000.000(1 + 0.005)^6 + 250.000(1 + 0.005)^2 + 0.5X = X(1 + 0.005)^{12}$$

$$X = \$\ 2.284.020.72$$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1		0,5%			
2	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO+INTERÉS	SALDO
3	0	100			=B3
4	1		=E3*$B$1	=B4+C4	=E3+D4
....	.....	.....	.....	.....	.....
8	5				
9	6	(1.000.000)			
....	.....	.....	.....	.....	.....
13	10	(250.000)			
14	11				
15	12	=(B3/2)			

En la celda B1 escribimos la tasa de interés del 0.5%. En la celda B3 escribimos un valor arbitrario (por ejemplo, 100) que es el valor del depósito inicial. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, depósito más interés y saldo al final del período. En las celdas B9, B13 y B15 registramos los retiros. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicamos *Buscar objetivo*.



EJERCICIO 15. Al señor Pérez le financiaron una deuda con una tasa de interés del 3.3% mensual mediante tres pagos así: $ 550.000 dentro de tres meses, $ 700.000 dentro de ocho meses y $ 1.280.000 dentro de un año. El acreedor acepta que la deuda de hoy se cancele con un único pago dentro de 15 meses y con una tasa de interés del 2.0% mensual. Hallar el valor de este pago único.

Se calcula el valor inicial de la deuda.

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

$$P(1 + 0.033)^{12} = 550.000(1 + 0.033)^{9} + 700.000(1 + 0.033)^{4} + 1.280.000$$

$$P = \$\ 1.905.807.27$$

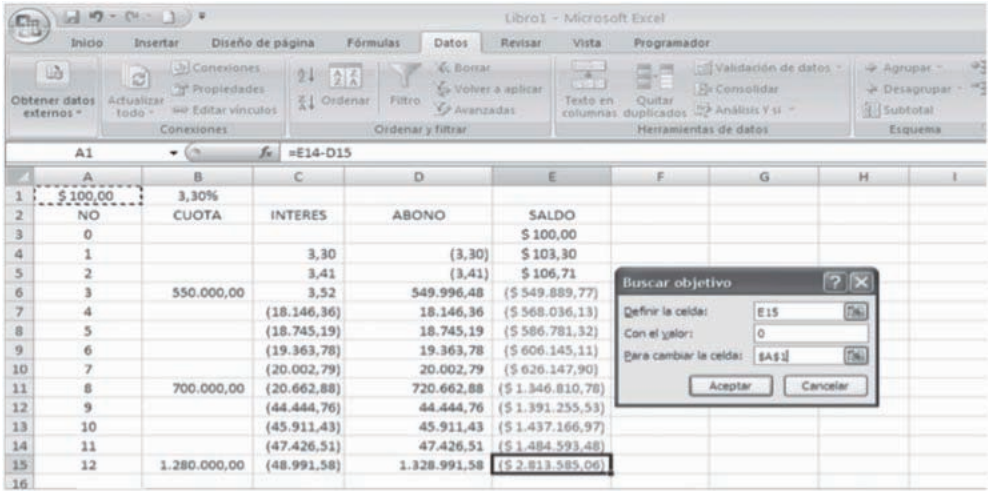
Este valor presente de la deuda se va a cancelar, ahora, con un pago dentro de 15 meses a una tasa de interés del 2.0% mensual.

$$F = 1.905.807.27(1 + 0.02)^{15} = \$\ 2.564.965.66$$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	100	3,3%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1		=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2				
6	3	550.000			
....	.....	.....	.....	.....	.....
11	8	700.000			
....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12	1.280.000			

En la celda A1 escribimos un valor arbitrario, correspondiente a la deuda inicial y en la celda B1 la tasa de interés. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. En las celdas B6, B11 y B15 registramos los pagos. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, E4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E
1	$ 100,00	3,30%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				$ 100,00
4	1		3,30	(3,30)	$ 103,30
5	2		3,41	(3,41)	$ 106,71
6	3	550.000,00	3,52	549.996,48	($ 549.889,77)
7	4		(18.146,36)	18.146,36	($ 568.036,13)
8	5		(18.745,19)	18.745,19	($ 586.781,32)
9	6		(19.363,78)	19.363,78	($ 606.145,11)
10	7		(20.002,79)	20.002,79	($ 626.147,90)
11	8	700.000,00	(20.662,88)	720.662,88	($ 1.346.810,78)
12	9		(44.444,76)	44.444,76	($ 1.391.255,53)
13	10		(45.911,43)	45.911,43	($ 1.437.166,97)
14	11		(47.426,51)	47.426,51	($ 1.484.593,48)
15	12	1.280.000,00	(48.991,58)	1.328.991,58	($ 2.813.585,06)
16					

Calculamos el valor futuro equivalente de la obligación inicial, con una tasa de interés del 2.0% a los 15 meses. = VF (2,0%; 15; 0; −1905807,66)

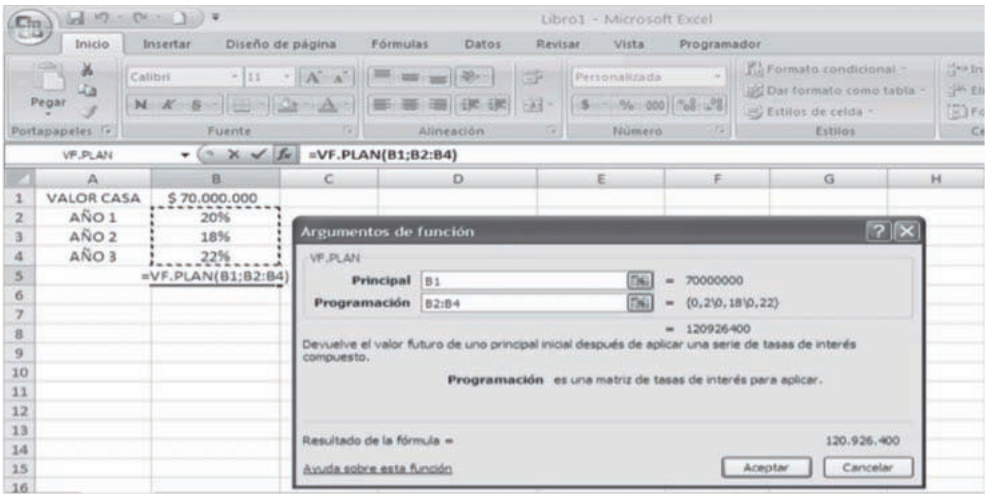
EJERCICIO 16. Se estima que una casa que vale hoy $ 70.000.000 incrementa su valor así: el primer año un 20%, el segundo año un 18% y el tercer año un 22%. ¿Cuál es el valor de la casa después de 3 años?

Calculamos el valor futuro de $ 70.000.000 a una tasa variable.

$$F = P\,(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3)$$

$$F = 70.000.000(1 + 0.20)(1 + 0.18)(1 + 0.22) = \$\ 120.926.400$$

Hoja de cálculo Excel



EJERCICIO 17. Los gastos anuales de una empresa tienen la siguiente variación:

Primer año = $ 300.000, Segundo año = $ 360.000, Tercer año = $ 432.000, Cuarto año = $ 518.400. ¿Cuál fue la variación porcentual anual de los gastos de la empresa?

Para calcular la variación porcentual anual se compara cada valor siguiente (F) con el anterior (P).

La variación porcentual anual del segundo año (F) con respecto al primero (P), es igual a:

$$i = \frac{F}{P} - 1 = \frac{360.000}{300.000} - 1$$

$$i = 20\%$$

Lo que indica que los gastos del segundo año con respecto al primero aumentaron en un 20%.

Si relacionamos los gastos anuales de los siguientes años con respecto al año anterior, observamos que se obtiene una variación del 20% anual.

EJERCICIO 18. Sustituir una obligación que se financió al 3% mensual por medio de tres pagos así: uno por $ 100.000 para hoy, otro por $ 150.000 para dentro de 5 meses y otro por $ 180.000 para dentro de un año, por su equivalente en cuatro pagos a 6, 8, 10 y 12 meses tales que cada uno sea la mitad del anterior. Hallar el valor de cada uno de los pagos.

Calculamos el valor de la obligación inicial.

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

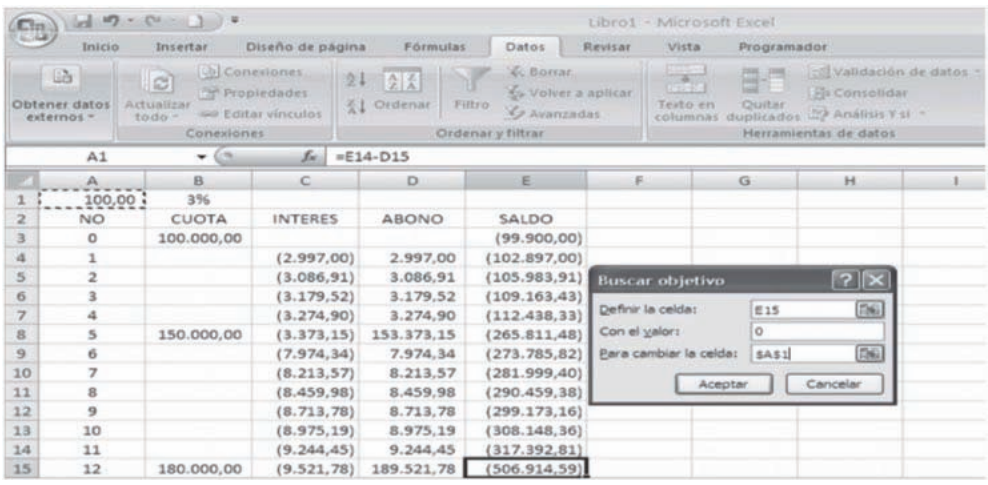
$$P(1 + 0.03)^{12} = 100.000(1 + 0.03)^{12} + 150.000(1 + 0.03)^{7} + 180.000$$

$$P = \$\ 355.639.70$$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	100	3,0%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	100.000			=A1−B3
4	1		=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
....	.....	.....	.....	.....	.....
8	5	150.000			
....	.....	.....	.....	.....	.....
....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12	180.000			

En la celda A1 escribimos un valor arbitrario, correspondiente a la deuda inicial y en la celda B1 la tasa de interés. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. En las celdas B3, B8 y B15 registramos los pagos. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, E4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E
1	100,00	3%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	100.000,00			(99.900,00)
4	1		(2.997,00)	2.997,00	(102.897,00)
5	2		(3.086,91)	3.086,91	(105.983,91)
6	3		(3.179,52)	3.179,52	(109.163,43)
7	4		(3.274,90)	3.274,90	(112.438,33)
8	5	150.000,00	(3.373,15)	153.373,15	(265.811,48)
9	6		(7.974,34)	7.974,34	(273.785,82)
10	7		(8.213,57)	8.213,57	(281.999,40)
11	8		(8.459,98)	8.459,98	(290.459,38)
12	9		(8.713,78)	8.713,78	(299.173,16)
13	10		(8.975,19)	8.975,19	(308.148,36)
14	11		(9.244,45)	9.244,45	(317.392,81)
15	12	180.000,00	(9.521,78)	189.521,78	(506.914,59)

Conocida la obligación inicial se calcula el nuevo plan de pagos.

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

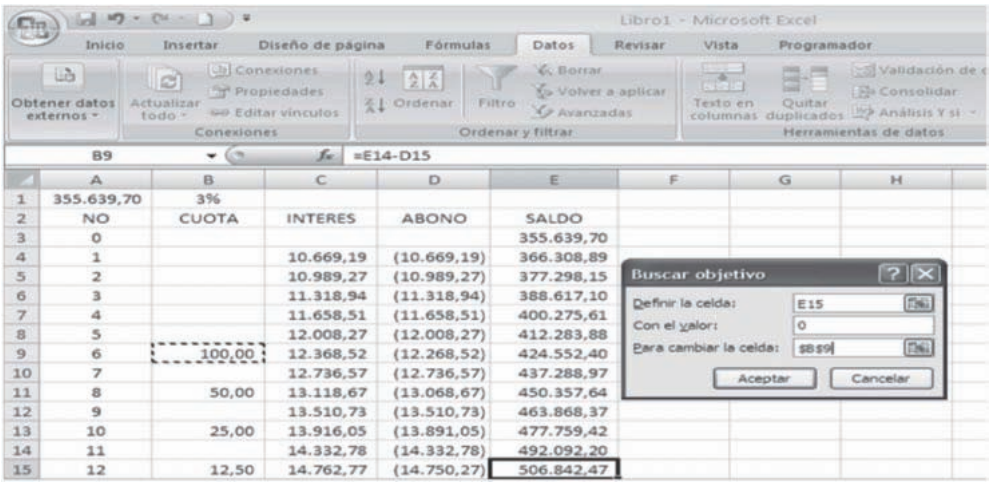
$$355.639.70(1 + 0.03)^{12} = 8X(1 + 0.03)^{6} + 4X(1 + 0.03)^{4} + 2X(1 + 0.03)^{2} + X$$

$8X = \$\ 236.166.70$ = pago en el mes 6 $\qquad$ $4X = \$\ 118.083.30$ = pago en el mes 8

$2X = \$\ 59.041.65$ = pago en el mes 10 $\qquad$ $X = \$\ 29.520.82$ = pago en el mes 12

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	355.639.70	3,0 %			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1		=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
....	.....	.....	.....	.....	.....
9	6	100			
10	7				
11	8	=B9/2			
12	9				
13	10	=B11/2			
14	11				
15	12	=B13/2			



	A	B	C	D	E
1	355.639,70	3%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				355.639,70
4	1		10.669,19	(10.669,19)	366.308,89
5	2		10.989,27	(10.989,27)	377.298,15
6	3		11.318,94	(11.318,94)	388.617,10
7	4		11.658,51	(11.658,51)	400.275,61
8	5		12.008,27	(12.008,27)	412.283,88
9	6	100,00	12.368,52	(12.268,52)	424.552,40
10	7		12.736,57	(12.736,57)	437.288,97
11	8	50,00	13.118,67	(13.068,67)	450.357,64
12	9		13.510,73	(13.510,73)	463.868,37
13	10	25,00	13.916,05	(13.891,05)	477.759,42
14	11		14.332,78	(14.332,78)	492.092,20
15	12	12,50	14.762,77	(14.750,27)	506.842,47

EJERCICIO 19. Determinar el valor de contado de un artículo sabiendo que financiado se adquiere con el siguiente plan: una cuota inicial de $ 50.000, tres pagos de $ 60.000, $ 80.000 y $ 90.000 a cinco, diez y doce meses respectivamente. La tasa de interés que se carga es del 2.8% mensual.

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

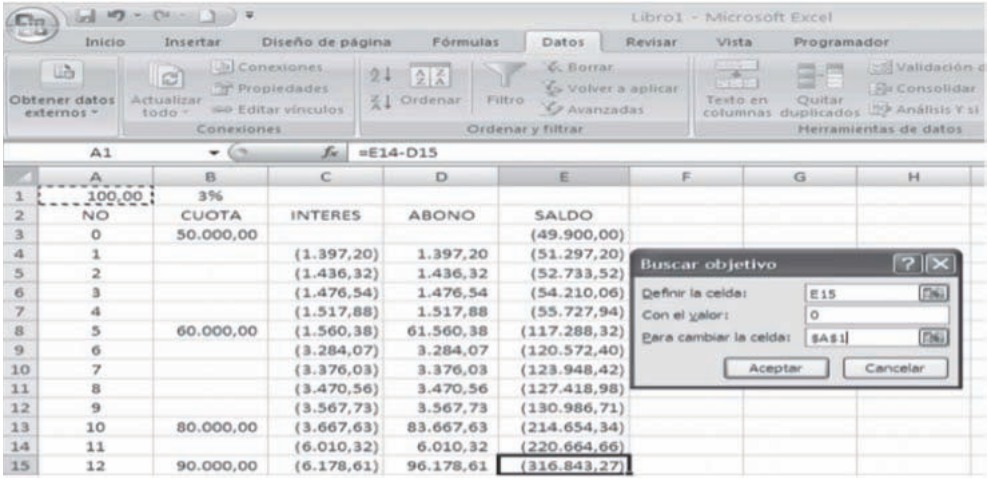
$$P(1 + 0.028)^{12} = 50.000(1 + 0.028)^{12} + 60.000(1 + 0.028)^{7} + 80.000(1 + 0.028)^{2} + 90.000$$

$$P = \$\ 227.571.56$$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	100	2,8%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	50.000			=A1−B3
4	1		=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
....	.....	.....	.....	.....	.....
8	5	60.000			
....	.....	.....	.....	.....	.....
13	10	80.000			
14	11				
15	12	90.000			

En la celda A1 escribimos un valor arbitrario, correspondiente al valor del artículo y en la celda B1 la tasa de interés. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. En las celdas B3, B8, B13 y B15 registramos los pagos. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, E4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E
1	100,00	3%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	50.000,00			(49.900,00)
4	1		(1.397,20)	1.397,20	(51.297,20)
5	2		(1.436,32)	1.436,32	(52.733,52)
6	3		(1.476,54)	1.476,54	(54.210,06)
7	4		(1.517,88)	1.517,88	(55.727,94)
8	5	60.000,00	(1.560,38)	61.560,38	(117.288,32)
9	6		(3.284,07)	3.284,07	(120.572,40)
10	7		(3.376,03)	3.376,03	(123.948,42)
11	8		(3.470,56)	3.470,56	(127.418,98)
12	9		(3.567,73)	3.567,73	(130.986,71)
13	10	80.000,00	(3.667,63)	83.667,63	(214.654,34)
14	11		(6.010,32)	6.010,32	(220.664,66)
15	12	90.000,00	(6.178,61)	96.178,61	(316.843,27)

EJERCICIO 20. Un ahorrador deposita hoy la suma de $ 350.000 en una institución que paga un interés del 2% mensual. Si retira $ 130.000 al cabo de 6 meses y $ 190.000 dos meses más tarde, ¿qué saldo tendrá en la cuenta de ahorros a los 10 meses?

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 10:

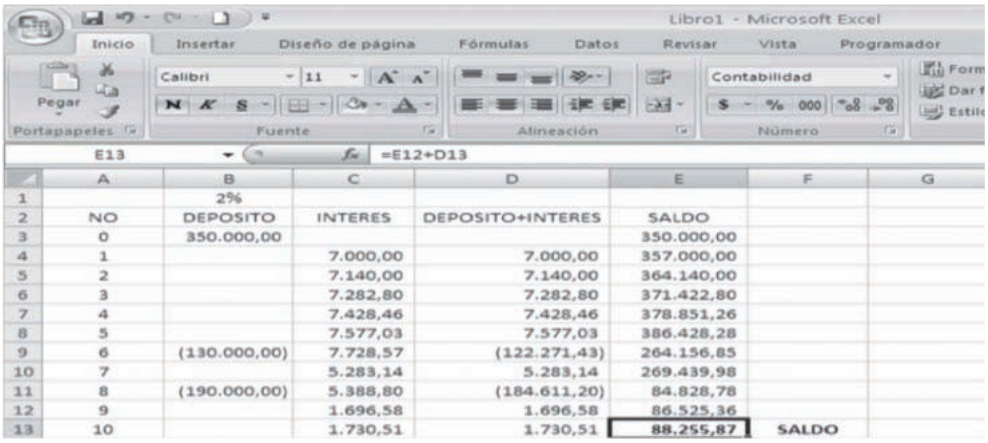
$$130.000(1 + 0.02)^4 + 190.000(1 + 0.02)^2 + S = 350.000(1 + 0.02)^{10}$$

$$S = \$\ 88.255.87$$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1		2,0%			
2	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO + INTERÉS	SALDO
3	0	350.000			=B3
4	1		=E3*$B$1	=B4+C4	=E3+D4
....	.....	.....	.....	.....	.....
9	6	(130.000)			
10	7				
11	8	(190.000)			
12	9				
13	10				

En la celda B1 escribimos la tasa de interés del 2,0%. En la celda B3 escribimos el valor del depósito inicial. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, depósito más interés y saldo al final del período. En las celdas B9 y B11. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E13 y se obtiene un valor en la celda E13, que corresponde al saldo.



	A	B	C	D	E	F	G
1		2%					
2	NO	DEPOSITO	INTERES	DEPOSITO+INTERES	SALDO		
3	0	350.000,00			350.000,00		
4	1		7.000,00	7.000,00	357.000,00		
5	2		7.140,00	7.140,00	364.140,00		
6	3		7.282,80	7.282,80	371.422,80		
7	4		7.428,46	7.428,46	378.851,26		
8	5		7.577,03	7.577,03	386.428,28		
9	6	(130.000,00)	7.728,57	(122.271,43)	264.156,85		
10	7		5.283,14	5.283,14	269.439,98		
11	8	(190.000,00)	5.388,80	(184.611,20)	84.828,78		
12	9		1.696,58	1.696,58	86.525,36		
13	10		1.730,51	1.730,51	88.255,87	SALDO	

EJERCICIO 21. Inicio una cuenta de ahorros con un depósito inicial de $ 5.000.000. En los próximos 3 meses aspiro a hacer retiros de $ 1.250.000 cada mes. ¿Qué depósito debo hacer al final del mes 10 para tener un saldo al final del año de $ 2.000.000 si la cuenta de ahorros reconoce una tasa de interés del 0.35% mensual?

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

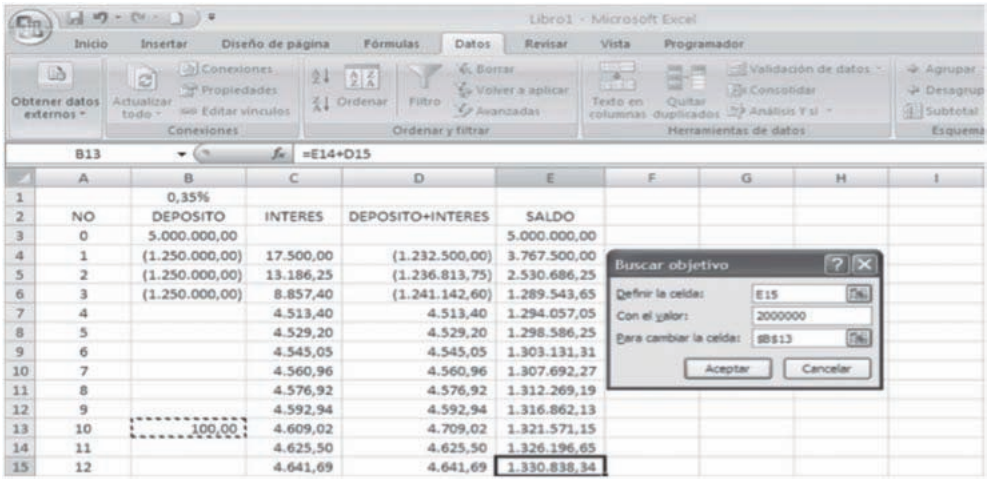
$$5.000.000(1.0035)^{12} + X(1.0035)^{2} = 1.250.000(1.0035)^{11} + 1.250.000(1.0035)^{10} + 1.250.000(1.0035)^{9} + 2.000.000$$

$$X = \$\ 664.602.01$$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1		0,35%			
2	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO+INTERÉS	SALDO
3	0	5.000.000			=B3
4	1	(1.250.000)	=E3*$B$1	=B4+C4	=E3+D4
5	2	(1.250.000)			
6	3	(1.250.000)			
....	.....	.....	.....	.....	.....
13	10	100			
14	11				
15	12				

En la celda B1 escribimos la tasa de interés del 0,35%. En la celda B3 escribimos el valor del depósito inicial y en las celdas B4, B5 y B6 registramos los retiros y en la celda B13 escribimos un valor arbitrario que es la incógnita. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, depósito más interés y saldo al final del período. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E
1		0,35%			
2	NO	DEPOSITO	INTERES	DEPOSITO+INTERES	SALDO
3	0	5.000.000,00			5.000.000,00
4	1	(1.250.000,00)	17.500,00	(1.232.500,00)	3.767.500,00
5	2	(1.250.000,00)	13.186,25	(1.236.813,75)	2.530.686,25
6	3	(1.250.000,00)	8.857,40	(1.241.142,60)	1.289.543,65
7	4		4.513,40	4.513,40	1.294.057,05
8	5		4.529,20	4.529,20	1.298.586,25
9	6		4.545,05	4.545,05	1.303.131,31
10	7		4.560,96	4.560,96	1.307.692,27
11	8		4.576,92	4.576,92	1.312.269,19
12	9		4.592,94	4.592,94	1.316.862,13
13	10	100,00	4.609,02	4.709,02	1.321.571,15
14	11		4.625,50	4.625,50	1.326.196,65
15	12		4.641,69	4.641,69	1.330.838,34

EJERCICIO 22. Un lote de terreno tiene un precio de contado de $ 30.000.000. El dueño está dispuesto a financiarlo pero requiere de un pago inicial al momento de cerrarse la negociación y acepta que el saldo se pague con un plazo máximo de un año. Sí usted tiene capacidad para pagar dos cuotas iguales en los meses 6 y 12 de $ 12.000.000 cada una, calcular el valor del pago inicial si la tasa de financiación es del 2,5% mensual.

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

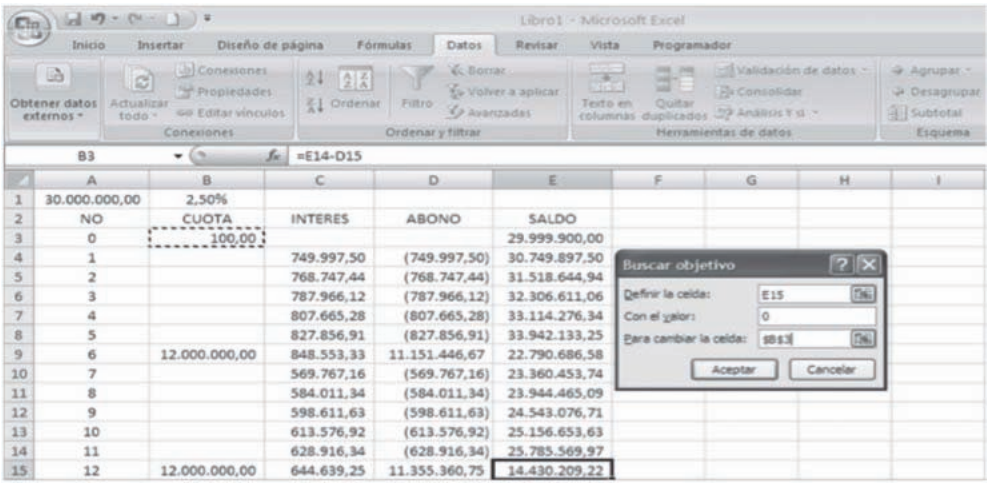
$$30.000.000(1 + 0.025)^{12} = X(1 + 0.025)^{12} + 12.000.000(1 + 0.025)^{6} + 12.000.000$$

$$X = \$\ 10.729.766.99$$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	30.000.000	2,5%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	100			=A1−B3
4	1		=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
....	.....	.....	.....	.....	.....
9	6	12.000.000			
....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12	12.000.000			

En la celda A1 escribimos el valor del lote de terreno y en la celda B1 la tasa de interés. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. En la celda B3 escribimos un valor arbitrario que corresponde al pago inicial y es la incógnita. En las celdas B9 y B15 registramos los pagos. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E
1	30.000.000,00	2,50%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	100,00			29.999.900,00
4	1		749.997,50	(749.997,50)	30.749.897,50
5	2		768.747,44	(768.747,44)	31.518.644,94
6	3		787.966,12	(787.966,12)	32.306.611,06
7	4		807.665,28	(807.665,28)	33.114.276,34
8	5		827.856,91	(827.856,91)	33.942.133,25
9	6	12.000.000,00	848.553,33	11.151.446,67	22.790.686,58
10	7		569.767,16	(569.767,16)	23.360.453,74
11	8		584.011,34	(584.011,34)	23.944.465,09
12	9		598.611,63	(598.611,63)	24.543.076,71
13	10		613.576,92	(613.576,92)	25.156.653,63
14	11		628.916,34	(628.916,34)	25.785.569,97
15	12	12.000.000,00	644.639,25	11.355.360,75	14.430.209,22

EJERCICIO 23. Un concesionario de autos vende un motor de camión en $ 12.000.000. Financiado exige una cuota inicial del 20% y el saldo en tres cuotas en los meses 4, 6 y 12 respectivamente, de tal forma que el segundo pago sea $ 200.000 más que el primero y el tercer pago sea $ 100.000 más que el segundo. Si se cobra una tasa de interés del 3% mensual, ¿cuál es el valor de los pagos?

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

$$12.000.000(1.03)^{12} = 2.400.000(1.03)^{12} + X(1.03)^{8} + (X + 200.000)(1.03)^{6} + (X + 300.000)$$

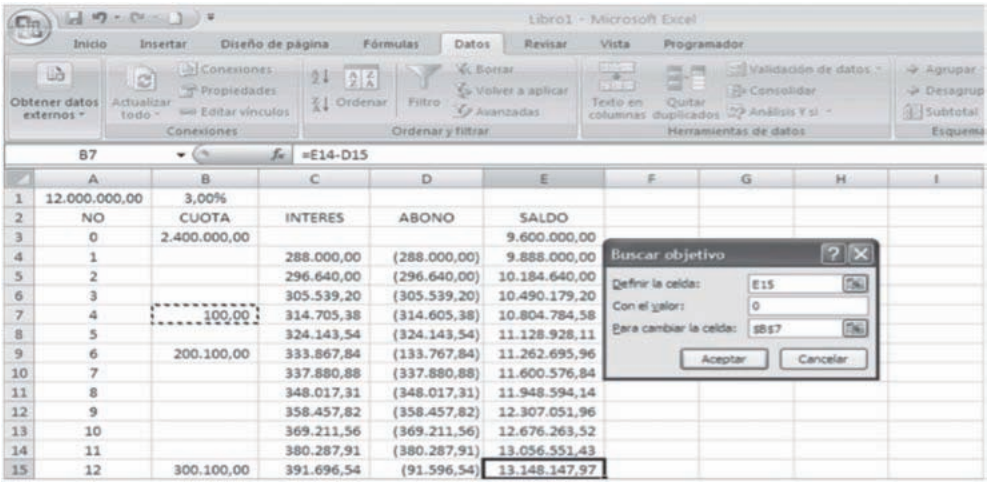
Pago en el mes 4 = $ 3.799.239.78 Pago en el mes 6 = $ 3.999.239.78

Pago en el mes 12 = $ 4.099.239.78

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	12.000.000	3,0%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	=0.20*A1			=A1−B3
4	1		=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
....	.....	.....	.....	.....	.....
7	4	100			
....	.....	.....	.....	.....	.....
9	6	=B7+200.000			
....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12	=B9+100.000			

En la celda A1 escribimos el valor del motor, en la celda B1 la tasa de interés y en B3 el valor de la cuota inicial. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. En la celda B7 escribimos un valor arbitrario que corresponde al primer pago y en las celdas B9 y B15 registramos los otros pagos. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E
1	12.000.000,00	3,00%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	2.400.000,00			9.600.000,00
4	1		288.000,00	(288.000,00)	9.888.000,00
5	2		296.640,00	(296.640,00)	10.184.640,00
6	3		305.539,20	(305.539,20)	10.490.179,20
7	4	100,00	314.705,38	(314.605,38)	10.804.784,58
8	5		324.143,54	(324.143,54)	11.128.928,11
9	6	200.100,00	333.867,84	(133.767,84)	11.262.695,96
10	7		337.880,88	(337.880,88)	11.600.576,84
11	8		348.017,31	(348.017,31)	11.948.594,14
12	9		358.457,82	(358.457,82)	12.307.051,96
13	10		369.211,56	(369.211,56)	12.676.263,52
14	11		380.287,91	(380.287,91)	13.056.551,43
15	12	300.100,00	391.696,54	(91.596,54)	13.148.147,97

EJERCICIO 24. Un inversionista deposita hoy en una cuenta de ahorros $ 1.000.000. A los 3 meses retira $ 500.000 y a los 5 meses deposita $ 250.000. Calcular el saldo disponible dentro de 12 meses, si le reconocen una tasa de interés del 2% mensual.

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

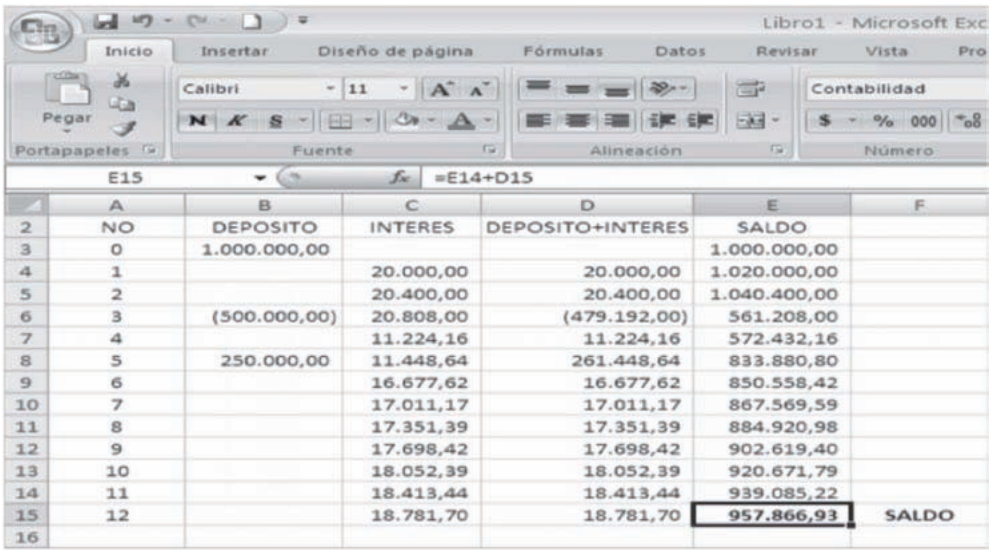
$$500.000(1 + 0.02)^9 + S = 1.000.000(1 + 0.02)^{12} + 250.000(1 + 0.02)^7$$

$$S = \$\ 957.866.93$$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1		2%			
2	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO + INTERÉS	SALDO
3	0	1.000.000			=B3
4	1		=E3*$B$1	=B4+C4	=E3+D4
5	2				
6	3	(500.000)			
7	4				
8	5	250.000			
....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12				

En la celda B1 escribimos la tasa de interés del 2,0%. En la celda B3 escribimos el valor del depósito inicial, en la celda B6 registramos el retiro de $ 500.000 y en la celda B8 escribimos el valor del nuevo depósito. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, depósito más interés y saldo al final del período. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y encontramos en la celda E15 un saldo de $ 957.866.93.



	A	B	C	D	E	F
2	NO	DEPOSITO	INTERES	DEPOSITO+INTERES	SALDO	
3	0	1.000.000,00			1.000.000,00	
4	1		20.000,00	20.000,00	1.020.000,00	
5	2		20.400,00	20.400,00	1.040.400,00	
6	3	(500.000,00)	20.808,00	(479.192,00)	561.208,00	
7	4		11.224,16	11.224,16	572.432,16	
8	5	250.000,00	11.448,64	261.448,64	833.880,80	
9	6		16.677,62	16.677,62	850.558,42	
10	7		17.011,17	17.011,17	867.569,59	
11	8		17.351,39	17.351,39	884.920,98	
12	9		17.698,42	17.698,42	902.619,40	
13	10		18.052,39	18.052,39	920.671,79	
14	11		18.413,44	18.413,44	939.085,22	
15	12		18.781,70	18.781,70	957.866,93	SALDO
16						

EJERCICIO 25. Dos meses después de abrir una cuenta de ahorros, un cliente deposita $ 800.000, retira $ 200.000 a los 6 meses y hace un nuevo depósito dentro de 8 meses de $ 150.000. ¿En cuánto tiempo tendrá disponible $ 975.872.78 si le pagan una tasa de interés del 3% mensual?

Ecuación de valor con fecha focal en el momento 0.

En este caso, como la incógnita es el exponente *n* correspondiente a la fecha del saldo, se ubica la fecha focal en el momento cero. La única ecuación de valor que se puede resolver fácilmente es la planteada en esta fecha.

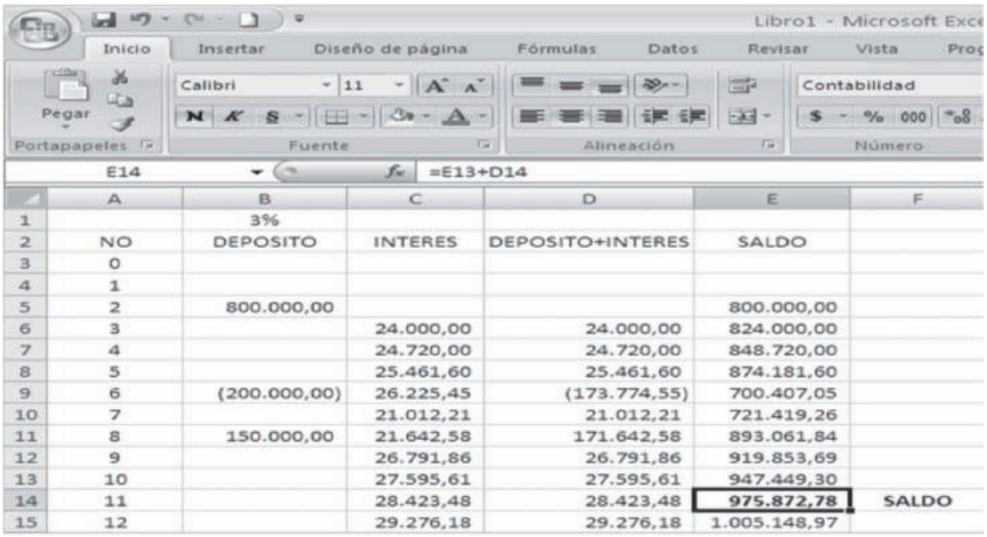
$$\frac{800.000}{(1+0.03)^{2}}+\frac{150.000}{(1+0.03)^{8}}=\frac{200.000}{(1+0.03)^{6}}+\frac{975.872.78}{(1+0.03)^{n}}$$

$n = 11$ meses

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1		3%			
2	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO INTERÉS	SALDO
3	0				
4	1				
5	2	800.000			=B5
6	3		=E5*$B$1	=B6+C6	=E5+D6
7	4				
8	5				
9	6	(200.000)			
10	7				
11	8	150.000			
....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12				

En la celda B1 escribimos la tasa de interés del 3%. En la celda B5 escribimos el depósito inicial de $ 800.000, en la celda B9 registramos el retiro de $ 200.000 y en la celda B11 el depósito de $ 150.000. En las celdas C6, D6 y E6 calculamos intereses, depósito más interés y saldo al final del período. Copiamos las fórmulas de las celdas C6, D6 hasta encontrar la fecha en que el saldo sea igual a $ 975.872.78.



	A	B	C	D	E	F
1		3%				
2	NO	DEPOSITO	INTERES	DEPOSITO+INTERES	SALDO	
3	0					
4	1					
5	2	800.000,00			800.000,00	
6	3		24.000,00	24.000,00	824.000,00	
7	4		24.720,00	24.720,00	848.720,00	
8	5		25.461,60	25.461,60	874.181,60	
9	6	(200.000,00)	26.225,45	(173.774,55)	700.407,05	
10	7		21.012,21	21.012,21	721.419,26	
11	8	150.000,00	21.642,58	171.642,58	893.061,84	
12	9		26.791,86	26.791,86	919.853,69	
13	10		27.595,61	27.595,61	947.449,30	
14	11		28.423,48	28.423,48	975.872,78	SALDO
15	12		29.276,18	29.276,18	1.005.148,97	

EJERCICIO 26. El señor Pedro Picapiedra tiene en venta su vivienda que tiene un valor de $ 50.000.000 y recibe dos ofertas:

La primera oferta es: una cuota inicial de $ 10.000.000 y dos pagos iguales en los meses 6 y 12 por $ 22.500.000.

La segunda oferta consiste en recibir un pago único dentro de un año de $ 67.244.441.

¿Qué oferta debe aceptar el señor Picapiedra, si su tasa de oportunidad es del 3% mensual?

Para poder tomar una decisión se requiere comparar las ofertas en una misma fecha. Para este caso hemos escogido el momento cero.

Primera oferta: calculamos el valor presente equivalente.

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

$$P(1 + 0.03)^{12} = 10.000.000(1 + 0.03)^{12} + 22.500.000(1 + 0.03)^{6} + 22.500.000$$

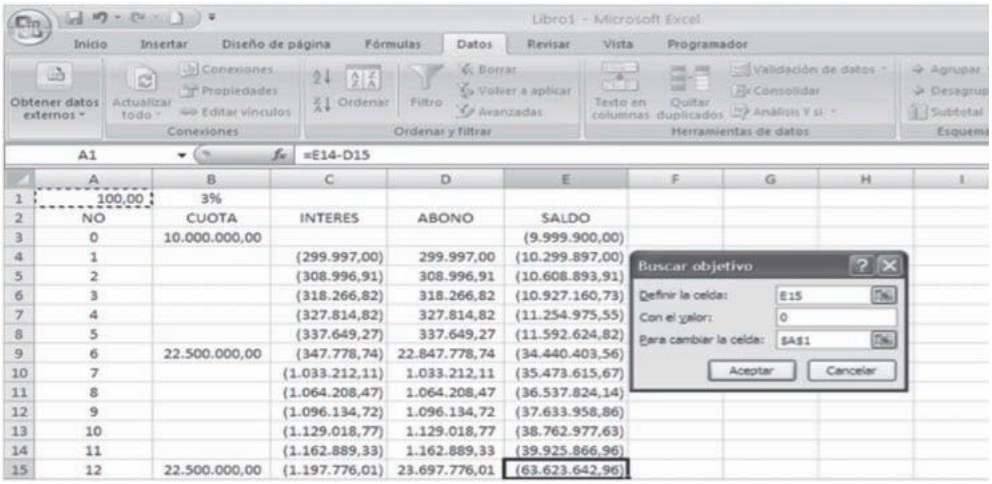
$$P = \$\ 44.624.443.08$$

Este valor corresponde al valor presente equivalente a los tres pagos de $ 10.000.000 en el día de hoy y dos pagos de $ 22.500.000 en los meses 6 y 12 respectivamente.

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	100	3,0%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	10.000.000			=A1−B3
4	1		=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
....	.....	.....	.....	.....	.....
9	6	22.500.000			
....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12	22.500.000			

En la celda A1 escribimos un valor arbitrario que corresponde al valor de la vivienda y en la celda B1 la tasa de interés. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. En las celdas B3, B9 y B15 escribimos los pagos. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E
1	100,00	3%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	10.000.000,00			(9.999.900,00)
4	1		(299.997,00)	299.997,00	(10.299.897,00)
5	2		(308.996,91)	308.996,91	(10.608.893,91)
6	3		(318.266,82)	318.266,82	(10.927.160,73)
7	4		(327.814,82)	327.814,82	(11.254.975,55)
8	5		(337.649,27)	337.649,27	(11.592.624,82)
9	6	22.500.000,00	(347.778,74)	22.847.778,74	(34.440.403,56)
10	7		(1.033.212,11)	1.033.212,11	(35.473.615,67)
11	8		(1.064.208,47)	1.064.208,47	(36.537.824,14)
12	9		(1.096.134,72)	1.096.134,72	(37.633.958,86)
13	10		(1.129.018,77)	1.129.018,77	(38.762.977,63)
14	11		(1.162.889,33)	1.162.889,33	(39.925.866,96)
15	12	22.500.000,00	(1.197.776,01)	23.697.776,01	(63.623.642,96)

Segunda oferta: calculamos el valor presente equivalente.

$$P = \frac{67.244.441}{(1 + 0.03)^{12}} = \$\ 47.163.897.97$$

En Excel: $= VA\ (3\%;\ 12;\ 0;\ -67.244.441)$

Los resultados obtenidos nos indican que ninguna de las dos ofertas le conviene al señor Picapiedra.

EJERCICIO 27. Un inversionista tiene una aceptación bancaria por $ 10.000.000 a 90 días y faltando 36 días para su vencimiento la vende a un comisionista de bolsa, quien le cobra una tasa del 17% anual. ¿Cuánto recibirá el inversionista por la venta de la aceptación bancaria?

$$P = \frac{10.000.000}{(1 + 0.17)^{\frac{36}{360}}} = \$\ 9.844.222.34$$

En Excel: $= VA\ (17\%;\ 36/360;\ 0;\ -10.000.000)$

EJERCICIO 28. Calcular el valor futuro de $ 30.000.000 prestados a 4 meses, si la tasa de interés del primer mes es del 1.50% y se espera que aumente cada mes un 0.10%.

Este es el caso del cálculo del valor futuro con tasa variable.

Primer mes: $i = 1.50\%$ Tercer mes: $i = 1.70\%$

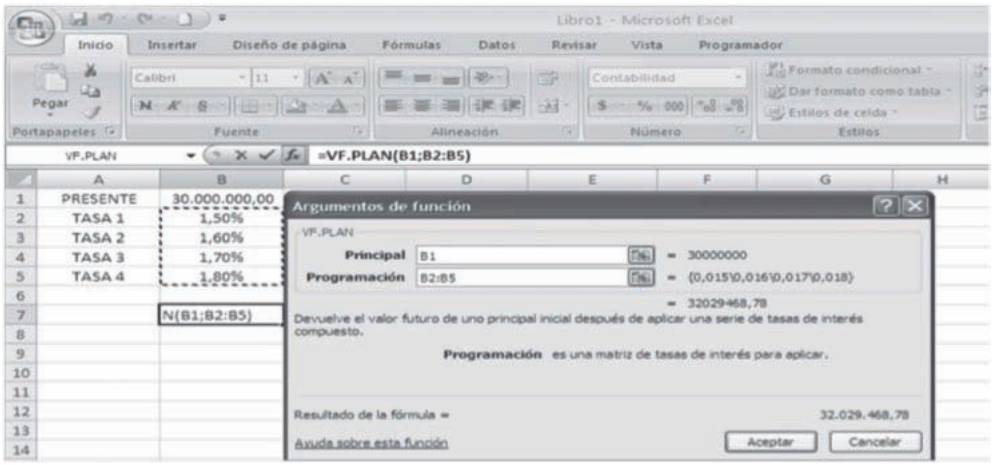
Segundo mes: $i = 1.60\%$ Cuarto mes: $i = 1.80\%$

$$F = P\,(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3)(1 + i_4)$$

$$F = 30.000.000(1 + 0.015)(1 + 0.016)(1 + 0.017)(1 + 0.018)$$

$$F = \$\ 32.029.468.78$$

Hoja de cálculo Excel



CAPÍTULO 4

Tasas de interés

Los cínicos son los que conocen
el precio de todo, pero no
conocen el valor de nada.

Oscar Wilde

Si quieres conocer el
valor del dinero, trata
de conseguirlo prestado.

Benjamín Franklin

0. Introducción

En términos prácticos, la tasa de interés es el precio del dinero tanto para el que lo necesita porque paga un precio por tenerlo, como para el que lo tiene porque cobra un precio por prestárselo al que lo requiere. El dinero es una "*mercancía*" que tiene un precio y, como tal, su valor lo fija el mercado como resultado de la interacción entre la oferta y demanda.

La tasa de interés está presente cuando se abre una cuenta de ahorros, se utiliza una tarjeta de crédito, o se hace un préstamo de dinero. Su nivel debe ser la preocupación diaria de cualquier persona o empresa, porque mide tanto el rendimiento como el costo del dinero.

El nivel de las tasas de interés está afectado por diversas variables, a saber: la inflación, la devaluación, la oferta y demanda y el riesgo empresarial. Estas variables, en conjunto, o individualmente, determinan en un momento determinado el costo del dinero.

1. Tasa nominal

La tasa nominal, como su nombre lo indica, es una tasa de referencia que existe solo de nombre porque no nos determina la verdadera tasa de interés que se cobra en una operación financiera.

1.1 Formas de expresar la tasa nominal

En el sistema financiero colombiano las tasas nominales se expresan de diferentes formas:

1.1.1 En Bancos Comerciales, Compañías de Financiamiento Comercial y Corporaciones Financieras:

Estas instituciones financieras suelen utilizar la tasa nominal para referenciar las tasas de interés en sus operaciones de ahorro y crédito;es asi como en algunos créditos expresan la tasa de interés para un período anual e indican cada cuanto tiempo menor de un año se van a hacer las liquidaciones de los intereses. Visto de otra forma, expresan la tasa anual e indican que parte de ella se va a liquidar periódicamente. Por ejemplo:

24% nominal anual con capitalización trimestral.

24% anual capitalizable trimestralmente.

24% capitalizable trimestralmente.

24% trimestre vencido. (24% TV)

Las expresiones anteriores son equivalentes, a saber: indudablemente, la primera información es la más completa, no obstante que en el lenguaje financiero se acude muchas veces a las simplificaciones como se muestra en las otras tres expresiones. En la segunda se eliminó el término nominal porque se entiende que si la tasa es capitalizable se trata de una nominal ya que las efectivas no se capitalizan sino que resultan de capitalizar las nominales. En la tercera expresión se eliminó el término anual, porque si no se dice lo contrario se asume que la tasa es anual. La cuarta expresión es la más simplificada y corresponde a la forma más usada en el sistema financiero colombiano. Estas cuatro expresiones equivalentes indican que la operación financiera, que puede ser de ahorro o de crédito, se realiza a una tasa de interés anual del 24% pero se cobrará la cuarta parte de ella (6%) al final de cada trimestre.

La tasa nominal expresada de esta forma, comprende:

1. Valor anual de la tasa
2. Frecuencia de liquidación de los intereses (día, mes, trimestre, etc)
3. Modalidad de liquidación de intereses (vencidos o anticipados).

1.1.2 Tasa nominal referenciada con la D.T.F.

En julio de 1988 el gobierno colombiano consideró necesario calcular un indicador que midiera lo que le costaba a las entidades financieras el dinero que captaban del público, y que hoy día constituye la base para casi todas las operaciones financieras en

Colombia, que es la *D.T.F*. Esta es la principal tasa de referencia para las transacciones financieras y comerciales en nuestro país. Es común, entonces, cuando se acude a un crédito bancario o comercial encontrar que la tasa del crédito aparece referenciada con la D.T.F. más unos puntos porcentuales, por ejemplo, (DTF + 4%), siendo la DTF el costo promedio del dinero para las entidades financieras, y el 4% su margen de intermediación. Debido a su importancia, este tema se tratará en detalle en el apartado 14, de este capítulo.

1.1.3 Tasa nominal referenciada con la UVR

En Colombia, en la mayoría de los créditos de vivienda, la tasa de interés viene referenciada con la UVR. Por ejemplo:

UVR + 12% siendo UVR = tasa de inflación acumulada de los últimos 12 meses.

12% = tasa remuneratoria.

2. Tasa efectiva[1]

Es la tasa que mide el costo efectivo de un crédito o la rentabilidad efectiva de una inversión, y resulta de capitalizar o reinvertir los intereses que se causan cada período. Cuando se habla de tasa efectiva se involucra el concepto del interés compuesto, ya que ésta resulta de la reinversión periódica de los intereses.

Hasta el nacimiento del sistema UPAC (1972), en el sistema financiero colombiano sólo se utilizaban las tasas de interés nominales anuales con períodos de liquidación de intereses menores al año. La tasa efectiva sólo era una curiosidad de los estudiosos de las Matemáticas Financieras. La necesidad de calcular el valor de la UPAC todos los días, condujo a su adopción definitiva en todos los cálculos. La tasa efectiva aporta claridad en cuanto al costo financiero para los usuarios de créditos y al rendimiento financiero de los ahorradores. En el decreto nº. 1229 de 1972 se definió la tasa efectiva de interés como aquella que, *aplicada con periodicidad diferente a un año, de acuerdo con las fórmulas de interés compuesto, produce exactamente el mismo resultado que la tasa anual* (Icav, 1992).

La relación que existe entre la tasa nominal y la tasa efectiva, es la misma que existe entre el interés simple y el interés compuesto.

3. Tasa periódica

Es la tasa de interés que se aplica al valor del crédito, en consecuencia, es la tasa de interés que se utiliza para calcular los intereses para un periódo determinado. Son ejemplos de tasas periódicas: 1% diario, 2% mensual, 10% trimestral, 15% semestral y 20% anual. Como veremos más adelante la tasa periódica la podemos calcular con base en la tasa nominal y con base en la tasa efectiva.

[1] La tasa nominal es la que pacta, mientras que la tasa efectiva es la que paga.

Ejemplo 4.1

Se deposita $ 1.000.000 en el día de hoy, en una entidad que reconoce una tasa de interés del 3% mensual. ¿Cuánto se tendrá acumulado después de 12 meses, si los intereses no se retiran?

Conocemos del problema la siguiente información:

$P = \$1.000.000$ $\quad$ $i = 3\%$ mensual

$n = 12$ meses $\quad$ $F = ?$

Análisis del problema con interés simple

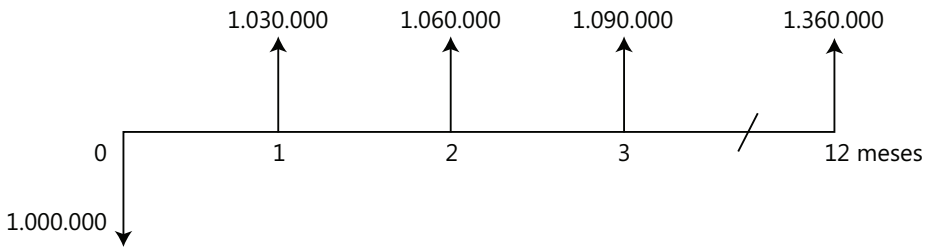
Aplicamos la fórmula de interés simple:

$$F = P(1 + ni) \tag{1.4}$$

$$F = 1.000.000\ (1 + 12 \times 0.03)$$

$$F = \$\ 1.360.000$$

Construimos el flujo de caja de la operación:



En el interés simple los intereses causados y no pagados en cada período no generan nuevos intereses. Como se observa en el flujo de caja, los intereses cada mes son de $ 30.000 que se van acumulando pero sin generar nuevos intereses, por lo tanto, los intereses de los 12 meses serán de $ 360.000 que sumados al capital inicial de $ 1.000.000 dan un valor acumulado de $ 1.360.000. Se observa que los $ 360.000 de intereses resultan de sumar $ 30.000 doce veces, que implica, a su vez, sumar valores ubicados en diferentes fechas y esto viola el principio del valor del dinero en el tiempo, porque son valores con diferente poder adquisitivo.

Para esta operación hacemos el siguiente razonamiento: si se depositan $ 1.000.000 y después de 12 meses se tienen acumulados $ 1.360.000, el rendimiento anual es el siguiente:

$$i = \frac{F}{P} - 1 \text{ que resulta de } i = \frac{F}{P} = \frac{F - P}{P}$$

$$i = \frac{1.360.000}{1.000.000} - 1$$

$$i = 0.36 = 36\% \text{ anual nominal}$$

Visto de otra forma, la tasa de interés del 36% anual nominal resulta de multiplicar la tasa de interés periódica (3% mensual) por el número de períodos al año (12). De este razonamiento resulta *la ecuación de la tasa nominal*.

$$J = \text{Tasa periódica } (i) \times \text{nº. de períodos } (n) \qquad (4.1)$$

Donde: J = tasa nominal i = tasa periódica n = nº. de períodos

4. Relación entre la tasa nominal y la tasa periódica

Tal como se observó en el análisis anterior, existe una relación directa y sencilla entre la tasa nominal y la tasa periódica. La tasa nominal la podemos calcular a partir de una tasa de interés periódica, simplemente multiplicando ésta última por el número de períodos que haya en el lapso que se ha estipulado para la tasa nominal. Por ejemplo, si la tasa periódica es del 2% mensual, la tasa nominal será del 24% anual MV, que resulta de multiplicar 2% por 12 períodos mensuales. Haciendo la operación inversa, la tasa periódica se puede calcular a partir de la tasa nominal dividiéndola entre el número de períodos. Por ejemplo, una tasa nominal del 24% anual MV da origen a una tasa del 2.0% mensual, que resulta de dividir 24% entre 12 períodos mensuales.

Análisis del problema con interés compuesto

Aplicamos la fórmula del interés compuesto.

$$F = P(1 + i)^n \qquad (3.1)$$

$$F = 1.000.000(1 + 0.03)^{12}$$

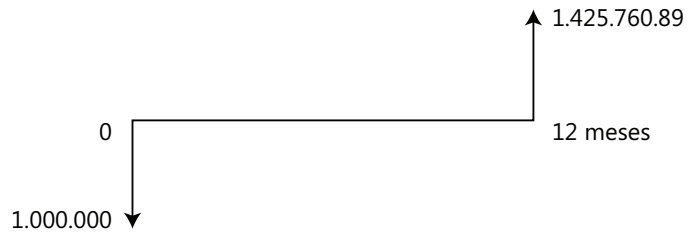
$$F = \$\ 1.425.760.89$$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 1.000.000 PV EXE	VDT
1.000.000 +/- PV	(-) 1.000.000 PV	(-) 1.000.000 F3	3 1% EXE	1.000.000 +/- VA
3 i%	3 i%	3 F2	12 n EXE	3 % IA
12 n	12 n	12 F1	FV SOLVE	12 N
COMP FV	COMP FV EXE	COMP F5		VF

En Excel: = VF (tasa; nper; pago; VA; tipo)

= VF (3%; 12; 0; −1.000.000)

El flujo de caja de la operación financiera es:



Para esta situación hacemos el siguiente razonamiento: si se invierten en el día de hoy $ 1.000.000 y después de 12 meses se tiene un valor acumulado de $ 1.425.760.89, el rendimiento efectivo es:

$$i = \frac{F}{P} - 1$$

$$i = \frac{1.425.760.89}{1.000.000} - 1$$

$$i = 0.4258 = 42.58\% \text{ efectiva anual.}$$

La tasa de interés obtenida es diferente al 36% anual. ¿Cuál es la explicación, si es la misma operación financiera, con el mismo capital, la misma tasa de interés periódica y el mismo número de períodos? La explicación la proporciona el tratamiento que se le da a los intereses. El interés simple supone que los intereses se acumulan si no se pagan, pero no generan nuevos intereses, mientras que el interés compuesto supone su capitalización o reinversión periódica y, por consiguiente, generación de interés sobre interés. Por esta razón, la tasa nominal supone interés simple y la tasa efectiva supone interés compuesto.

5. Diferencia entre la tasa nominal y la tasa efectiva

Para entender mejor la diferencia entre tasa nominal y tasa efectiva solamente tenemos que preguntarnos: ¿qué sucede con los intereses cuando se liquidan? Si los intereses al momento de recibirlos se reinvierten, se hace referencia a la tasa efectiva, pero si el inversionista está esperando su fecha de liquidación para gastárselos, se hace referencia a la tasa nominal o de interés simple, porque los intereses de los períodos siguientes serán liquidados sobre el mismo capital.

Bajo el esquema prestamista – prestatario, la diferencia entre la tasa nominal y la tasa efectiva está en que para el prestamista existe la posibilidad de reinvertir los intereses que recibe y para el prestatario se presenta un costo de oportunidad al no poder trabajar los intereses que le paga al prestamista, tal como se explicó en el inciso 4, cap. 3 de interés compuesto. Este razonamiento implica que cuando una persona acude a un crédito, sea bancario o comercial, el hecho de tener que pagar intereses en períodos menores al año, lo hace incurrir en un costo de oportunidad que se refleja en la diferencia entre el valor de la tasa nominal y la tasa efectiva. Nos atrevemos a decir que la diferencia entre la tasa nominal y la tasa efectiva es el costo de oportunidad.

Suponer que el 3% mensual es equivalente al 36% anual, es ignorar el potencial de reinversión de los intereses, en el que se basa el interés compuesto.

6. Ecuación de la tasa efectiva

Una vez establecida la relación directa entre la tasa nominal y la tasa periódica, nos interesa, ahora, desarrollar una ecuación que nos permita hacer equivalencias entre las tasas periódicas.

Supongamos que se deposita $ 1.000.000 durante un año, en una cuenta que reconoce el 36% capitalizable mensualmente. Se desea conocer el valor acumulado después del año.

Conocemos: P = $ 1.000.000 n = 1 año

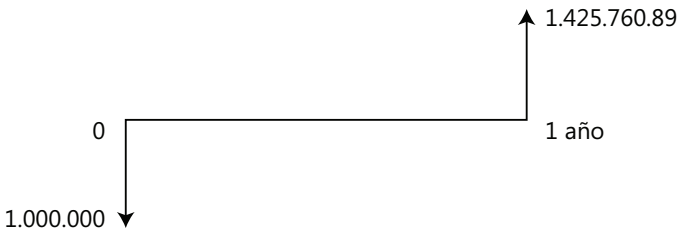
$$i = \frac{0.36}{12} = 0.03 = 3\%\text{mensual} \qquad F = ?$$

$$F = 1.000.000\ (1 + 0.03)^{12}$$

$$F = \$\ 1.425{,}760.89$$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 1.000.000 PV EXE	VDT
1.000.000 +/- PV	(-) 1.000.000 PV	(-) 1.000.000 F3	3 1% EXE	1.000.000 +/- VA
3 i%	3 i%	3 F2	12 n EXE	3 % IA
12 n	12 n	12 F1	FV SOLVE	12 N
COMP FV	COMP FV EXE	COMP F5		VF

Con el siguiente razonamiento calculamos el rendimiento efectivo de la operación: si se invierten $ 1.000.000 y después de 1 año se tiene un valor futuro acumulado de $ 1.425.760, podemos calcular el rendimiento efectivo anual:



$$i = \frac{F}{P} - 1$$

$$i = \frac{1.425.760.89}{1.000.000} - 1$$

i = 0.4258 = 42.58% efectivo anual.

Podemos decir entonces: $1.425.760.89 = 1.000.000(1 + 0.03)^{12}$.

La cual se puede descomponer en: $1.000.000 + 425.760.89 = 1.000.000(1 + 0.03)^{12}$.

Donde 425.760.89 es el resultado de multiplicar 1.000.000 por la tasa efectiva del 0.4258, es decir:

$$1.000.000 + 1.000.000 \times 0.4258 = 1.000.000(1 + 0.03)^{12}$$

Si se reemplazan estos valores por los símbolos, tenemos:

$$P + P(TE) = P(1 + i)^n$$

$$P(1 + TE) = P(1 + i)^n$$

$$1 + TE = (1 + i)^n$$

$$TE = (1 + i)^n - 1 \qquad (4.2)$$

Donde: TE = tasa efectiva a calcular.

i = tasa periódica.

n = número de veces que se liquida la tasa periódica en el período expresado en la tasa efectiva a calcular.

Esta fórmula (4.2) es conocida como la *ecuación de la tasa efectiva* y es la que permite calcular equivalencias entre tasas de interés periódicas.

TEMA DE INTERÉS

TASA EFECTIVA

En referencia al tema de la tasa efectiva de interés, es importante tener la posibilidad de entender la información que se maneja en nuestro sistema financiero y comercial sobre las tasas de interés.

Algunos sectores conciben la *tasa efectiva anual* como única tasa de interés efectiva y las tasas aplicadas en períodos de menor duración al año, simplemente como tasas periódicas (por ejemplo, 1% diario, 2% mensual, 7% trimestral, 18% semestral, etc.). Sin embargo, si la tasa efectiva es la que resulta de capitalizar una tasa de interés en períodos de menor duración que el estipulado para la tasa efectiva, las tasas periódicas también son tasas efectivas. Así, por ejemplo, al darse para un crédito una tasa del 2% mensual surge la pregunta: ¿Cuál tasa periódica diaria se utilizó para llegar a la tasa del 2% mensual? aplicando la ecuación de la tasa efectiva, en la que TE = 2% mensual y n = 30 días, se obtiene una tasa efectiva diaria igual a 0.066%, lo que indica que si se aplica esta tasa diaria sobre una inversión y los intereses diarios se capitalizan durante 30 días obtendríamos un rendimiento del 2% mensual. En consecuencia, en este texto a la tasa periódica, que es la que se utiliza para calcular los intereses para un período determinado, la denominaremos *tasa efectiva periódic*a y no solamente tasa periódica, como hasta ahora la hemos venido utilizando.

7. Relación entre las tasas efectivas periódicas

A diferencia de las tasas nominales, las tasas efectivas periódicas no se fraccionan (no se dividen entre el número de períodos), ni se pueden obtener multiplicando la tasa efectiva periódica de menor período por el número de períodos. La tasa efectiva periódica resulta de hacer la capitalización real o virtual de los intereses periódicos. La forma de calcular una tasa efectiva periódica equivalente a otra efectiva periódica, corresponde a los casos de equivalencia de intereses, o tasas equivalentes, que pasamos a analizar a continuación.

Para desarrollar los ejercicios aplicando la ecuación de la tasa efectiva (4.2) utilizaremos los siguientes símbolos:

TEA = tasa efectiva anual.

TES = tasa efectiva semestral.

TET = tasa efectiva trimestral

TEM = tasa efectiva mensual

TED = tasa efectiva diaria

Ejemplo 4.2

El señor Pérez le presta a un amigo $ 1.000.000 durante tres meses a una tasa de interés del 36% con capitalización mensual. Se acuerda cancelar el valor del préstamo más los intereses al final del trimestre. Calcular el valor acumulado al final de la operación. ¿Qué tasa de interés efectiva trimestral arrojó la operación?

Calculamos la tasa efectiva periódica (i) dividiendo la tasa nominal.

$$i = \frac{0.36}{12} = 0.03 = 3\% \text{ mensual}$$

$$F = P(1 + i)^n \qquad (3.1)$$

$$F = 1.000.000(1 + 0.03)^3$$

$$F = 1.000.000(1.0927)$$

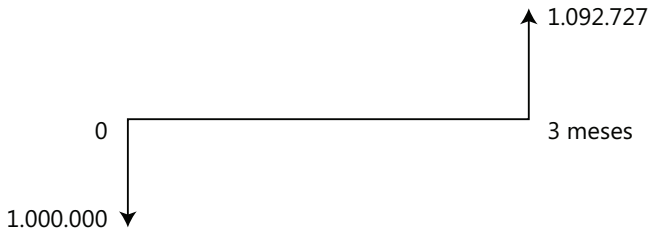
$$F = \$\ 1.092.727$$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 1.000.000 PV EXE	VDT
1.000.000 +/- PV	(-) 1.000.000 PV	(-) 1.000.000 F3	3 1% EXE	1.000.000 +/- VA
3 i%	3 i%	3 F2	3 n EXE	3 % IA
3 n	3 n	3 F1	FV SOLVE	3 N
COMP FV	COMP FV EXE	COMP F5		VF

En Excel: = VF (tasa; nper; pago; VA; tipo)

= VF (3%; 3; 0; −1.000.000)

Si se invierten $ 1.000.000 y después de tres meses se reciben $ 1.092.727, el rendimiento efectivo es:



$$i = \frac{F}{P} - 1$$

$$i = \frac{1.092.727}{1.000.000} - 1$$

$$i = 0.0927 = 9.27\% \text{ trimestral.}$$

Esto indica que la tasa efectiva del 3% mensual es equivalente a una tasa efectiva del 9.27% trimestral.

Apliquemos la ecuación de la tasa efectiva para encontrar directamente la tasa efectiva trimestral equivalente a una tasa efectiva mensual.

$$TET = (1 + i)^n - 1 \tag{4.2}$$

$$TET = (1 + 0.03)^3 - 1$$

$$TET = 9.27\% \text{ trimestral.}$$

¿Qué pasaría, si el amigo le propone al señor Pérez cancelarle al final del trimestre solamente $ 1.090.000? Simplemente le estaría proponiendo realizar una operación con interés simple. En este caso el señor Pérez incurriría en un costo de oportunidad al no tener la posibilidad de reinvertir el valor de los intereses mensuales, al menos, a la misma tasa de interés del 3% mensual. Si el señor Pérez acepta recibir $ 1.090.000 en lugar de $ 1.092.727 se ganaría el 9% trimestral, que es una tasa nominal y no el 9.27% trimestral que es una tasa efectiva. Además, el hecho de recibir el señor Pérez un solo pago de $ 1.092.767 al final del trimestre, equivale a recibir $ 30.000 mensuales que se supone los reinvierte a la misma tasa del 3% mensual, lo que significa que la tasa efectiva considera la capitalización (convertir los intereses en capital para que generen nuevos intereses) de los intereses en los períodos en que no se pagan.

8. Tasas equivalentes

Dos tasas de interés son equivalentes cuando ambas, obrando en condiciones diferentes, producen la misma tasa efectiva anual o el mismo valor futuro (*García, 1997*). El concepto de "*operar en condiciones diferentes*" hace referencia a que ambas capitalizan en períodos diferentes, o que una de ellas es vencida y la otra anticipada. Esto indica, por ejemplo, que para una tasa mensual existe una mensual anticipada equivalente, una tasa trimestral vencida equivalente, una tasa trimestral anticipada equivalente, etc. Esta equivalencia de tasas también se presenta entre tasas efectivas y nominales, o entre tasas nominales, es decir, para una tasa mes vencido, existirá una tasa trimestre vencido equivalente, una tasa trimestre anticipado equivalente, etc.

Si sobre una inversión se aplica una tasa mensual durante 12 meses y nos produce el mismo resultado que aplicar sobre la misma inversión una tasa anual durante un año, estas dos tasas (la mensual y la anual) son tasas equivalentes. Esta operación también es conocida como *equivalencia de intereses*.

Hoy en día, cuando en el sistema financiero generalmente impera una babel de tasas de interés: nominales, efectivas, DTF, tasas anticipadas, etc, que constituyen el marco de referencia del costo de los créditos, es importante tener una manera de hacerlas semejantes. Esto se hace calculando una *tasa efectiva anual (TEA),* que se define como la tasa equivalente, si la capitalización se hiciera sólo una vez al año (*Bodie y Merton, 1999*).

Jaime García (1997), propone los siguientes casos, cuando dada una tasa de interés se trata de hallar otra tasa equivalente:

	Dada	**Hallar**
Caso 1.	Efectiva	Efectiva
Caso 2.	Efectiva	Nominal
Caso 3.	Nominal	Efectiva
Caso 4.	Nominal	Nominal

Cada uno de estos casos se analizarán con un ejemplo, y para cada uno de ellos utilizaremos la ecuación de la tasa efectiva y la calculadora financiera. Para ello, insistimos en la necesidad de tener claros los conceptos sobre la tasa nominal y la tasa efectiva, y así mismo, conocer el correcto empleo de la ecuación de la tasa nominal y de la ecuación de la tasa efectiva.

8.1 Caso 1 (Efectiva ⇔ Efectiva)

Conocida una tasa efectiva se necesita calcular otra efectiva equivalente. Puede ser el caso de una tasa efectiva menor a una tasa efectiva mayor o viceversa. Esta es una de las situaciones financieras que mayor confusión despierta entre los lectores que se inician en el estudio de las Matemáticas Financieras, debido a que no se acostumbran a manejar mentalmente el concepto de la reinversión de los intereses, que puede ser real o virtual. En una forma desprevenida, si conocen una tasa periódica del 2% mensual y necesitan calcular la tasa anual equivalente, simplemente la multiplican por 12. En forma contraria, lo que es peor aún, si conocen una tasa efectiva anual del 30% y desean calcular su tasa mensual equivalente, la dividen entre 12. Estos dos cálculos ignoran la reinversión real o virtual de los intereses en que se apoya la tasa efectiva. Si se produce la reinversión real de los intereses periódicos la tasa efectiva anual siempre será mayor que la tasa nominal, que es la que resulta de multiplicar la tasa periódica por el número de períodos. Si no se da la reinversión real de los intereses la tasa efectiva, todavía supone la reinversión virtual o implícita.

8.1.2 Conversión de efectiva periódica menor a efectiva periódica mayor

Ejemplo 4.3

¿Qué tasa trimestral es equivalente al 2.20% mensual?

Aplicando la ecuación de la tasa efectiva: $TET = (1 + 0.022)^3 - 1$ (4.2)

$$TET = 0.06746 = 6.75\%$$

Esto indica que es equivalente aplicar una tasa del 2.20% mensual sobre una inversión durante 3 meses que aplicar una tasa del 6.75% trimestral sobre la misma inversión en un trimestre.

Para entender de una forma más clara el concepto de equivalencia entre tasas efectivas, consideremos la siguiente situación: Blanca Elena le presta a usted $ 1.000.000 a una tasa del 2.20% mensual, durante 3 meses. Cada fin de mes ella espera que usted

le cancele los intereses mensuales por valor de $ 22.000, que resultan de multiplicar el valor del préstamo por la tasa de interés ($ 1.000.000 × 0.022). Si usted le manifiesta que le es imposible pagarle intereses cada fin de mes y le solicita que le acepte su pago al momento de vencerse el plazo del préstamo, ella al hacer el cálculo de la tasa trimestral equivalente a una tasa del 2.2% mensual, utilizando la ecuación de la tasa efectiva, llega a un valor de 6.75% trimestral. Indica esto que usted tendrá que cancelarle intereses por valor de $ 67.500 al final del trimestre. Para Blanca Elena, entonces, es equivalente que usted le cancele intereses mensuales por valor de $ 22.000 a que le cancele intereses trimestrales de $ 67.500. Analizada la situación bajo el punto de vista de la equivalencia de intereses, es equivalente para Blanca Elena que le paguen una tasa del 2.20% mensual a que le paguen una tasa del 6.75% trimestral. Entendamos esto: ¿por qué es equivalente para Blanca Elena este esquema de pagos? Se supone que al recibir los intereses mensuales los reinvierte a la misma tasa de interés, y por efectos de la reinversión tendrá al final del trimestre un valor acumulado de $ 1.067.500. Al hacer la relación entre lo que prestó y lo que tiene acumulado, se obtiene una tasa de interés del 6.75% trimestral. Si no recibe los intereses mensualmente, éstos se capitalizan. En otras palabras, hay una reinversión virtual de los intereses, expresada a través de la tasa efectiva.

Al aplicar la ecuación de la tasa efectiva (4.2), el factor $(1 + i)^n$ supone la reinversión de los intereses. En muchos casos esta reinversión no se da en la práctica, al realizarse operaciones financieras para períodos de tiempo muy cortos, como el mes o el trimestre. Pero, sin embargo, para estas operaciones se calcula la tasa efectiva anual equivalente, suponiendo la reinversión virtual de los intereses, lo que quiere decir, que aún si los intereses no se capitalizan se puede concebir la tasa de interés efectiva como el porcentaje que resulta si se hubieran capitalizado.

Esta equivalencia entre tasas efectivas periódicas también la podemos realizar con la calculadora financiera utilizando la fórmula del interés compuesto. El procedimiento consiste en asumir una inversión (P) de $ 1.0, que corresponde al valor presente, durante 3 meses a una tasa de interés del 2.20% mensual y al calcular el valor futuro obtenemos un valor de $1.0675. La diferencia entre el valor futuro y el valor presente de $ 1.0 es de $ 0.0675 que son los intereses, que al dividirlos entre la inversión de $ 1.0 nos da un rendimiento efectivo trimestral del 6.75%. Este procedimiento nos reafirma el concepto de que la tasa efectiva[2] resulta de la reinversión de los intereses periódicos. Al analizar la fórmula de la tasa efectiva $TE = \$\ 1.0(1 + i)^n - 1$, observamos en el segundo miembro de la ecuación que se le aplica a un $ 1.0 la reinversión de los intereses periódicos y luego se le resta el $ 1.0 a los intereses capitalizados.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 1 PV EXE	VDT
1 +/- PV	(-) 1 PV	(-) 1 F3	2.20 i% EXE	1 +/- VA
2.20 i%	2.20 i%	2.20 F2	3 n EXE	2.20 % IA
3 n	3 n	3 F1	FV SOLVE -1	3 N
COMP FV -1	COMP FV EXE -1	COMP F5 -1		VF -1

[2] Para algunos autores, la tasa de *interés efectiva anual* es una ficción matemática, que sirve solamente para hacer comparables tasas de interés.

Antes de entrar a hacer cálculos de equivalencia de intereses en Excel, debemos recordar el procedimiento explicado en el párrafo anterior, según el cual la tasa efectiva resulta de la reinversión periódica de los intereses. Para calcular, en Excel, una tasa efectiva mayor dada una tasa efectiva menor aplicamos este procedimiento con la función VF, que al considerar una inversión de $1, se reduce a restarle al valor futuro el valor de la inversión: Intereses $= P(1 + i)n - P$.

En Excel: $= VF\ (tasa; nper; pago; VA; tipo) - 1$

$= VF\ (2{,}20\%; 3; 0; -1) - 1$

Al obtener el resultado de la tasa en Excel, ésta se debe expresar con 2 decimales, para lo cual en la barra de herramientas oprimimos *aumentar decimales* y oprimimos *estilo millares* para que no aparezca expresada en pesos.

Norma práctica para hacer equivalencias de tasas efectivas periodicas

Como norma práctica para hacer equivalencia de tasas de interés, aplíquese lo siguiente: *la tasa efectiva periódica ni se multiplica ni se divide para encontrar una tasa efectiva periódica equivalente. Al multiplicar la tasa efectiva periódica por el número de períodos, se obtiene una tasa nominal; en forma contraria, al dividir la tasa nominal entre el número de períodos, se obtiene una tasa efectiva periódica.*

8.1.3 Caso de efectiva periódica mayor a efectiva periódica menor

Este es un caso común en nuestro sistema financiero, donde las tasas de captación (por ejemplo, para un CDT) y las tasas de los créditos bancarios generalmente se expresan como efectivas anuales, pero los intereses se deben liquidar en períodos menores al año, por lo tanto, se hace necesario conocer la tasa efectiva periódica equivalente.

Ejemplo 4.4

¿Qué tasa mensual es equivalente a una tasa del 40% efectiva anual?

Aplicamos la ecuación de la tasa efectiva.

$$TEA = (1 + TEM)^{12} - 1 \qquad (3.1)$$

$$0.40 = (1 + TEM)^{12} - 1$$

$$1.40 = (1 + TEM)^{12}$$

Aplicando radicales a ambos miembros de la igualdad, ésta no se altera.

$$\sqrt[12]{1.40} = \sqrt[12]{(1 + TEM)^{12}} \qquad \text{(véase operaciones con radicales)}$$

$$(1.40)^{0.083333} = 1 + TEM$$

$$1.0284 = 1 + TEM$$

$$TEM = 0.028436 = 2.84\% \text{ mensual}$$

También podemos lograr la solución a esta clase de problemas aplicando logaritmos.

$$1.40 = (1 + \text{TEM})^{12}$$

$$\text{Log } 1.40 = 12 \text{ Log}(1 + \text{TEM})$$

$$0.1461 = 12 \text{ Log}(1 + \text{TEM})$$

$$\text{Log}(1 + \text{TEM}) = \frac{0.1461}{12} = 0.0122$$

$$(1 + \text{TEM}) = \text{Antilogaritmo } 0.0122$$

$$(1 + \text{TEM}) = 1.0284$$

$$\text{TEM} = 0.0284 = 2.84\% \text{ mensual}$$

Esto significa que una tasa efectiva anual del 40% es equivalente a una tasa del 2.84% mensual. Analizado en una forma práctica, es equivalente financieramente aplicar sobre una misma inversión una tasa de interés del 2.84% mensual durante 12 meses, que una tasa del 40% anual durante un año. En otras palabras, es equivalente prestar un dinero al 2.84% mensual durante 12 meses que al 40% anual durante un año. Nótese que la tasa del 2.84% mensual obtenida, equivalente al 40% efectiva anual, no resulta de dividir 40% entre 12 períodos mensuales, que es lo que generalmente se hace al desconocer el potencial de reinversión de los intereses.

Verifiquemos este análisis:

Calculemos el valor futuro que produce una inversión de $ 1.000.000, durante 12 meses, a cada una de estas tasas

- A una tasa del 2.8436% mensual.

$$F = 1.000.000(1 + 0.028436)^{12} = \$\ 1.399.997 \approx \$\ 1.400.000$$

- A una tasa del 40% anual.

$$F = 1.000.000(1 + 0.40)^{1} = \$\ 1.400.000$$

Se observa que el resultado al final del año es el mismo.

Con la calculadora financiera podemos hacer la conversión de una tasa efectiva mayor a una tasa efectiva menor utilizando la fórmula del interés compuesto, al calcular la tasa que convierte una inversión de $ 1.0 (valor presente) durante *n* períodos en 1 + la tasa efectiva (valor futuro).

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 1 PV EXE	VDT
1 +/- PV	(-) 1 PV	(-) 1 F3	1.40 FV EXE	1 +/- VA
1.40 FV	1.40 FV	1.40 F5	12 n EXE	1.40 VF
12 n	12 n	12 F1	I% SOLVE	12 N
COMP i%	COMP i% EXE	COMP F2		% IA

En Excel, para calcular una tasa efectiva menor equivalente a una tasa efectiva mayor aplicamos el mismo procedimiento anterior utilizando la función TASA.

En Excel: = TASA (nper; pago; VA; VF; tipo; estimar)

= TASA (nper; pago; VA; (1 + TE); tipo; estimar)

= TASA (12; 0; −1; 1,40) = 2.84% mensual

En estimar se puede colocar cualquier tasa de interés o se puede omitir. En el último caso, Excel asume una tasa del 10%. En este libro, en adelante, omitiremos el parámetro estimar.

TEMA DE INTERÉS

CERTIFICADO DE DEPÓSITO A TÉRMINO (CDT)

Es un título valor expedido por una entidad financiera por el depósito de una suma de dinero a un plazo y tasa determinada. Los plazos pueden ser de 30 días en adelante, siendo los más comunes los de 30, 60, 90, 180 y 360 días. Un CDT es una alternativa de inversión por excelencia, adecuada para quienes buscan liquidez en el corto plazo y para aquellas personas que requieren certeza en los rendimientos que van a percibir. La tasa de interés por su depósito está determinada por el monto, el plazo y las condiciones existentes en el momento de su constitución.

CARACTERÍSTICAS:

1. **Emisor:** son emitidos por bancos comerciales, las corporaciones financieras y Compañías de Financiamiento Comercial.
2. **Clase de título**: son títulos nominativos, se emiten a nombre de una o varias personas.
3. **Ley de circulación**: la propiedad se transfiere mediante carta de endoso.
4. **Plazo**: el plazo mínimo de un CDT es de un mes. Son prorrogables por un término igual al pactado inicialmente, de lo contrario se redimen en el plazo previsto.
5. **Liquidez**: gozan de liquidez secundaria antes de su vencimiento y son fácilmente negociables en el mercado secundario (Bolsa de Valores).
6. **Valor nominal**: se expiden en cuantías mínimas determinadas por la entidad emisora.
7. **Rendimiento**: la tasa de interés que devengan los CDT$_s$ se pacta con la entidad emisora, dependiendo de las condiciones del mercado de capitales, el monto y el plazo del depósito.
8. **Tratamiento fiscal**: están sujetos a un 7% de retención en la fuente sobre los intereses devengados.

Ejemplo 4.5

Blanca Helena constituye un CDT en el Banco Popular, por valor de $ 10.000.000 a una tasa del 7% EA, con un plazo de 90 días. Si Blanca Helena requiere del pago de intereses mensuales, calcular la tasa mensual equivalente y el valor de los intereses mensuales.

La tasa del CDT está expresada como efectiva anual, lo que indica que si el plazo del CDT fuera de un año, le liquidarían sobre los $ 10.000.000 una tasa del 7%, pero como Blanca Helena solicita el pago de intereses mensuales se hace necesario calcular la tasa efectiva mensual equivalente al 7% EA.

Aplicando la ecuación de la tasa efectiva:

$$TEA = (1 + TEM)^{12} - 1$$

$$0.07 = (1 + TEM)^{12} - 1$$

$$TEM = (1.07)^{1/12} - 1$$

$$TEM = 0.57\% \text{ mensual}$$

Esta es la tasa efectiva periódica mensual que le aplicará el banco a los $ 10.000.000.

Valor de los intereses mensuales $= P \times i$

Valor de intereses mensuales $= \$\ 10.000.000 \times 0.0057 = \$\ 57.000$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 1 PV EXE	VDT
1 +/- PV	(-) 1 PV	(-) 1 F3	1.07 FV EXE	1 +/- VA
1.07 FV	1.07 FV	1.07 F5	12 n EXE	1.07 VF
12 n	125 n	12 F1	I% SOLVE	12 N
COMP I%	COMP i% EXE	COMP F2		% IA

En Excel: $=$ TASA (nper; pago; VA; VF; tipo; estimar)

$=$ TASA (12; 0; −1; 1,07)

Ejemplo 4.6

El Banco de Bogotá le aprueba a la empresa Omega Ltda un préstamo por valor de $ 50.000.000 a una tasa del 18% EA con intereses pagaderos trimestralmente. Calcular la tasa trimestral equivalente y el valor de los intereses del primer trimestre.

Calculamos la tasa efectiva trimestral equivalente al 18% EA, que es la tasa de interés que se aplicará sobre el monto del crédito.

$$TEA = (1 + TET)^{4} - 1$$

$$0.18 = (1 + TET)^{4} - 1$$

$$TET = (1.18)^{1/4} - 1$$

$$TEM = 4.22\% \text{ Trimestral}$$

Valor de los intereses primer trimestre $= P \times i$

Valor de intereses primer trimestre $= \$\ 50.000.000 \times 0.0422 = \$2.110.000$

Para conocer el valor de los intereses de los subsiguientes trimestres se hace necesario definir el sistema de amortización (sistema de pago) estipulado para el crédito y el plazo. Lo importante es comprender que la tasa de interés del 4.22% trimestral se aplicará en los próximos trimestres sobre el saldo insoluto del préstamo.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 1 PV EXE	VDT
1 +/- PV	(-) 1 PV	(-) 1 F3	1.18 FV EXE	1 +/- VA
1.18 FV	1.18 FV	1.18 F5	4 n EXE	1.18 VF
4 n	4 n	4 F1	I% SOLVE	4 N
COMP I%	COMP i% EXE	COMP F2	8.77 % X 4	% IA

En Excel: = TASA (nper; pago; VA; VF; tipo; estimar)

= TASA (4; 0 ; −1; 1,18)

Ejemplo 4.7

Un crédito bancario por valor de $ 5.000.000 se está cancelando con cuotas mensuales iguales de $ 450.000 con una tasa del 20% EA con intereses pagaderos mensualmente. El deudor demora 43 días en cancelar la primera cuota. Calcular los intereses moratorios.

En el capítulo 2, se explicó ampliamente el tema de los intereses moratorios y se llegó a la conclusión que constituyen una penalización por el incumplimiento en el pago de una obligación. Es decir, si el deudor no cumple con el pago de las cuotas pactadas con su acreedor, desde el momento del incumplimiento se comienzan a cobrar unos intereses de mora que son, por lo general, 1.5 veces el interés corriente, siendo éste último el interés pactado con el acreedor, sin que excedan el interés máximo permito por la ley que es la tasa de usura. Otro aspecto importante es que los intereses moratorios[3] son intereses simples calculados con la expresión: $I = Pin$. La tasa de interés moratoria es la tasa de usura, que se calcula en Colombia para un período trimestral y viene expresada como una tasa efectiva anual.

$$\text{Tasa moratoria} = \text{tasa de usura}$$

Si para el período de análisis la tasa de usura es del 21.32% EA, calculamos la tasa efectiva diaria equivalente.

$$TEA = (1 + TED)^{365} - 1$$

$$TED = (1.2132)^{1/365} - 1$$

$$TED = 0.053\% \text{ diaria}$$

$$\text{Intereses moratorios} = \$\ 5.000.000 \times 0.00053 \times 43 \text{ días}$$

$$\text{Intereses moratorios} = \$\ 113.950$$

Notará el lector que los intereses moratorios fueron calculados con base en el saldo insoluto y no sobre el valor de la cuota en mora. Esta ha sido una de las discusiones planteadas alrededor del cálculo de los intereses de mora de un crédito y ya existe legislación al respecto de los intereses moratorios de los créditos de vivienda en Colombia. En éstos últimos los intereses moratorios se deben cobrar sobre el valor de la cuota en mora y no sobre el saldo insoluto. Lamentablemente, en el caso de los créditos bancarios y los créditos comerciales se siguen cobrando sobre el saldo insoluto.

[3] Los intereses moratorios se cobran por cada día de retardo en el pago, de tal forma que para calcular la tasa diaria equivalente a la tasa de usura, que viene expresada como efectiva anual, se tiene en cuenta el año de 365 días o 366 días si es bisiesto.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 1 PV EXE	VDT
1 +/- PV	(-) 1 PV	(-) 1 F3	1.2132 FV EXE	1 +/- VA
1.2132 FV	1.2132 FV	1.2132 F5	365 n EXE	1.2132 FV
365 n	365 n	365 F1	I% SOLVE	365 N
COMP I%	COMP i% EXE	COMP F2		% IA

En Excel: = TASA (nper; pago; VA; VF; tipo; estimar)

= TASA (365; 0 ; −1; 1,2132)

8.2 Caso 2 (Efectiva ⇔ Nominal)

Conocida una tasa efectiva se pide calcular una tasa nominal equivalente.

Ejemplo 4.8

A partir de una tasa efectiva anual del 40%, calcular la tasa nominal con capitalización trimestral equivalente.

Aplicamos la ecuación de la tasa efectiva, que también se puede expresar así:

$$TEA = (1 + J/n)^n - 1 \qquad (4.3)$$

$$0.40 = (1 + J/4)^4 - 1$$

$$1.40 = (1 + j/4)^4$$

Aplicando radicales, se tiene:

$$(1.40)^{1/4} = 1 + J/4$$

$$1.08776 - 1 = J/4 \qquad 0.08776 \times 4 = J$$

$$j = 35.10\%\ TV$$

Lo que indica que una tasa efectiva anual del 40% es equivalente a una tasa nominal del 35.10% con capitalización trimestral.

Otro procedimiento

A partir de la tasa efectiva anual calculamos la tasa efectiva periódica trimestral, para lo cual aplicamos la ecuación de la tasa efectiva.

$$TEA = (1 + TET)^4 - 1 \qquad (4.2)$$

$$0.40 = (1 + TET)^4 - 1$$

$$\sqrt[4]{1.40} = \sqrt[4]{(1 + TET)^4}$$

$$(1.40)^{1/4} - 1 = TET$$

$$TET = 0.087757 = 8.7757\%\ \text{trimestral.}$$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 1 PV EXE	VDT
1 +/- PV	(-) 1 PV	(-) 1 F3	1.40 FV EXE	1 +/- VA
1.40 FV	1.40 FV	1.40 F5	4 n EXE	1.40 VF
4 n	4 n	4 F1	I% SOLVE	4 N
COMP I%	COMP i% EXE	COMP F2	8.77 % X 4	% IA
8.77 % X 4	8.77 % X 4	8.77 % X 4		8.77 % X 4

Conocida la tasa efectiva trimestral se calcula la tasa nominal capitalizable trimestralmente, aplicando la ecuación de la tasa nominal.

$$J = \text{Tasa periódica} \times \text{Número de períodos.} \qquad (4.1)$$

$$J = 8.7757\% \times 4 = 35.10\% \text{ TV}$$

En Excel se utiliza la función TASA.NOMINAL, que sí no aparece en las funciones financieras en la ventana *Insertar función* debemos instalarla. Para ello, en la hoja de cálculo elija *Herramientas* y elija *Complementos* y active *Herramientas para análisis* y aceptar. Con esta operación ha quedado instalada la función y se puede utilizar entrando a la ventana *Insertar función*.

En Excel: = TASA.NOMINAL (tasa efectiva; No períodos)
= TASA NOMINAL (40%; 4)

o también: = *n**TASA (nper; pago; VA; VF; tipo; estimar)
= 4*TASA(4; 0; −1; 1,40)

8.3 Caso 3 (Nominal ⇔ Efectiva)

Conocida la tasa nominal del crédito se necesita conocer la tasa efectiva periódica equivalente. Esta situación se presenta con frecuencia en el sector financiero, debido a que las entidades financieras suelen expresar, por lo general, las tasas de interés de colocación en forma nominal y el deudor necesita conocer tanto la tasa efectiva periódica (que es la tasa que determina el valor de los intereses) como la tasa efectiva anual del crédito.

Ejemplo 4.9

Al señor Pedro Picapiedra le conceden un crédito en el Banco Cafetero por valor de $ 20.000.000 a una tasa del 30% TV. Calcular la tasa efectiva trimestral que le cobran y el valor de los intereses del primer trimestre.

Le prestan al 30% anual y le van a liquidar la cuarta parte cada trimestre. Se hace necesario calcular la tasa efectiva trimestral equivalente.

Dividimos la tasa nominal. $i = \dfrac{0.30}{4} = 0.075 = 7.5\%$ trimestral

Valor de los intereses. $I = P \times i = 20.000.000 \times 0.075 = \$\ 1.500.000$ trimestrales

Las tasas nominales son engañosas porque no expresan la verdadera tasa de interés y crean confusión tanto en el ahorrador como en el prestatario. En el siguiente ejemplo se podrá observar esta situación.

Ejemplo 4.10

Una entidad financiera ofrece pagar por los ahorros una tasa de interés del 22% capitalizable mensualmente, y otra ofrece pagar el 23% capitalizable semestralmente. ¿Qué opción se debe elegir?

A simple vista da la impresión que para el ahorrador la mejor opción es la segunda. Sin embargo, al calcular las tasas efectivas anuales equivalentes para cada tasa de interés nos encontramos que la mejor opción es la primera.

Primera opción: 22% MV

Al calcular su tasa efectiva anual equivalente se obtiene un resultado de 24.36% EA.

Segunda opción: 23% SV

Al calcular su tasa efectiva anual equivalente se obtiene un resultado de 24.32% EA.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 1 PV EXE	VDT
1 +/- PV	(-) 1 PV	(-) 1 F3	22/12 I% EXE	1 +/- VA
22/12 I %	22/12 I %	22/12 F2	12 n EXE	22/12 % IA
12 n	12 n	12 F1	FV SOLVE -1	12 N
COMP FV– 1	COMP FV - 1	COMP F5-1	23/2 I% EXE	VF -1
23/2 i %	23/2 i%	23/2 F2	2 n EXE	23/2 % IA
2 n	2 n	2 F1	FV SOLVE -1	2 N
COMP FV-1	COMP FV EXE - 1	COMP F5-1		VF -1

Para calcular una tasa efectiva anual conocida una tasa nominal, en Excel se utiliza la función INT.EFECTIVO, que si no aparece en las funciones financieras en la ventana *Insertar función* debemos instalarla. Para ello, en la hoja de trabajo elija *Herramientas* y elija *Complementos* y active *Herramientas para análisis* y aceptar. Con esta operación ha quedado instalada la función y se puede utilizar entrando a la ventana *Insertar función*.

En Excel: = INT.EFECTIVO (tasa nominal; No períodos)

= INT.EFECTIVO (22%; 12)

= INT.EFECTIVO (23%; 2)

o también: = VF (Nom/n; nper; pago; VA; tipo) − 1

= VF (22%/12; 12; 0; −1) − 1

= VF (23%/2; 2; 0; −1) − 1

Ejemplo 4.11

A partir de una tasa nominal del 36%, calcular la tasa efectiva anual, si:

1. La capitalización es mensual. (36% MV)
2. La capitalización es bimestral. (36% BV)
3. La capitalización es trimestral. (36% TV)
4. La capitalización es semestral. (36% SV)
5. La capitalización es anual. (36% AV)

1. Cuando la capitalización es mensual. $i = \frac{J}{n} = \frac{0.36}{12} = 0.03 = 3\%$ mensual.

   Conocida la tasa efectiva mensual podemos calcular la tasa efectiva anual equivalente.

   $$TEA = (1 + 0.03)^{12} - 1 \qquad (4.2)$$

   $$TEA = 42.58\%$$

2. Cuando la capitalización es bimestral. $i = \frac{J}{n} = \frac{0.36}{6} = 0.06 = 6\%$ bimestral.

   Conocida la tasa efectiva bimestral se calcula la tasa efectiva anual.

   $$TEA = (1 + 0.06)^{6} - 1 \qquad (4.2)$$

   $$TEA = 41.85\%$$

3. Cuando la capitalización es trimestral. $i = \frac{J}{n} = \frac{0.36}{4} = 0.09 = 9\%$ trimestral.

   Conocida la tasa efectiva trimestral, calculamos la tasa efectiva anual.

   $$TEA = (1 + 0.09)^{4} - 1 \qquad (4.2)$$

   $$TEA = 41.16\%$$

4. Cuando la capitalización es semestral. $i = \frac{J}{n} = \frac{0.36}{2} = 0.18 = 18\%$ semestral.

   Conocida la tasa efectiva semestral calculamos la tasa efectiva anual.

   $$TEA = (1 + 0.18)^{2} - 1 \qquad (4.2)$$

   $$TEA = 39.24\%$$

5. Cuando la capitalización es anual. $i = \frac{J}{n} = \frac{0.36}{1} = 0.36 = 36\%$ anual.

   Aplicamos la ecuación de la tasa efectiva: $TEA = (1 + 0.36)^{1} - 1 \qquad (4.2)$

   $$TEA = 36\%$$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 1 PV EXE	VDT
1 +/- PV	(-) 1 PV	(-) 1 F3	36/12 I% EXE	1 +/- VA
36/12 i%	36/12 i%	36/12 F2	12 n EXE	36/12 % IA
12 n	12 n	12 F1	FV SOLVE -1	12 N
COMP FV – 1	COMP FV EXE – 1	COMP F5-1	36/6 I% EXE	VF -1
36/6 i%	36/6 i%	36/6 F2	6 n EXE	36/6 % IA
6 n	6 n	6 F1	FV SOLVE -1	6 N
COMP FV-1	COMP FV EXE -1	COMP F5-1	36/4 I% EXE	VF -1
36/4 i%	36/4 i%	36/4 F2	4 n EXE	36/4 % IA
4 n	4 n	4 F1	FV SOLVE -1	4 N
COMP FV-1	COMP FV EXE -1	COMP F5-1	36/2 I% EXE	VF -1
36/2 i%	36/2 i%	36/2 F2	2 n EXE	36/2 % IA
2 n	2 n	2 F1	FV SOLVE -1	2 N
COMP FV-1	COMP FV EXE -1	COMP F5-1		VF -1

En Excel: = INT.EFECTIVO (tasa nominal; No períodos)
= INT.EFECTIVO (36%; 12)
= INT.EFECTIVO (36%; 6)
= INT.EFECTIVO (36%; 4)
= INT.EFECTIVO (36%; 2)
= INT.EFECTIVO (36%; 1)

o también: = VF (Nom/n; nper; pago; VA; tipo) − 1
= VF (36%/12; 12; 0; −1) − 1
= VF (36%/6; 6; 0; −1) − 1
= VF (36%/4; 4; 0; −1) − 1
= VF (36%/2; 2; 0; −1) − 1
= VF (36%/1; 1; 0; −1) − 1

Resumen del ejemplo. 36% MV ⇔ TEA = 42.58%

36% BV ⇔ TEA = 41.85%

36% TV ⇔ TEA = 41.16%

36% SV ⇔ TEA = 39.24%

36% AV ⇔ TEA = 36.00%

Conclusiones:

1. Cuando el período de capitalización es menor de un año, la tasa efectiva anual es mayor que la tasa nominal anual.
2. A medida que aumenta la frecuencia de liquidación de intereses aumenta la tasa efectiva anual, por la mayor posibilidad de reinversión de los intereses.
3. Cuando el período de capitalización es un año, la tasa efectiva anual es igual a la tasa nominal anual. En cualquier otro caso la tasa efectiva anual siempre será mayor a la tasa nominal anual.
4. La tasa efectiva está compuesta de dos partes: la tasa nominal que es la que determina el valor de los intereses que se registran en los libros de contabilidad y el costo de oportunidad en que se incurre al tener que pagar intereses periódicos. Es lo mismo, contablemente, pagar un préstamo de $ 1.000.000 al 36% MV que pagarlo al 36% TV. En el Estado de Resultados en los dos casos se registrarán, como gastos financieros, $ 360.000 anuales, pero desde el punto de vista financiero es más costosa una tasa del 36% MV que una tasa del 36% TV por el costo de oportunidad del dinero, como se demostró en este ejercicio. La diferencia entre la tasa efectiva y la tasa nominal es el costo de oportunidad.

Ejemplo 4.12

Se pide elegir entre estas dos opciones para aceptar un crédito bancario: 30% MV o 30% TV.

Se observa que las tasas nominales son iguales en valor pero con diferentes períodos de capitalización. *Tasas nominales con diferentes períodos de capitalización no son comparables.* Con base en las conclusiones del ejemplo anterior sabemos que a mayor número de capitalizaciones la tasa efectiva es mayor, por ello, podemos concluir que la mejor opción es la tasa del 30% TV.

8.4 Caso 4 (Nominal ⇔ Nominal)

Muchas veces se necesita, por razones de liquidez u otra circunstancia, cambiar el período de capitalización de la tasa de interés nominal con que se pactó una operación financiera. Este caso conduce a calcular una tasa nominal conocida otra nominal.

Ejemplo 4.13

El Banco Ganadero le aprueba al señor Pablo un crédito a una tasa del 36% con capitalización mensual (36% MV), quien solicita le conviertan esa tasa en una nominal capitalizable trimestralmente equivalente. Hallar esta tasa equivalente.

Con la información de la primera tasa podemos calcular la tasa efectiva anual.

$$TEA = (1 + J/n)^n - 1 \qquad (4.3)$$

$$TEA = (1 + 0.36/12)^{12} - 1$$

$$TEA = 0.4258 = 42.58\%$$

Conocida la tasa efectiva anual, podemos calcular la tasa nominal capitalizable trimestralmente equivalente.

$$TEA = (1 + J/n)^n - 1 \qquad (4.3)$$

$$0.4258 = (1 + J/4)^4 - 1$$

$$1.4258 = (1 + J/4)^4$$

$$\sqrt[4]{1.4258} = \sqrt[4]{\left(1 + \frac{J}{4}\right)^4}$$

$$(1.4258)^{1/4} = (1 + J/4)$$

$$1.092734 = 1 + J/4$$

$$0.092734 = J/4$$

$$J = 0.092734 \times 4 = 0.3709 = 37.09\% \text{ nominal T.V.}$$

Otro procedimiento

Dividimos la tasa nominal. $i = \frac{J}{n} = \frac{0.36}{12} = 0.03 = 3\%$ mensual

Conocida la tasa efectiva mensual, calculamos la tasa efectiva trimestral equivalente.

$$TET = (1 + TEM)^3 - 1 \qquad (4.2)$$

$$TET = (1 + 0.03)^3 - 1$$

$$TET = 0.0927 = 9.27\% \text{ trimestral.}$$

Conocida la tasa efectiva trimestral calculamos la tasa nominal capitalizable trimestralmente, aplicando la ecuación de la tasa nominal.

$$J = 0.0927 \times 4 = 0.3708 = 37.09\% \text{ capitalizable trimestralmente.}$$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 1 PV EXE	VDT
1 +/- PV	(-) 1 PV	(-) 1 F3	3 n EXE	1 +/- VA
3 n	3 n	3 F1	36/12 I% EXE	3 N
36/12 % i	36/12 % i	36/12 F2	FV SOLVE -1	36/12 % IA
COMP FV - 1	COMP FV EXE -1	COMP F5 -1	9.27 % x 4	VF - 1
9.27 % x 4	9.27 % x 4	9.27 % x 4		9.27 % x 4

Para hacer la conversión de una tasa nominal a otra tasa nominal conocida, Excel no tiene una única función. Se deben trabajar las funciones INT.EFECTIVO y TASA NOMINAL, explicadas en ejercicios anteriores.

En Excel: = INT.EFECTIVO (tasa nominal; No períodos)

= TASA.NOMINAL (tasa efectiva; No períodos)

= INT.EFECTIVO (36%; 12)

= TASA.NOMINAL (42,58%; 4)

En este libro proponemos un procedimiento alternativo que consiste en calcular la tasa nominal en función de la tasa periódica, utilizando la función VF.

En Excel: = *n**(VF (Nom/n; nper; pago; −VA; tipo) −1)

= 4*(VF (36%/12; 3; 0; −1,0) −1)

VF (36%/12; 3; 0; −1) − 1, convierte la tasa nominal del 36% MV en una tasa efectiva del 9.27% trimestral, la que luego se multiplica (aplicando la ecuación de la tasa nominal) por 4 períodos para encontrar la tasa nominal TV.

En la función que acabamos de utilizar, que acepta Excel, se observa el uso de paréntesis con los cuales, es posible que el lector no esté familiarizado. Por esta razón, a continuación explicamos la aplicación de los operadores aritméticos que maneja el Excel. Los operadores son signos que se utilizan para estructurar una operación o fórmula. Son operadores aritméticos: división (/), resta (−), suma (+), multiplicación (*), porcentaje (%) y exponente (^). Si en la introducción de las fórmulas se combinan varios operadores sin utilizar paréntesis, Excel realiza primero las operaciones con mayor prioridad, es decir, las de mayor importancia (teniendo en cuenta que dará máxima prioridad a cualquier operador si lo ponemos entre paréntesis). En su orden los operadores de mayor prioridad son: igual (=), porcentaje (%), exponente (^), multiplicación y división (* /) y suma y resta (+ −). Si se necesita que en una fórmula se realice primero una operación con menos prioridad que otra se utiliza el paréntesis. Con base en lo anterior, si la operación VF (36%/12; 3; 0; −1,0) − 1 no la encerramos en un paréntesis, el Excel primero multiplica 4*(VF(36%/12; 3; 0; −1,0) y después le resta el 1.

En el caso de una tasa nominal con capitalización mayor a una tasa nominal con capitalización menor, se procede así:

= *n**TASA (nper; pago; VA; Nom /*n* + 1)

Ejemplo 4.14

Dada una tasa nominal del 30% TV calcular una tasa nominal MV equivalente. Utilice el Excel.

$$= 12*\text{TASA}\ (3;\ 0;\ -1;\ 30\%/4 + 1)$$

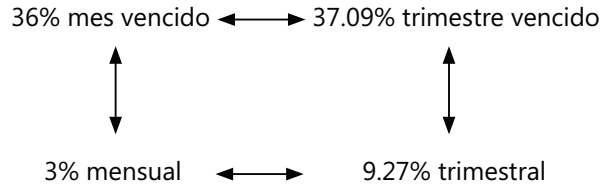
En este caso, haciendo referencia al uso de los operadores aritméticos, en el último parámetro dentro del paréntesis el Excel primero divide 30%/4 y luego le suma el 1. Asimismo, primero desarrolla el paréntesis y luego lo multiplica por 12.

Los resultados del ejemplo 4.13 son importantes porque aportan claridad sobre la capitalización de los intereses cuando se realiza una operación financiera, lo que hemos venido considerando durante todo el desarrollo del texto. La ley prohíbe corrientemente en forma expresa cobrar en un crédito intereses sobre intereses, si no se pactan previamente, lo que en el argot jurídico se conoce como *ANATOCISMO*. El lector en este momento entrará en un estado de confusión, entendible para el autor, porque hemos afirmado que la fórmula de interés compuesto es la básica de las Matemáticas Financieras y que las operaciones financieras se realizan con su aplicación. El análisis que se presenta a continuación aclarará esta situación.

Miremos los resultados del ejemplo 4.13.

Una tasa nominal del 36% MV es equivalente al 3% mensual, equivalente al 9,27% trimestral y al 37.09% TV. ¿Qué significa esto? Es equivalente para el banco que el cliente le pague sobre el valor del crédito el 3% mensual, a que le pague el 9.27% trimestral, ¿y esto qué es? interés compuesto.

Si al señor Pablo el Banco Ganadero le presta $ 1.000.000 al 36% MV, el valor de los intereses mensuales es de $ 30.000. Si el banco acepta que le paguen los intereses cada trimestre, su valor sería de $ 92.700 que resultarían de aplicarle a $1.000.000 una tasa del 9.27% trimestral. Este mismo resultado lo obtendría el banco si el señor Pablo le pagara $ 30.000 mensuales y los reinvirtiera al mismo 3% mensual durante tres meses.



Un préstamo de $ 1.000.000 al 3% mensual durante tres meses arroja un valor futuro de:

$$F = 1.000.000\ (1 + 0.03)^3$$

$$F = \$\ 1.092.727$$

El rendimiento del banco es: $i = \dfrac{F}{P} - 1 = \dfrac{1.092.727}{1.000.000} - 1 = 9.27\%$ trimestral.

Se infiere del anterior razonamiento que, a pesar de la prohibición legal de cobrar intereses sobre intereses, esta situación se presenta al aplicar las tasas efectivas equivalentes. En consecuencia, no debe ser motivo de preocupación cuando se obra como

prestamista, que en una operación financiera aparezca en forma explícita la capitalización de los intereses, sino que se cobren tasas efectivas equivalentes que involucran, en forma implícita, el interés compuesto.

La tasa efectiva considera la capitalización de los intereses para los períodos en los cuales no se hace ningún pago.

9. Tasa de interés anticipada

Los intereses anticipados son una realidad muy frecuente en nuestro sistema financiero. Surgieron como una argucia de los banqueros para evadir el cumplimiento de las normas sobre tasas máximas (*Gutiérrez, 1994*). Estas normas estipulaban topes para las tasas de interés, pero no especificaban nada sobre su modalidad de cobro. Hoy en día, las normas precisan las tasas efectivas máximas, pero los intereses anticipados se quedaron para largo en nuestros mercados financieros. Esta es una forma también engañosa de presentar las tasas de interés, muy común en los préstamos bancarios a corto plazo. Aunque el pago del capital se hace en cuotas de amortización al final de cada período, por ejemplo, el trimestre o el mes, los intereses se cobran por adelantado por cada período de utilización del dinero.

Existe una diferencia grande entre cobrar tasas de interés en forma vencida y anticipada en una misma operación financiera, que se traduce en un aumento en la tasa de interés de la operación. Una operación de crédito, por ejemplo, a una tasa de interés del 9% trimestral, indica que por cada $ 100 que se utilicen en el trimestre se deben pagar $ 9 de intereses. Si la tasa de interés es del 9% trimestral anticipada el costo del crédito es mayor, porque en el mismo momento del desembolso del préstamo se cobran $ 9 de intereses, lo que significa que se está prestando una menor cantidad de dinero, para este caso $ 91 en lugar de $ 100. La relación entre lo verdaderamente recibido en préstamo y lo pagado al final del período arroja una tasa de interés mayor del 9%. Al cobrarse una tasa vencida, se presta el dinero para usarlo durante un período determinado y al final se devuelve junto con los intereses. Cuando se cobra la tasa de interés en forma anticipada, primero se cobran los intereses y luego se permite usar el dinero, lo que en realidad significa que se presta una cantidad menor, y esto se traduce en un mayor costo del crédito.

Recordemos: ¿qué sucede en una operación financiera en la que se pacta el 30% anual vencido? Construyamos el flujo de caja, suponiendo que se prestan $ 100 en el día de hoy, durante un año.

Aplicando la fórmula básica:

$$F = P(1 + i)^n \quad (3.1)$$

$$F = P(1 + 0.30)^1$$

$$F = 100(1 + 0.30)$$

$$F = \$\ 130$$

Si se prestan $ 100 en el día de hoy al 30% anual, al final del año se recibirán $ 130.

¿Qué sucede, si se prestan los mismos $ 100 a la misma tasa de interés del 30% anual durante un año, pero los intereses se reciben en forma anticipada?

El nuevo flujo de caja es:

Por cada $ 100 que se prestan se retienen $ 30 por concepto de intereses y al final del año se devuelven los $ 100 prestados. Realmente se están prestando $ 70 y después del año se reciben $ 100.

$$F = P\ (1 + i)^n \quad (3.1)$$

$$100 = 70(1 + i)^n \text{ pero } n = 1$$

$$100 = 70(1 + i)$$

$$\frac{100}{70} = 1 + i$$

$$i = 0.4286 = 42.86\% \text{ anual.}$$

Se observa que al cobrarse una tasa anticipada del 30% anual, el costo del crédito se aumenta al 42.86% anual.

La operación financiera la podemos mirar desde otro punto de vista:

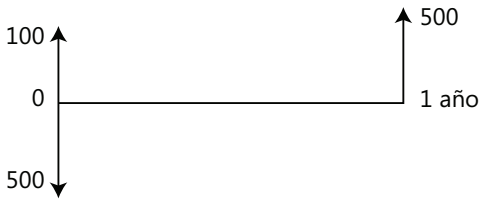
Realmente se están prestando $ 70 que se devuelven al final del año, más los intereses vencidos por $ 30. Es como si se prestaran $ 70 y al final del año se pagaran intereses por $ 30 sobre los $ 70 del préstamo.

$$i = \frac{30}{70} = 42.86\% \text{ anual}$$

9.1 Conversión de una tasa anticipada en vencida

Consiste en diseñar una expresión que permita calcular la tasa periódica vencida equivalente a una tasa periódica anticipada.

Consideremos que se prestan $ 500 al 20% anual anticipado durante un año. Utilizando el procedimiento anterior, tenemos:



La tasa de interés vencida del préstamo es igual a:

$$i = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{P}} = \frac{\text{Intereses}}{\text{Capital prestado}}$$

$$i = \frac{\mathrm{P} \times i}{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{P} \times i}{\mathrm{F} - \mathrm{I}}$$

$$i = \frac{500 \times 0.20}{500 - 500 \times 0.20}$$

$$i = \frac{500 \times 0.20}{500(1 - 0.20)} = \frac{0.20}{1 - 0.20}$$

$$iv = \frac{ia}{(1 - ia)} \tag{4.4}$$

Donde: iv = tasa efectiva periódica vencida (por ejemplo, 2% mensual, 10% trimestral)

ia = tasa efectiva periódica anticipada (por ejemplo, 2% mensual anticipada)

Con la fórmula (4.4) se puede convertir cualquier tasa de interés anticipada en una tasa de interés vencida equivalente, aunque conviene advertir que la conversión sólo aplica para tasas efectivas, ya que muchas veces se comete el error de aplicar la fórmula para hacer conversiones con tasas nominales. El lector debe recordar que las tasas nominales son sólo tasas que referencian el costo de un crédito, pero que no lo miden.

A esta expresión le podemos hallar una aplicación práctica inmediata, si pensamos en la siguiente situación: le ofrecen un préstamo de $ 100.000 que debe pagar después de un mes, pero le cobran intereses del 5% mensual pagaderos en forma anticipada. Como usted necesita la totalidad de los $ 100.000, le solicita a quien le presta el dinero que le cobre intereses mensuales vencidos, pues si son anticipados sólo recibiría $ 95.000. Se necesita conocer, entonces, ¿qué tasa mensual vencida equivalente a una tasa del 5% mensual anticipada se debe cobrar?

Este cálculo se realiza aplicando la expresión (4.4): $iv = \frac{ia}{1 - ia} = \frac{0.05}{1 - 0.05} = 5.26\%$ mensual.

Al hacer la operación con esta tasa del 5.26% mensual, usted recibiría los $ 100.000 y al finalizar el mes entregaría $ 105.260, valor éste que se descompone en $ 100.000 de capital más $ 5.260 de intereses (100.000 × 0.0526).

Con la calculadora financiera podemos calcular la tasa periódica vencida conocida la tasa periódica anticipada, utilizando la fórmula del interés compuesto e ingresando la tasa y el número de períodos con signo negativo.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 1 PV EXE	VDT
1 +/- PV	(-) 1 PV	(-) 1 F3	(-) 1 n EXE	1 +/- VA
1 +/- n	(-) 1n	(-) 1 F1	(-) 5 I% EXE	1 +/- N
5 +/- i%	(-) 5 i%	(-) 5 F2	FV SOLVE -1	5 +/- % IA
COMP FV - 1	COMP FV EXE - 1	COMP F5 EXE - 1		VF -1

Aunque Excel no tiene una función que calcule una tasa vencida a partir de una tasa anticipada, podemos utilizar la función VF ingresando los valores de tasas y períodos con signo negativo.

En Excel: $= VF(-tasa;- nper; pago;VA; tipo) - 1$

$= VF(-5\%; -1; 0; -1) - 1$

En situaciones financieras cotidianas es necesario aclarar, cuando se pactan intereses por un préstamo, si los intereses se van a cobrar en forma vencida o anticipada, porque se podrían crear sobrecostos invisibles en el préstamo. Con el ejemplo que acabamos de desarrollar podemos concluir que no es lo mismo prestar dinero a una tasa de interés del 3% mensual anticipado que al 3% mensual. Si le prestan al 3% mensual anticipado, le están prestando al 3.09% mensual vencido.

Los intereses anticipados usualmente se cobran por un sólo período, por ejemplo, el mes o el trimestre. Pero, para comprender lo abusivo que resultan piénsese que, en virtud de lo dicho arriba, se pretenda cobrarlos por varios períodos. El valor del descuento (intereses anticipados) podría llegar a ser igual al valor del préstamo y en este caso el deudor no recibiría nada pero quedaría debiendo la totalidad del préstamo; y para un número de períodos mayor, aún tendría que darle al acreedor dinero encima. A guisa de ejemplo, si le prestan $ 120.000 a una tasa del 5% mensual anticipado y le cobran intereses de 20 períodos, el valor de los intereses anticipados sería igual a: $ 120.000 × 0.05 × 20 = $ 120.000; de tal forma que no recibiría nada, pero quedaría debiendo $ 120.000. Si se aumentara a 22 el número de períodos, debería pagar por anticipado: $ 120.000 × 0.05 × 22 = $ 132.000, lo que indica que tendría que sacar de su bolsillo $ 12.000 y quedaría debiendo $ 120.000.

De ahí, que en la mayoría de los países esté expresamente prohibido cobrar intereses anticipados en cualquier sistema de créditos. Desafortunadamente, en varios países, Colombia por ejemplo, es lo más común en los créditos a corto plazo, lo que nos obliga a tratarlos en detalle.

9.2 Conversión de una tasa vencida en anticipada

Ahora, estamos ante la situación contraria analizada en el acápite 9.1, cap. 4. Al conocerse una tasa periódica vencida se necesita calcular la tasa periódica anticipada equivalente.

Despejando de la ecuación (4.4), calculamos la tasa anticipada conocida la tasa vencida.

$$iv(1 - ia) = ia$$

$$iv - i \times ia = ia$$

$$iv = i \times ia + ia$$

$$iv = ia(i + 1)$$

$$ia = \frac{iv}{\left(1 + iv\right)} \tag{4.5}$$

Esta expresión es la misma (4.4), simplemente que se propone encontrar una tasa periódica anticipada en función de la tasa periódica vencida.

Bajo el esquema prestamista − prestatario, es lógico suponer que cuando se obra como deudor se procurará pagar intereses vencidos, a menos que sea necesario sacrificar liquidez por costo. En el caso contrario, cuando se actúa como prestamista, el plantear préstamos con tasas anticipadas puede acarrear sobrecostos invisibles para el deudor. Por ejemplo, si usted le va a prestar a un cliente una determinada cantidad de dinero al 2% mensual y le exige el pago de intereses anticipados, para que no haya un sobrecosto debe cobrarle una tasa del 1.96% mensual anticipada, que resulta de aplicar la expresión (4.5). Si le cobra el 2% mensual anticipado, le está cobrando el 2.04% mensual, que resulta de aplicar la expresión (4.4).

$$ia = \frac{iv}{1 + iv} = \frac{0.02}{1 + 0.02} = 1.96\% \text{ mensual anticipada} \tag{4.5}$$

$$iv = \frac{ia}{1 - ia} = \frac{0.02}{1 - 0.02} = 2.04\% \text{ mensual} \tag{4.4}$$

Las tasas anticipadas también se presentan en forma nominal, y es así como se habla, por ejemplo, del 32% nominal trimestre anticipado, 32% trimestre anticipado o, simplemente, 32% T.A., para indicar que esta es una tasa del 32% anual y que la cuarta parte de ella se cobrará al principio del trimestre (*García, 1994*). También, al igual que la tasa nominal con capitalización vencida, la nominal con capitalización anticipada se divide por el número de períodos de capitalización al año para obtener la tasa efectiva anticipada. Así, por ejemplo, del 32% nominal trimestre anticipado se obtiene el 8% efectiva trimestral anticipada al dividir 32% entre 4 trimestres. De la misma forma, al tenerse una tasa periódica anticipada y al multiplicarla por el número de períodos se obtiene la tasa nominal anual con capitalización anticipada.

A continuación se resuelve una tanda de ejercicios que consideran diferentes situaciones financieras.

Ejemplo 4.15

Calcular la tasa trimestral anticipada equivalente a una tasa del 2.0% mensual anticipada.

Se convierte la tasa del 2.0% mensual anticipada en mensual vencida equivalente.

$$\text{TEM} = \frac{ia}{(1 - ia)} = \frac{0.02}{(1 - 0.02)} \tag{4.4}$$

$$\text{TEM} = 0.0204 = 2.04\% \text{ mensual.}$$

Calculamos la tasa trimestral vencida, aplicando la ecuación de la tasa efectiva:

$$\text{TET} = (1 + 0.0204)^3 - 1 \tag{4.2}$$

$$\text{TET} = 0.0625 = 6.25\% \text{ efectiva trimestral.}$$

Calculamos la efectiva trimestral anticipada:

$$\text{TETA} = \frac{iv}{(1 + iv)} = \frac{0.0625}{(1 + 0.0625)} \tag{4.5}$$

$$\text{TETA} = 0.0588 = 5.88\% \text{ trimestral anticipada.}$$

En la calculadora financiera, utilizando el procedimiento de cálculo con la fórmula del interés compuesto obtenemos un valor indeterminado, debido a que no considera operaciones financieras con rendimientos negativos. Utilizaremos para estos casos el menú de conversión de tasas que traen las calculadoras financieras.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CNVR	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 3 EXE	CONVI
3 +/- EFF 6	(-) 3 EFF 6	(-) 3 EFF 6	6 I % EXE	2 X 12 +/- % NOM
1 +/- SHIFT APR 6.25	(-) 1 SHIFT APR 6.25	(-) 1 SHIFT APR 6.25	EFF SOLVE	12 P
			CNVR	% EFE
			(-) 1 EXE	4 +/- P
			APR SOLVE	% NOM /4

Al multiplicar la tasa del 2.0% mensual anticipada por 3 (número de períodos mensuales) obtenemos la tasa nominal trimestral mes anticipado. Luego pedimos la tasa nominal trimestral anticipada. Al realizarse este procedimiento se podría presentar alguna confusión en el último paso, al calcularse la tasa nominal cuando se trata de encontrar la tasa efectiva trimestral anticipada. Esta confusión se despeja si entendemos que para un solo período la tasa nominal y la efectiva son iguales. Recuérdese que para un solo período, el interés simple es igual al interés compuesto y la relación entre estas dos tasas es la misma que existe entre estos dos tipos de interés. Este es el procedimiento que desarrolla la calculadora financiera.

Aunque Excel no tiene una función que haga equivalencia entre tasas anticipadas, proponemos el siguiente procedimiento: con la función VF calculamos la tasa trimestral vencida para lo cual tenemos que ingresar la tasa periódica y el número de períodos con signo negativo. Una vez calculada la tasa trimestral vencida la pasamos a anticipada

utilizando la función TASA ingresando el número de períodos con signo negativo. Se obtiene una tasa negativa a la cual hemos de cambiarle el signo.

En Excel: = VF (−tasa; −nper; pago; VA; tipo) − 1

= VF (−2%; −3; 0; −1) − 1 = 6.25% trimestral

= TASA (−nper; pago; VA; 1 + TE)

= TASA (−1; 0; −1; 1,0625) = −5.88%, y le cambiamos el signo

Estos procedimientos poco ortodoxos que ni Excel ni la calculadora financiera traen como funciones principales, nos evidencian que esta modalidad de cobro de intereses anticipados no se usa en otros países. Lamentablemente en nuestro país es una práctica normal en los créditos bancarios.

Ejemplo 4.16

A partir de una tasa nominal del 36% trimestre anticipado (36% TA), calcular la tasa efectiva anual.

Se divide la tasa nominal. $i = \frac{J}{n} = \frac{0.36}{4} = 0.09 = 9\%$ trimestral anticipada.

Se convierte la tasa trimestral anticipada en trimestral vencida.

$$iv = \frac{ia}{(1 - ia)} = \frac{0.09}{(1 - 0.09)} \tag{4.4}$$

$$i = 0.0989 = 9.89\% \text{ trimestral.}$$

Aplicando la ecuación de la tasa efectiva:

$$TEA = (1 + 0.0989)^4 - 1 \tag{4.2}$$

$$TEA = 0.4583 = 45.83\% \text{ efectiva anual}$$

Con la calculadora financiera podemos calcular la tasa efectiva anual conocida la tasa nominal con capitalización anticipada, utilizando la fórmula del interés compuesto e ingresando la tasa y el número de períodos con signo negativo.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 1 PV EXE	VDT
1 +/- PV	(-) 1 PV	(-) 1 F3	(-) 4 n EXE	1 +/- VA
4 +/- n	(-) 4 n	(-) 4 F1	(-) 36/4 I% EXE	4 +/- N
36/4 +/- % i	(-) 36/4 % i	(-) 36/4 F2	FV SOLVE -1	36/4 +/- % IA
COMP FV - 1	COMP FV EXE -1	COMP F5 -1		VF - 1

En Excel: = VF (−tasa; −nper; pago; VA; tipo) − 1

= VF (−36%/4; −4; 0; −1) − 1

Ejemplo 4.17

¿Qué tasa nominal anual con capitalización trimestral anticipada es equivalente a una tasa del 38% nominal capitalizable mensualmente (38% MV)?

A partir de la tasa nominal del 38% capitalizable mensualmente, calculamos la tasa efectiva anual.

$$TEA = (1 + 0.38/12)^{12} - 1 \quad (4.3)$$

$$TEA = 0.4537 = 45.37\% \text{ efectiva anual}$$

Conocida la tasa efectiva anual, se calcula la tasa efectiva trimestral.

$$TEA = (1 + TET)^4 - 1 \quad (4.2)$$

$$0.4537 = (1 + TET)^4 - 1$$

$$1.4537 = (1 + TET)^4$$

Aplicando radicales, se tiene: $\sqrt[4]{1.4537} = \sqrt[4]{(1 + TET)^4}$

$(1.4537)^{1/4} = 1 + TET \qquad TET = 0.098 = 9.8\%$ trimestral

Calculamos la tasa trimestral anticipada. $ia = \dfrac{iv}{(1 + iv)} = \dfrac{0.098}{(1 + 0.098)}$ (4.5)

$ia = 0.089 = 8.9\%$ trimestral anticipada.

Aplicamos la ecuación de la tasa nominal:

$$\text{tasa nominal} = 0.089 \times 4 = 0.3560 = 35.60\% \text{ nominal T.A.}$$

Otro procedimiento

Calculamos la tasa efectiva mensual:

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.38}{12} = 0.03167 = 3.167\% \text{ efectiva mensual.}$$

A partir de la tasa efectiva mensual, encontramos la efectiva trimestral:

$$TET = (1 + TEM)^3 - 1 \quad (4.2)$$

$$TET = (1 + 0.03167)^3 - 1$$

$$TET = 0.098 = 9.8\% \text{ efectiva trimestral.}$$

Calculamos la tasa trimestral anticipada.

$$TETA = \frac{iv}{(1 + iv)} = \frac{0.098}{(1 + 0.098)} \quad (4.5)$$

$$TETA = 0.089 = 8.90\%$$

La tasa nominal trimestre anticipado la calculamos aplicando la ecuación de la tasa nominal:

$$\text{Tasa nominal} = 0.089 \times 4 = 0.356 = 35.60\% \text{ T.A.}$$

Tal como se explicó en el ejercicio 4.16, utilizando el interes compuesto con la calculadora financiera obtenemos un valor indeterminado. Tenemos que utilizar el menú de conversión de tasas que trae la calculadora financiera.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CNVR	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	12 n EXE	CONVI
12 EFF 38	12 EFF 38	12 EFF 38	38 I % EXE	12 P
4 +/- SHIFT APR 38	(-) 4 SHIFT APR 38	(-) 4 SHIFT APR 38	EFF SOLVE	38 % NOM
			CNVR	% EFE
			(-) 4 EXE	4 +/- P
			APR SOLVE	% NOM

En Excel: $= VF(\text{tasa; nper; pago; VA; tipo}) - 1$

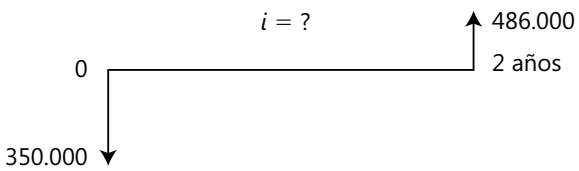
$= VF(38\%/12; 3; 0; -1) - 1 = 9.80\%$ trimestral

$= n^{*}TASA(-\text{nper; pago; VA; } 1 + TE)$

$= 4^{*}TASA(-1; 0; -1; 1{,}098)$

Ejemplo 4.18

¿Qué tasa nominal capitalizable mensualmente convertirá a $ 350.000 de hoy en $ 486.000 dentro de 2 años?



$$F = P(1 + i)^n \qquad (3.1)$$

$$486.000 = 350.000(1 + i)^2$$

$$\frac{486.000}{350.000} = (1 + i)^2$$

$$1.388571 = (1 + i)^2$$

Aplicando radicales, se tiene: $\sqrt{1.388571} = \sqrt{(1 + i)^2}$

$$(1.388571)^{1/2} = 1+i$$

$$1.178377 = 1 + i$$

$$1.178377 = 1 = i$$

$$0.178377 = i$$

$i = 17.84\%$ efectiva anual.

Conocida la tasa efectiva anual, calculamos la tasa nominal capitalizable mensualmente equivalente.

Se aplica la ecuación de la tasa efectiva: $TEA = (1 + J/n)^n - 1$ (4.3)

$$0.1784 = (1 + J/12)^{12} - 1$$

$$1.1784 = (1 + J/12)^{12}$$

Aplicando radicales a ambos miembros de la igualdad, ésta no se altera.

$$\sqrt[12]{1.1784} = \sqrt[12]{\left(1 + \frac{J}{12}\right)^{12}}$$

$$(1.1784)^{1/12} = 1 + J/12$$

$$1.013774 = 1 + J/12$$

$$1.013774 - 1 = J/12$$

$$0.013774 = J/12$$

$$J = 0.013774 \text{ X } 12$$

$J = 0.1653 = 16.53\%$ capitalizable mensualmente.

Otro procedimiento

Conocida la tasa efectiva anual del 17.84% que arrojó la operación financiera, podemos calcular la tasa efectiva mensual equivalente.

$$TEA = (1 + TEM)^{12} - 1 \quad (4.2)$$

$$0.1784 = (1 + TEM)^{12} - 1$$

$$\sqrt[12]{1.1784} = \sqrt[12]{(1 + TEM)^{12}}$$

$$(1.1784)^{1/12} - 1 = TEM$$

$TEM = 1.3774\%$ mensual

Se calcula la tasa nominal capitalizable mensualmente aplicando la ecuación de la tasa nominal.

$$J = 0.013774 \times 12 = 16.53\% \text{ nominal MV} \quad (4.1)$$

Otro procedimiento

Al aplicar la fórmula básica $F = P(1 + i)^n$, la tasa de interés (i) y el número de períodos (n) se expresan en la misma unidad de tiempo. En el ejercicio aparece expresado el número de períodos en años, por lo tanto, al calcular la tasa de interés (i) esta será una tasa efectiva anual.

Consideremos, ahora, que el número de períodos se expresa en meses (24 meses):

$$F = P(1 + i)^n$$

$$486.000 = 350.000(1 + i)^{24}$$

$$1.388571 = (1 + i)^{24}$$

Aplicando radicales, se tiene: $\sqrt[24]{1.388571} = \sqrt[24]{(1+i)^{24}}$

$$(1.388571)^{1/24} = 1 + i$$

$$1.013772 = 1 + i$$

$$i = 0.013772 = 1.3772\% \text{ mensual.}$$

Conocida la tasa efectiva mensual se calcula la tasa nominal capitalizable mensualmente.

$$J = 0.013772 \times 12 = 0.1653 = 16.53\% \text{ capitalizable mensualmente.}$$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 350.000 PV EXE	VDT
350.000 +/- PV	(-) 350.000 PV	(-) 350.000 F3	486.000 FV EXE	350.000 +/- VA
486.000 FV	486.000 FV	486.000 F5	24 n EXE	486.000 VF
24 n	24 n	24 F1	0 PMT EXE	24 N
COMP i%	COMP i% EXE	COMP F2	I% SOLVE	% IA

En Excel: = n*TASA (nper; pago; VA; VF)

= 12*TASA (24; 0; −350.000; 486.000)

Ejemplo 4.19

El Banco Ganadero le aprueba un crédito de $ 20.000.000 al 36% trimestre anticipado (36% TA). Para que no le deduzcan los intereses trimestrales por adelantado, solicita que le conviertan la tasa de interés aprobada en una tasa nominal anual mes anticipado. Calcular esta tasa equivalente.

Dividimos la tasa del 36% TA. $i = \dfrac{J}{n} = \dfrac{0.36}{4}$

$$i = 0.09 = 9\% \text{ trimestral anticipada.}$$

La tasa trimestral anticipada la convertimos en trimestral vencida equivalente:

$$TET = \frac{ia}{(1 - ia)} = \frac{0.09}{(1 - 0.09)} = 0.0989 = 9.89\% \text{ trimestral.} \qquad (4.4)$$

Conocida la tasa trimestral calculamos la tasa mensual equivalente, aplicando la ecuación de la tasa efectiva.

$$TET = (1 + TEM)^3 - 1 \qquad (4.2)$$

$$0.0989 = (1 + TEM)^3 - 1$$

$$\sqrt[3]{1.0989} = \sqrt[3]{(1 + TEM)^3}$$

$$(1.0989)^{1/3} = (1 + TEM)$$

$$1.031936 = (1 + TEM)$$

$$TEM = 0.031936 = 3.19\% \text{ mensual}$$

Calculamos la tasa efectiva mensual anticipada.

$$\text{TEMA} = \frac{iv}{(1+iv)} = \frac{0.031936}{(1+0.031936)} \tag{4.5}$$

$$\text{TEMA} = 0.030948 = 3.09\% \text{ mensual anticipada.}$$

Aplicamos la ecuación de la tasa nominal para calcular la tasa nominal con capitalización mensual anticipada.

$$J = \text{tasa periódica} \times \text{No de períodos.} \tag{4.1}$$

$$J = 0.0309 \times 12 = 0.3714 = 37.14\% \text{ MA}$$

Este caso de conversión de tasas no se pueden realizar con la calculadora financiera utilizando el interés compuesto. Utilizamos para este caso el menú de conversión de tasas que traen las calculadoras financieras.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CNVR	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 4 n EXE	CONVI
4 +/- EFF 36	(-) 4 EFF 36	(-) 4 EFF 36	36 I % EXE	4 +/- P
12 +/- SHIFT APR 45.83	(-) 12 SHIFT APR 45.83	(-) 12 SHIFT APR 45.83	EFF SOLVE	36 % NOM
			CNVR	% EFE
			(-) 12 EXE	12 +/- P
			APR SOLVE	% NOM

En Excel: $= \text{VF}(-\text{tasa}; -\text{nper}; \text{pago}; \text{VA}; \text{tipo}) - 1$

$= \text{VF}(-36\%/4; -4; 0; -1) - 1 = 45.83\%$ efectiva anual

$= \text{n*TASA}(-\text{nper}; \text{pago}; \text{VA}; 1 + \text{TE})$

$= 12\text{*TASA}(-12; 0; -1; 1{,}4583) = -37.14\%$, y le cambiamos el signo

Ejemplo 4.20

De las siguientes opciones que tiene usted para aceptar un crédito bancario, ¿cuál escogería?

Primera opción: 36% trimestre anticipado

Segunda opción: 36.5% mes vencido

A simple vista no es posible determinar cuál de estas dos tasas de interés es la más barata para usted. Para ello, se deben convertir a una base común, que se acostumbra sea la tasa efectiva anual.

Primera opción: Dividimos la tasa nominal.

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.36}{4} = 0.09 = 9.0\% \text{ trimestral anticipada.}$$

Calculamos la tasa trimestral vencida equivalente a la tasa del 9.0% trimestral anticipada.

$$\text{TET} = \frac{ia}{(1-ia)} = \frac{0.09}{(1-0.09)} \tag{4.4}$$

$$\text{TET} = 0.0989 = 9.89\% \text{ trimestral}$$

Aplicamos la ecuación de la tasa efectiva para calcular la tasa efectiva anual equivalente.

$$TEA = (1 + 0.0989)^4 - 1 \quad (4.2)$$

$$TEA = 0.4583 = 45.83\% \text{ efectiva anual.}$$

Segunda opción. Dividimos la tasa del 36.5% mes vencido.

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.365}{12} = 0.03042 = 3.042\% \text{ mensual.}$$

Calculamos la tasa efectiva anual equivalente.

$$TEA = (1 + 0.03042)^{12} - 1 \quad (4.2)$$

$$TEA = 0.4327 = 43.27\% \text{ efectiva anual.}$$

Se debe aceptar la segunda opción porque tiene un costo efectivo anual menor. Este tipo de análisis se debe complementar considerando unos factores dinámicos que inciden en la decisión que se debe tomar, como son el plazo y el sistema de pago del crédito. Sería importante que el lector se preguntara, qué pasaría con la decisión anterior si para la primera opción (que tiene una TEA mayor) se otorga un plazo de 3 años y para la segunda opción apenas un plazo de un año.

Con la calculadora financiera también podemos hacer la equivalencia de tasas de interés, utilizando la fórmula del interés compuesto.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 1 PV EXE	VDT
1 +/- PV	(-) 1 PV	(-) 1F3	(-) 36/4 I% EXE	1 +/- VA
36 /4 +/- i%	(-) 36/4 i%	(-) 36/4 F2	(-) 4 n EXE	36/4 +/- % IA
4 +/- n	(-) 4 n	(-) 4 F1	0 PMT EXE	4 +/- N
COMP FV - 1	COMP FV - 1	COMP F5	FV SOLVE-1	VF -1
36.5/12 i%	36.5/12 i%	36.5/12 i%	36.5/12 I% EXE	36.5/12 % IA
12 n	12 n	12 n	12 n EXE	12 N
COMP FV - 1	COMP FV EXE - 1	COMP FV EXE – 1	FV SOLVE-112 n EXE	VF - 1

En Excel: $= VF(-\text{tasa}; -\text{nper}; \text{pago}; VA; \text{tipo}) - 1$

$= VF(-36\%/4; -4; 0; -1) - 1 = 45.83\%$ efectiva anual

$= VF(\text{tasa}; \text{nper}; \text{pago}; VA; \text{tipo}) - 1$

$= VF(36.5\%/12; 12; 0; -1) - 1 = 43.27\%$ efectiva anual

Ejemplo 4.21

Calcular la tasa efectiva anual, a partir de una tasa nominal anual del 36%, si:

1. Las capitalizaciones son mensuales anticipadas (36% MA).
2. Las capitalizaciones son trimestrales anticipadas (36% TA).
3. Las capitalizaciones son semestrales anticipadas (36% SA).
4. Las capitalizaciones son anuales anticipadas (36% AA).

1. Calculamos la tasa efectiva anual a partir de una tasa nominal del 36% MA.

   Se divide la tasa nominal.

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.36}{12} = 0.03 = 3\% \text{ mensual anticipada.}$$

   Calculamos la tasa efectiva mensual equivalente.

$$iv = \frac{ia}{(1 - ia)} = \frac{0.03}{(1 - 0.03)} \tag{4.4}$$

$$i = 0.0309 = 3.09\% \text{ mensual}$$

   Conocida la tasa efectiva mensual, calculamos la tasa efectiva anual equivalente.

$$\text{TEA} = (1 + \text{TEM})^{12} - 1 \tag{4.2}$$

$$\text{TEA} = (1 + 0.0309)^{12} - 1$$

$$\text{TEA} = 0.440783 = 44.08\% \text{ efectiva anual.}$$

2. Calculamos la tasa efectiva anual a partir de una tasa nominal del 36% TA.

   Dividimos la tasa nominal del 36% TA.

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.36}{4} = 0.09 = 9\% \text{ trimestral anticipada}$$

   Se calcula la tasa efectiva trimestral equivalente.

$$iv = \frac{ia}{(1 - ia)} = \frac{0.09}{(1 - 0.09)} \tag{4.4}$$

$$i = 0.0989 = 9.89\% \text{ trimestral}$$

   Conocida la tasa efectiva trimestral, calculamos la tasa efectiva anual equivalente.

$$\text{TEA} = (1 + \text{TET})^{4} = 1 \tag{4.2}$$

$$\text{TEA} = (1 + 0.0989)^{4} - 1$$

$$\text{TEA} = 0.4583 = 45.83\% \text{ efectiva anual.}$$

3. Calculamos la tasa efectiva anual a partir de una tasa nominal del 36% SA.

   Dividimos la tasa de interés nominal.

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.36}{2} = 0.18 = 18\% \text{ semestral anticipada.}$$

   Calculamos la tasa efectiva semestral.

$$iv = \frac{ia}{(1 - ia)} = \frac{0.18}{(1 - 0.18)} \tag{4.4}$$

$$i = 0.2195 = 21.95\% \text{ semestral}$$

Conocida la tasa efectiva semestral calculamos la tasa efectiva anual equivalente.

$$TEA = (1 + TES)^2 - 1 \quad (4.2)$$

$$TEA = (1 + 0.2195)^2 - 1$$

$$TEA = 0.4872 = 48.72\% \text{ efectiva anual.}$$

4. Calculamos la tasa efectiva anual a partir de una tasa nominal del 36% año anticipado.

Dividimos la tasa nominal.

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.36}{1} = 0.36 = 36\% \text{ efectiva anual anticipada.}$$

Conocida la tasa efectiva anual anticipada calculamos la tasa efectiva anual.

$$iv = \frac{ia}{(1 - ia)} = \frac{0.36}{(1 - 0.36)} \quad (4.4)$$

$$i = 0.5625 = 56.25\% \text{ efectiva anual}$$

Resumen del ejemplo: 36% MA ⇔ 44.12% efectiva anual.

36% TA ⇔ 45.83% efectiva anual.

36% SA ⇔ 48.72% efectiva anual.

36% AA ⇔ 56.25% efectiva anual.

Con las tasas efectivas anuales obtenidas se concluye que, cuando las capitalizaciones son anticipadas, a menor número de capitalizaciones la tasa efectiva se hace mayor, porque los pagos de intereses se anticipan más; y que cuando la capitalización es anual anticipada, la tasa efectiva anual es mayor que la tasa nominal.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 1 PV EXE	VDT
1 +/- PV	(-) 1 PV	(-) 1F3	(-) 36/12 I%	1 +/- VA
36/12 +/- i%	(-) 36/12 i%	(-) 36/12 F2	(-) 12 n EXE	36/12 +/- % IA
12 +/- n	(-) 12 n	(-) 12 F1	0 PMT EXE	12 +/- N
COMP FV - 1	COMP FV - 1	COMP F5	FV SOLVE-1	VF -1
36/4 +/- i%	(-) 36/4 i%	(-) 36/4 i%	(-) 36/4 I% EXE	36/4 % IA
4 +/- n	(-) 4 n	(-) 4 n	(-) 4 n EXE	4 +/- N
COMP FV - 1	COMP FV - 1	COMP FV EXE – 1	FV SOLVE-1	VF - 1
36/6 +/- i%	(-) 36/6 i%	(-) 36/6 i%	(-) 36/6 I% EXE	36/6 +/- % IA
6 +/- n	(-) 6 n	(-) 6 n	(-) 6 n EXE	6 +/- N
COMP FV-1	COMP FV-1	COMP FV EXE -1	FV SOLVE-1	VF -1

En Excel: $= VF(-Nom/n; -nper; pago; VA; tipo) - 1$

$= VF(-36\%/12; -12; 0; -1) - 1$

$= VF(-36\%/6; -6; 0; -1) - 1$

$= VF(-36\%/4; -4; 0; -1) - 1$

$= VF(-36\%/2; -2; 0; -1) - 1$

$= VF(-36\%/1; -1; 0; -1) - 1$

Después de analizar las tasas de interés en sus diferentes modalidades de expresión es importante recordar que para cada tasa de interés, sea vencida o anticipada, existirán diferentes tasas equivalentes, es decir, que producen el mismo resultado final. O que, desde el punto de vista financiero es lo mismo aceptar una tasa vencida o anticipada siempre que sean equivalentes, pero sin dejar al azar el efecto de la liquidez y el costo de oportunidad tan olvidado por las ciencias contables pero tan importante para las finanzas. Por esta razón, es recomendable, cuando se acude a un crédito para inversión, pactar tasas vencidas para lograr que el negocio empiece a generar flujos de caja que permitan cumplir con el servicio de la deuda, es decir, pagar intereses y hacer abonos al capital prestado; y tener presente que el hecho de pagar intereses anticipados origina un costo de oportunidad mayor al dejar de trabajar estos intereses que le descuentan desde el comienzo de la operación financiera.

10. Ecuación de la tasa efectiva en función de la tasa efectiva periódica anticipada

La ecuación de la tasa efectiva también se puede expresar en función de la tasa efectiva periódica anticipada. A partir de la ecuación de la tasa efectiva (4.2), se realiza la siguiente deducción matemática.

$$TE = (1 + i)^n - 1 \tag{4.2}$$

Conocida la tasa efectiva periódica anticipada (*ia*), calculamos la tasa efectiva periódica vencida equivalente (*i*) :

$$iv = \frac{ia}{(1 - ia)} \tag{4.4}$$

Reemplazando en (4.2), se tiene: $TE = \left[1 + \frac{ia}{(1 - ia)}\right]^n - 1$

$$TE = \left[\frac{1 - ia + ia}{(1 - ia)}\right]^n - 1$$

$$TE = \left[\frac{1}{(1 - ia)}\right]^n - 1$$

El término $\left[\frac{1}{(1 - ia)}\right]^n$, corresponde a la potencia de un quebrado, que se desarrolla elevando el numerador y el denominador a la potencia:

$\left[\frac{1}{(1-ia)}\right]^n = \frac{1^n}{(1-ia)^n} = \frac{1}{(1-ia)^n}$; el último término $\frac{1}{(1-ia)^n}$ se desarrolla utilizando el concepto del exponente negativo: $\frac{1}{a^n} = a^{-n} \Rightarrow \frac{1}{(1-ia)^n} = (1-ia)^{-n}$.

Quedando en forma definitiva la siguiente expresión:

$$TE = (1 - ia)^{-n} - 1 \tag{4.6}$$

Donde: TE = tasa efectiva a calcular.

ia = tasa efectiva periódica anticipada.

n = número de veces que capitaliza la tasa efectiva periódica anticipada en la tasa efectiva a calcular.

Ejemplo 4.22

A partir de una tasa del 3% mensual anticipada, calcular la tasa efectiva trimestral equivalente.

$$TET = (1 - 0.03)^{-3} - 1 \tag{4.6}$$

$$TET = (0.97)^{-3} - 1$$

$$TET = 0.095683 = 9.57\% \text{ trimestral.}$$

Con la calculadora financiera, utilizando la fórmula del interés compuesto:

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 1 PV EXE	VDT
1 +/- PV	(-) 1 PV	(-) 1F3	(-) 3 I%	1 +/- VA
3 +/- i%	(-) 3 i%	(-) 3 F2	(-) 3 n EXE	3/12 +/- % IA
3 +/- n	(-) 3 n	(-) 3 F1	0 PMT EXE	3 +/- N
COMP FV - 1	COMP FV EXE - 1	COMP F5 – 1	FV SOLVE -1	VF -1

En Excel: $= VF(-\text{tasa}; -\text{nper}; \text{pago}; VA; \text{tipo}) - 1$

$= VF(-3\%; -3; 0; -1) - 1$

Ejemplo 4.23

A partir de una tasa efectiva anual del 45.83%, calcular la tasa nominal trimestre anticipado.

$$TEA = (1 - ia)^{-n} - 1 \tag{4.6}$$

$$0.4583 = (1 - ia)^{-4} - 1$$

$$(1.4583)^{-1/4} - 1 = -ia$$

$$-0.0900 = -ia \qquad \text{multiplicando por } -1$$

$$0.0900 = ia = 9\% \text{ trimestral anticipada.}$$

Aplicamos la ecuación de la tasa nominal (4.1)

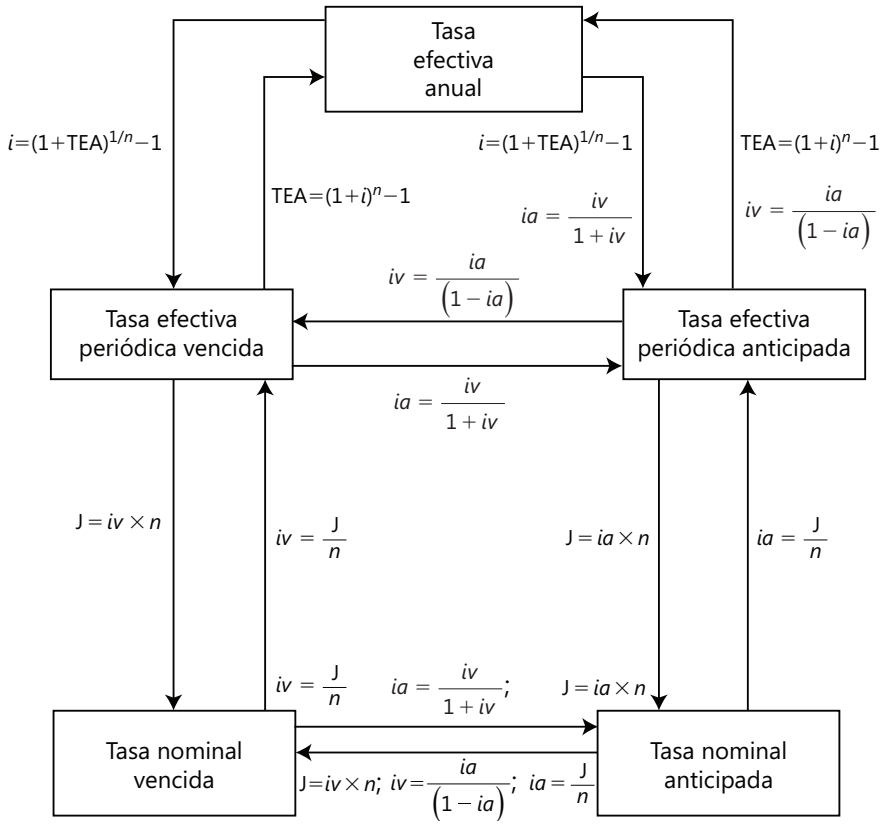
$$J = 0.0900 \times 4 = 36\% \text{ trimestre anticipado (36\% TA)}$$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CNVR	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 4 n EXE	CONVI
4 +/- NOM 45.83	(-) 4 NOM 45.83	(-) 4 NOM 45.83	45.83 I % EXE	4 +/- P
			EFF APR	45.83 % EFE
				% NOM

En Excel: = n*TASA (-nper; pago; VA; 1 + TE)

= 4*TASA (−4; 0; −1; 1,4583) = −36.00%, y le cambiamos el signo

11. Diagrama de conversión de tasas de interés



El diagrama resume todas las posibles conversiones y equivalencias entre tasas de interés. Para aprenderlo a manejar es necesario tener en cuenta que las equivalencias se realizan para tasas de igual periodicidad. Por ejemplo, para una tasa nominal trimestre anticipado su tasa efectiva periódica equivalente será una tasa trimestral anticipada; para una tasa nominal mes anticipado, su equivalente será una tasa mensual anticipada.

Cuando se desea calcular equivalencias de tasas con diferente periodicidad, es necesario realizar las correspondientes conversiones. También es imprescindible para el manejo del diagrama y hacer correctamente las conversiones, identificar las diferentes tasas de interés, y así saber cuándo una tasa es nominal, cuándo es efectiva vencida, cuándo es efectiva anticipada, etc. Es decir, el lector debe saber dónde está y a dónde quiere llegar, de modo que las transformaciones entre las diferentes tasas se haga muy fácil.

En el diagrama el sentido de la flecha indica la secuencia de la(s) operación(es) que se deben realizar.

En forma análoga, la ecuación básica de las Matemáticas Financieras $F = P(1 + i)^n$ podemos expresarla, también, en función de la tasa efectiva periódica anticipada.

$$F = P\,(1 - ia)^{-n} \tag{4.7}$$

Donde: F = valor futuro después de n períodos

P = valor presente o valor inicial de la obligación

ia = tasa efectiva periódica anticipada

n = número de períodos

12. Aplicación de la tasa anticipada con interés compuesto

Ejemplo 4.24

Deposito hoy $ 4.000.000 durante un año, en una entidad que me reconoce el 20%TA sobre mis ahorros. Calcular el valor acumulado al final del año.

La tasa está expresada en forma nominal con capitalización trimestral anticipada. Se capitaliza la tasa nominal para conocer la tasa efectiva periódica.

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.20}{4} = 0.05 = 5\% \text{ trimestral anticipada.}$$

Aplicamos la ecuación. (4.7) $F = P(1 - ia)^{-n}$

$F = 4.000.000(1 - 0.05)^{-4}$

$F = \$\ 4.910.950$

Para calcular el valor futuro aplicando la fórmula básica $F = P(1 + i)^n$, como la i está expresada como tasa efectiva periódica vencida, es necesario calcular la tasa trimestral equivalente a una tasa del 5% trimestral anticipada.

$$iv = \frac{ia}{(1 - ia)} = \frac{0.05}{(1 - 0.05)} = 0.0526 = 5.26\% \text{ trimestral}$$

Aplicamos la fórmula básica: $F = P(1 + i)^n$ (3.1)

$F = 4.000.000(1 + 0.0526)^4$

$F = \$\ 4.910.950$

En resumen, la ecuación básica se puede expresar de dos formas:

- En función de la tasa periódica vencida: $F = P(1 + i)^n$
- En función de la tasa periódica anticipada: $F = P(1 - ia)^{-n}$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 4.000.000 PV EXE	VDT
4.000.000 +/- PV	(-) 4.000.000 PV	(-) 4.000.000 F3	(-) 20/4 I% EXE	4.000.0001 +/- VA
20/4 +/- i%	(-) 20/4 i%	(-) 20/4 F2	(-) 4 n EXE	20/4 +/- % IA
4 +/- n	(-) 4 n	(-) 4 F1	0 PMT EXE	4 +/- N
COMP FV	COMP FV	COMP F5	FV SOLVE	VF

En excel: = VF (tasa; nper; pago; va; tipo)

= VF (−20%/4; −4; 0; −4.000.000)

Ejemplo 4.25

Una empresa necesita $ 200.000.000 para comprar inventarios. El Banco Ganadero se los presta al 30% TA. ¿Cuánto debe solicitar la empresa para que una vez deducidos los intereses anticipados le entreguen efectivamente los $ 200.000.000?

Como la empresa necesita recibir $ 200.000.000 este valor corresponde al valor presente (P).

Dividimos la tasa nominal. $i = \frac{J}{n} = \frac{0.30}{4} = 0.075 = 7.5\%$ trimestral anticipada.

Aplicamos la ecuación: $F = P(1 - ia)^{-n}$ (4.7)

$F = 200.000.000\ (1 - 0.075)^{-1}$

$F = \$\ 216.216.216$

Prueba. Al prestarle el banco $ 216.216.216 al 30% TA, al momento del desembolso del préstamo, le deduce por anticipado el valor de los intereses del primer trimestre a una tasa de interés del 7.5% trimestral. El valor de los intereses será igual:

$I = P \times i$

$I = 216.216.216 \times 0.075 = \$\ 16.216.216$

Al restarle al valor del préstamo los intereses anticipados, se recibirán netos $ 200.000.000.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 200.000.000 FV EXE	VDT
200.000.000 +/- FV	(-) 200.000.000 FV	(-) 200.000.000 F5	(-) 30/4 I% EXE	200.000.000 +/- VF
30/4 +/- i%	(-) 30/4 i%	(-) 30/4 F2	1 n EXE	30/4 +/- % IA
1 +/- n	(-) 1 n	(-) 1 F1	0 PMT EXE	1 +/- N
COMP FV	COMP FV	COMP F4	FV SOLVE	VF

En excel: = VF (tasa; nper; pago; VF; tipo)

= VF (−7,5%; −1; 0; −200.000.000)

13. Descuentos por pronto pago

Los proveedores se constituyen en una importante fuente de financiamiento de corto plazo para cualquier empresa. Evidentemente, el crédito es un factor de demanda de un producto. Aunque lo ideal para las empresas comerciales y manufactureras sería vender los productos al contado, ya se ha constituido en una práctica comercial no exigirle a los compradores que paguen por las mercancías al momento de su entrega, sino que se les concede un corto período de aplazamiento para hacerlo.

Al examinar el crédito con proveedores como una fuente de financiamiento, debemos considerar la situación específica en la cual no se aprovecha el descuento por pronto pago que estos ofrecen, sino que se paga el último día del plazo concedido. Sí no se ofrece descuento por pronto pago no hay costo alguno por la utilización del crédito durante el período neto. Por la misma razón, si se aprovecha el descuento ofrecido por el proveedor, tampoco hay costo por el uso del crédito comercial. Sin embargo, si se ofrece un descuento por pronto pago y no se aprovecha, existe un costo de oportunidad definido.

Con los ejercicios que desarrollaremos a continuación, que son de la experiencia diaria, el lector se sorprenderá, cuando compruebe que posiblemente uno de ellos coincide con su caso, y cuánto dinero pudo haber perdido al no acogerse a los descuentos ofrecidos por sus proveedores.

Ejemplo 4.26

Omega Ltda compra a crédito su materia prima. Su proveedor le plantea un descuento del 5% por compra de contado. Si la empresa no se acoge al descuento por pronto pago, calcular el costo efectivo anual.

Si los proveedores no otorgan descuentos por pronto pago, ni tampoco cargan intereses, dicha fuente de financiación no tiene ningún costo. Tampoco lo tendrá si los proveedores conceden descuentos por pronto pago y la empresa los aprovecha. Pero, si se desaprovechan, dichos descuentos por pronto pago representan un costo elevado, como se apreciará en el presente ejercicio.

Vamos a suponer que la mercancía que suministra el proveedor vale $ 100 a 30 días. Este ofrece un descuento del 5% por pago de contado. Veamos el flujo de caja:

El esquema del negocio nos indica que si la empresa no compra de contado la mercancía por $ 95 y prefiere pagar dentro de 30 días $ 100, es como si pagara $ 5 de intereses sobre los $ 95 en 30 días, que representa una tasa de interés mensual de:

$$i = \frac{F}{P} - 1$$

$$i = \frac{100}{95} - 1 = 0.0526 = 5.26\% \text{ mensual}$$

Aplicando la ecuación de la tasa efectiva, podemos calcular el costo efectivo anual:

$$TEA = (1 + 0.0526)^{12} - 1 \qquad (4.2)$$

$$TEA = 85.06\%$$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-)95 PV EXE	VDT
95 +/- PV	(-) 95 PV	(-) 95 F3	100 FV EXE	95 +/- VA
100 FV	100 FV	100 F5	30/360 n EXE	100 VF
30/360 n	30/360 n	30/360 F1	0 PMT EXE	30/360 N
COMP i%	COMP i%	COMP F2	I% SOLVE	% IA

En excel: = TASA (nper; pago; VA; VF)

= TASA (30/360; 0; −95; 100)

Si se compara este costo efectivo anual con cualquiera otra fuente de financiamiento, se observa que representa un costo muy alto. Sería preferible acudir a un préstamo bancario, o a cualquiera otra fuente de financiación y no perder la opción del descuento por pronto pago.

Existe otra forma como los proveedores plantean los descuentos por pronto pago de sus productos. Indican los descuentos por medio de fracciones, cuyo numerador señala el porcentaje de descuento y el denominador se refiere al tiempo dentro del cual el comprador tiene la opción de pagar, para tener derecho al descuento señalado en el numerador. Por medio del siguiente ejercicio apreciaremos esta situación:

Ejemplo 4.27

Un proveedor factura una mercancía por valor de $ 500.000 con el siguiente plan de descuento por pronto pago: 4/10 neto 30. Calcular el costo efectivo para el comprador si no se acoge al descuento por pronto pago.

La expresión 4/10 neto 30 significa que si el comprador paga la mercancía dentro de los primeros 10 días tendrá derecho a un descuento del 4%, de lo contrario pagará a los 30 días el valor neto de la factura.

El comprador, si se acoge al descuento por pronto pago, lógicamente, esperará hasta el décimo día para pagar los $ 480.000 del valor de la factura. Si no lo hace está reconociendo un interés de $20.000 sobre los $ 480.000 durante 20 días.

La tasa de interés será igual a: $i = \frac{F}{P} - 1 = \frac{500.000}{480.000} - 1$

$i = 0.041667 = 4.1667\%$ en 20 días.

Conocida la tasa efectiva periódica para 20 días se calcula la tasa efectiva anual, aplicando la ecuación de la tasa efectiva.

$$TEA = (1 + 0.041667)^{360/20} - 1 \qquad (4.2)$$

$TEA = 1.085068 = 108.51\%$ anual.

La tasa de interés del 4.1667% corresponde a un período de 20 días. Como el número de períodos debe estar en la misma unidad de tiempo que la tasa de interés, al dividir 360/20 estamos calculando el número de períodos de 20 días en un año.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 480.000 PV EXE	VDT
480.000 +/- PV	(-) 480.000 PV	(-) 480.000 F3	500.000 FV EXE	480.000 +/- VA
500.000 FV	500.000 FV	500.000 F5	20/360 n EXE	500.000 VF
20/360 n	20/360 n	20/360 F1	0 PMT EXE	20/360 N
COMP i%	COMP i%	COMP F2	I% SOLVE	% IA

En Excel: = TASA (nper; pago; VA; VF)

= TASA (20/360; 0; −480.000; 500.000)

Generalmente los proveedores manejan unas tablas en las que aparecen diferentes tasas de descuento según el plazo. Se trata, entonces, de calcular el costo para cada plazo y elegir el menos oneroso para el comprador. Además, el ejercicio que se desarrolla a continuación permite diseñar políticas de créditos coherentes con las circunstancias financieras del mercado.

Ejemplo 4.28

Un fabricante de electrodomésticos ofrece a sus clientes la siguiente tabla de descuentos:

De 0 a 30 días	10%
De 30 a 60 días	12%
De 60 a 90 días	NETO

¿Cuál es la mejor opción para el cliente?

Asumimos que el valor de la mercancía entregada es de $ 100, y con base en este valor se trabaja el problema.

De la información que suministra el ejemplo, podemos extractar lo siguiente:

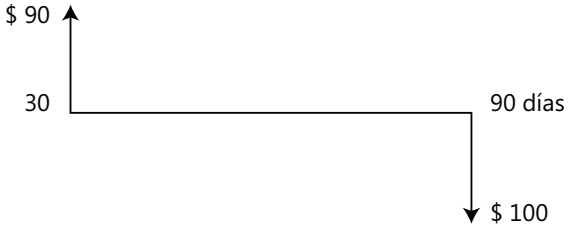
- La fábrica vende a sus clientes con un plazo de 90 días.
- Los clientes que paguen entre 0 y 30 días, contados a partir de la fecha de presentación de la factura, obtienen un descuento del 10%. Es lógico suponer que la totalidad de los clientes de aceptar este descuento, preferirán pagar sobre el día 30.

Es decir, a los clientes que renuncien a 60 días del plazo concedido, se les reconoce un descuento del 10%. Expresado en otros términos, se recibe un descuento del 10% por un período de 60 días.

- Los clientes que paguen entre 30 y 60 días reciben un descuento del 12%. Es decir, se recibe un descuento del 12% por un período de 30 días.

Pasemos a analizar cada una de las ofertas de descuento:

Primera oferta. Tomando $ 100 como valor de la mercancía, el cliente está ante la opción de pagar $ 90 al final del día 30 o pagar $ 100 después de 90 días. Si no se acoge al descuento, está asumiendo un costo representado en $ 10 de intereses durante un período de 60 días.



El costo de no acogerse al descuento por pronto pago, viene determinado por:

$$i = \frac{F}{P} - 1 = \frac{100}{90} - 1 \qquad i = 11.11\% \text{ bimestral}$$

Lo que significa que por no comprar de contado al final del día 30 la mercancía por $ 90, el cliente incurre en un costo del 11.11% bimestral. Esta tasa periódica es equivalente a una tasa del 88.17% efectiva anual.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 90 PV EXE	VDT
90 +/- PV	(-) 90 PV	(-) 90 F3	100 FV EXE	90 +/- VA
100 FV	100 FV	100 F5	60/360 n EXE	100 VF
60/360 n	60/360 n	60/360 F1	0 PMT EXE	60/360 N
COMP i%	COMP i%	COMP F2	I% SOLVE	% IA

En excel: = TASA (nper; pago; VA; VF)

= TASA (60/360; 0; −90; 100)

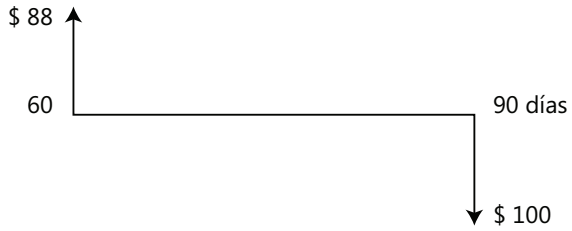
Si desea calcular la tasa bimestral con la misma información, proceda así:

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 90 PV EXE	VDT
90 +/- PV	(-) 90 PV	(-) 90 F3	100 FV EXE	90 +/- VA
100 FV	100 FV	100 F5	1 n EXE	100 VF
1 n	1 n	1 F1	0 PMT EXE	1 N
COMP i%	COMP i%	COMP F2	I% SOLVE	% IA

En excel: = TASA (nper; pago; VA; VF)

= TASA (1; 0; −90; 100)

Segunda oferta. Se plantea la opción de pagar $ 88 al cumplirse 60 días de recibida la factura o pagar $ 100 netos a los 90 días. Es decir, se reconocen $ 12 de intereses sobre $ 88 en un período de 30 días, si el cliente no se acoge al descuento.



$$i = \frac{F}{P} - 1 = \frac{100}{88} - 1$$

i = 13.64% mensual

El cliente incurre en un costo del 13.64% mensual por no comprar de contado la mercancía al final del día 60. Esta tasa mensual es equivalente a una tasa del 363.67% efectiva anual.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 88 PV EXE	VDT
88 +/- PV	(-) 88 PV	(-) 88 F3	100 FV EXE	88 +/- VA
100 FV	100 FV	100 F5	30/360 n EXE	100 VF
30/360 n	30/360 n	30/360 F1	0 PMT EXE	30/360 N
COMP i%	COMP i%	COMP F2	I% SOLVE	% IA

En Excel: = TASA (nper; pago; VA; VF)

= TASA (30/360; 0; −88; 100)

Si desea obtener el valor de la tasa mensual con la misma información, proceda así:

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 88 PV EXE	VDT
88 +/- PV	(-) 88 PV	(-) 88 F3	100 FV EXE	88 +/- VA
100 FV	100 FV	100 F5	1 n EXE	100 VF
1 n	1 n	1 F1	0 PMT EXE	1 N
COMP i%	COMP i%	COMP F2	I% SOLVE	% IA

En Excel: = TASA (nper; pago; VA; VF)

= TASA (1; 0; −88; 100)

Según los cálculos realizados es mejor para el cliente la segunda oferta, porque de no acogerse al descuento del 12% al pagar al final del día 60, incurriría en un costo mayor.

Desde el punto de vista financiero (*Ortiz, 1998*), tendría sentido que en forma deliberada no se aprovecharan los descuentos por pronto pago si durante el tiempo acordado con los proveedores para cancelar las obligaciones, los recursos disponibles para atenderlas se invirtieran a una tasa de rendimiento superior al porcentaje de descuento

ofrecido bajo la condición del pago previo. Así, por ejemplo, si el descuento que ofrece el proveedor por pago de contado es del 8% y se acuerda en 30 días el plazo para cancelar la deuda en el caso de no acogerse al pronto pago, es preferible aplazar el pago a los 30 días si durante ese tiempo los fondos se invirtieran a una tasa mayor que el 8% mensual. Aparece nuevamente la importancia que en las decisiones financieras tiene el costo de oportunidad del dinero.

Para tomar una decisión de compra es necesario analizar a la luz de las Matemáticas Financieras la conveniencia de comprar al contado o a crédito.

14. D.T.F. (DEPÓSITO A TÉRMINO FIJO)

Las entidades financieras estimulan la captación de recursos mediante el reconocimiento de tasas de interés diferenciales según el perfil de sus clientes. A guisa de ejemplo, un Banco reconocerá una tasa de interés mayor sobre el dinero que le presta un cliente corporativo, que la tasa de interés que le paga a una persona natural con un saldo modesto. En consecuencia, existen tantas tasas de interés como perfiles de clientes tenga el Banco. Por esta razón, a efectos de aproximarse a la cotización general del dinero en el mercado financiero, se hizo necesario contar con un indicador que determinara el precio del dinero. Este indicador se conoce como D.T.F. que resulta de promediar la tasa de captación a 90 días de los certificados de depósito a término (CDT_s) de todos los intermediarios financieros, ponderado por el monto captado. A partir de la información que todos los intermediarios financieros envían diariamente a la Superintendencia Financiera sobre sus captaciones, el Banco de la República realiza el cálculo con las captaciones a 90 días e informa el valor de la DTF al mercado. Las entidades cuyas captaciones entran en el cálculo son Bancos, Corporaciones Financieras y Compañías de Financiamiento Comercial.

El período de vigencia de la DTF es de una semana, y para su cálculo se toman las operaciones ocurridas desde el viernes de una semana hasta el jueves de la semana siguiente, de tal forma que el viernes siguiente el Banco de la República da a conocer la DTF que estará vigente del lunes al domingo próximo.

En medio del alto número de tasas de interés que se utilizan en nuestro sistema financiero, la tasa DTF se ha convertido en la principal referencia de la evolución del costo del dinero en la economía colombiana.

Ejemplo 4.29

El Banco Ganadero le concede un crédito por valor de $ 10.000.000 a la DTF + 8%. Calcular el costo del crédito, si la DTF = 8.75% EA.

La tasa DTF la expresa el Banco de la República como nominal trimestre anticipado y como efectiva anual, y los puntos porcentuales adicionales son efectivos anuales.

$$\text{Costo del crédito} = 8.75\% + 8\% = 16.75\% \text{ EA}$$

Es de anotar que en nuestro país, por lo general, los intereses de un crédito son pagaderos en períodos menores al año, y que, por lo general, éstos van acompañados de cuotas de capital, lo que significa que cuando se pacta un crédito referenciado

con la DTF se debe indicar el período de pago de las cuotas. En este ejemplo sólo conocemos el costo del crédito, expresado como efectivo anual, del crédito.

Para el ejemplo anterior supóngase que los intereses son pagaderos mensualmente. Calcule el costo del crédito y el valor de los intereses del primer mes.

$$\text{Costo del crédito} = 16.75\%\ \text{EA}$$

Conocida la tasa efectiva anual se calcula la tasa efectiva mensual equivalente.

$$\text{TEA} = (1 + \text{TEM})^{12} - 1$$

$$0.1675 = (1 + \text{TEM})^{12} - 1$$

$$\text{TEM} = (1.1675)^{1/12} - 1$$

$$\text{TEM} = 1.30\%\ \text{mensual}$$

La tasa de interés del 1.30% mensual representa el costo inicial del crédito, y es la tasa de interés que se aplica para calcular los intereses del primer mes. Para calcular los intereses de los meses subsiguientes, entendiendo que éstos se calculan sobre saldos, la tasa de interés será diferente dependiendo del valor de la DTF que varía semanalmente. En el capítulo 7, Sistemas de amortización, se analiza un caso práctico sobre un crédito referenciado con la DTF y se estudia el procedimiento para el cálculo de las cuotas y la construcción de la tabla de amortización del crédito.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 1 PV EXE	VDT
1 +/- PV	(-) 1 PV	(-) 1 F3	1.1675 FV EXE	1 +/- VA
1.1675 FV	1.1675 FV	1.1675 F5	12 n EXE	1.1675 VF
12 n	12 n	12 F1	I% EXE	12 N
COMP I %	COMP I % EXE	COMP F2		% IA

En Excel: = TASA (nper; pago; va; vf; tipo; estimar)

= TASA (12; 0; −1; 1,1675)

15. Unidad de valor real (UVR)

La UVR es una unidad contable que refleja el poder adquisitivo de la moneda y se calcula con base, exclusivamente, en el IPC que suministra el DANE.

La UVR fue creada por el Congreso de la República mediante la Ley 546 de 1999, y comenzó a aplicarse el 1º. de enero de 2000.

La UVR se utiliza para la actualización de los créditos de largo plazo. Esta unidad permite ajustar el valor de los créditos en el tiempo de acuerdo con el costo de vida del país (IPC). El valor de la UVR es calculado, actualmente, por el Banco de la República para cada uno de los días del año con base en la inflación, en períodos mensuales que comienzan el día 16 de un mes y el día 15 del mes siguiente.

15.1 Características de la UVR

- Es una unidad de cuenta expresada en pesos.
- Se liquida y abona día vencido sobre saldos.

La UVR se calcula mediante la siguiente fórmula: $UVR_t = UVR15^* (1 + i)^{t/d}$

Donde:

UVR_t = valor en moneda legal de la UVR el día t del período de cálculo.

i = variación mensual del IPC durante el mes calendario inmediatamente anterior al mes del inicio del período de cálculo.

UVR15 = valor en moneda legal de la UVR el último día del período de cálculo anterior.

t = número de días calendario transcurridos desde el inicio de un período de cálculo hasta el día de cálculo de la UVR. Por lo tanto *t* tendrá valores entre 1 y 31, de acuerdo con el número de días calendario del respectivo período de cálculo.

d = número de días calendario del respectivo período de cálculo, y tendrá valores entre 28 y 31.

15.2 Cálculo de la UVR

El valor de la UVR se calcula cada mes con base en el IPC (índice de precios al consumidor) del mes anterior, para cada uno de los días del mes comprendidos entre el día 16, inclusive, y el día 15, inclusive, del mes siguiente. Por ejemplo, el valor de la UVR para el día 28 de marzo del 2.000 fue de $ 106.4656 y la inflación del mes de febrero fue del 2.30% mensual. El valor de la UVR para el día 29 de marzo de 2000, se calcula aplicando la expresión:

$$UVR_{29} = UVR_{28}(1 + INF)^{t/d}$$

$$UVR_{29} = 106.4656(1 + 0.023)^{1/31} = \$\ 106.5437$$

El valor de *d* puede tomar valores entre 28 y 31 días, dependiendo del período de cálculo. Para este caso, estamos calculando el valor de la UVR en el período comprendido entre el 16 de marzo y el 15 de abril, por lo tanto, *d* toma un valor de 31 días.

Ejemplo 4.30

Si el valor de la UVR el día 15 de febrero es de $ 103.56, calcular el valor de la UVR para el día 17 de febrero, si la inflación de enero fue del 1%.

El período de cálculo corresponde al 16 de febrero y el 15 de marzo, lo que indica que el valor de *d* es igual a 28 días y el valor de *t* es igual a 2.

$$UVR_{17} = UVR_{28}(1 + INF)^{t/d}$$

$$UVR_{17} = 106.4656(1 + 0.023)^{1/31} = \$\ 106.5437$$

Comentario: El valor de la UVR aumenta cada día por efecto de la inflación del mes anterior, aplicada sobre el valor del día anterior. Esto indica que podemos calcular el valor de la UVR para cualquier día del período de cálculo si se conoce el valor de la UVR del día anterior, o de cualquier otro día dentro del período de cálculo, sin que sea necesario apoyarse en el valor del día 15, como lo indica la fórmula. Por ejemplo, si el valor de la UVR del día 23 de febrero es de $ 103.8548 y se desea conocer el valor de la UVR del día 24 de febrero, el cálculo puede realizarse de la siguiente forma:

$$UVR_{24} = UVR_{15}(1.01)^{9/28}$$

$$UVR_{24} = 103.56(1.01)^{9/28} = \$\ 103.8917$$

O también:

$$UVR_{24} = UVR_{23}(1.01)^{1/28}$$

$$UVR_{24} = UVR_{23}(1.01)^{1/28}$$

$$UVR_{24} = 103.8548(1.01)^{1/28} = \$\ 103.8917$$

16. Tasa de inflación

Hemos analizado hasta aquí situaciones financieras suponiendo una situación económica estable, es decir, o bien la inflación es cero o su variación es tan pequeña que no afecta el nivel de precios de los bienes o servicios. Pero nuestra realidad es otra, porque en nuestro país el índice de inflación es demasiado alto, por esta razón, es importante conocer cómo se involucra la inflación en nuestros análisis financieros.

La inflación es el incremento persistente de los precios de los bienes y servicios producidos por la economía de un país, lo que conlleva a la pérdida del poder adquisitivo de la moneda. La inflación tiene causas muy complejas, siendo la más importante el aumento del dinero circulante sin un aumento equivalente de la producción de bienes y servicios. Al aumentar la cantidad de moneda en circulación la gente tiene más dinero en su poder para consumir y la tendencia es a gastarlo, aumentando de esta manera la demanda de bienes y servicios, y al no haber un aumento de la oferta, los precios suben.

La tasa de inflación se define como la medida del incremento continuo en los precios de los bienes y servicios a través del tiempo *(García, 1997)*. Se aplica sobre el precio inmediatamente anterior y por esta razón opera como una tasa de interés compuesto. Así, por ejemplo, si decimos que la inflación promedio mensual durante los 5 primeros meses de un cierto año fue del 2.5% mensual, un artículo que al principio del primer mes valía $ 100 tendrá un valor al final del quinto mes de:

$$F = 100\ (1 + 0.025)^5 \qquad (3.1)$$

$$F = \$\ 113.14$$

Antes de entrar a analizar el efecto de la inflación en los cálculos financieros, conviene advertir que este tema se tratará bajo el supuesto de una economía con inflación pura, o sea, asumiendo que la variación de los precios de todos los bienes y servicios es constante y, además, que el aumento de precios es igual a la inflación. Esto a simple vista es irreal, ya que día a día se observa que el comportamiento de la inflación afecta en forma diferencial a cada uno de los sectores de la economía y que el aumento de precios no es igual a la inflación. Es evidente que si la inflación es del 10% en un año en

particular, se puede esperar que algunos precios se elevarán en más del 10% y otros en menos del 10%. De hecho, la inflación es un promedio ponderado de los precios de una gran variedad de bienes y servicios y la presión que ejerce, por ejemplo, sobre el sector de la construcción es diferente a la del sector laboral. Lo que si viene a ser importante es entender que al existir inflación hay un cambio en el poder de compra del dinero, y que existe un cambio diferencial de precios por el hecho real de que los bienes y servicios no aumentan de precios en una misma proporción.

Ejemplo 4.31

Bajo la consideración que la inflación promedio anual sea del 22% para los dos años siguientes, una vivienda que vale hoy $ 10.000.000, ¿cuánto costará dentro de 2 años?

$$F = P(1 + i)n \tag{3.1}$$

$$F = 10.000.000(1 + 0.22)^2$$

$$F = \$\ 14.884.000$$

El valor futuro calculado es el valor de la vivienda en pesos corrientes, después de 2 años.

Este valor futuro se obtiene también aplicando directamente la siguiente expresión general:

$$F = P(1 + Inf\ 1)(1 + Inf\ 2)(1 + Inf\ 3)\ldots (1 + Inf\ n) \tag{4.17}$$

$$F = 10.000.000(1 + 0.22)(1 + 0.22) = \$\ 14.884.000$$

A este último valor se le conoce como el valor del activo en *pesos nominales o corrientes*. También existe la operación inversa como es la de calcular el valor del activo al cabo de 2 años, medidos en pesos de hoy. Esta operación consiste en quitarle al valor futuro la inflación de los 2 años.

$$F = P(1 + i)^n \tag{3.1}$$

$$P = \frac{F}{(1 + i)^n}$$

$$P = \frac{14.884.000}{(1 + 0.22)^2}$$

$$P = \$\ 10.000.000$$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 10.000.000 PV EXE	VDT
10.000.000 +/- PV	(-) 10.000.000 PV	(-) 10.000.000 F3	22 I % EXE	10.000.000 +/- VA
22 i%	22 i%	22 F2	2 n EXE	22 % IA
2 n	2 n	2 F1	0 PMT EXE	2 N
COMP FV	COMP FV EXE	COMP F5	FV SOLVE	VF
14.884.000 FV	14.884.000 FV	14.884.000 F5	14.884.000 FV EXE	14.884.000 VF
22 i%	22 i%	22 F2	22 I % EXE	22 % IA
2 n	2 n	2 F1	2 n EXE	2 N
COMP PV	COMP PV	COMP F3	PV SOLVE	VA

En Excel: = VF (tasa; nper; pago;VA;tipo)

= VF (22%; 2; 0; −10.000.000)

= VA (tasa; nper; pago;VF; tipo)

= VA (22%; 2; 0; −14884000)

O también despejando de la expresión (4.17) el valor de P que corresponde al valor deflactado.

$$P = \frac{F}{(1 + \text{Inf } 1)(1 + \text{Inf } 2)}$$

$$P = \frac{14.884.000}{(1 + 0.22)(1 + 0.22)}$$

$$P = \$\ 10.000.000$$

A este valor se le conoce como el valor del activo dentro de 2 años medidos en *pesos constantes o reales*[7]**,** y a la operación de cálculo se le conoce como *Deflactación.*

Con frecuencia queremos comparar el precio que tiene hoy un bien con el que tenía, o con el que es probable que tenga en el futuro. Para que esta comparación tenga sentido es necesario medir los precios en términos reales o constantes y no en términos corrientes. (*Pindyck, 1995*). El precio nominal o corriente de un bien es simplemente su precio absoluto. Por ejemplo, si el precio de una docena de huevos en 2000 era de $1.000 y de $ 2.500 en 2003, estos son los precios que habríamos visto en los estantes de los supermercados en esos años. El precio real o constante es el precio una vez descontada la inflación, en otras palabras, es el valor del dinero futuro en términos del dinero actual.

En Matemáticas Financieras estos conceptos son importantes porque a la gente le interesa el valor adquisitivo que tiene el dinero (valor real), no su valor nominal. Para entender esto, asumamos que usted. presta $ 100.000 a un amigo. Con este dinero puede comprar hoy una cantidad de bienes y servicios. ¿De qué le valdría a usted. recibir después de un año $ 500.000, si con esta cantidad de dinero compra una cantidad menor que la que compraba hace un año con los $ 100.000? Simplemente usted ha perdido dinero porque lo que recibe tiene menor poder adquisitivo que lo que prestó. Considerar que obtuvo una ganancia de $ 400.000 se conoce comúnmente como *"ilusión monetaria".*

Cuando se realiza un estudio de precios y sus variaciones, generalmente, se parte de un índice base que se hace igual a 100 y luego al compararlo con índices de años posteriores se obtiene el alza promedio en el costo de vida, que en forma inversa reflejará la desvalorización del dinero o pérdida de su poder de compra. Así, por ejemplo, si el índice inicial o base (I_0) es 100 y al año siguiente (I_1) es 110, esto significa que el costo de vida aumentó en un 10%. En otros términos, es necesario desembolsar 110 unidades monetarias para poder adquirir los mismos bienes y servicios que se adquirían con 100 unidades monetarias en el año base.

Llamemos: I_0 = Índice del año base

I_1 = Índice del año uno

I_2 = Índice del año dos

Asumamos los siguientes valores para cada índice: $I_0 = 100$

$I_1 = 110$

$I_2 = 121$

Analizando los valores de los índices se observa que la variación anual, y para los dos años es del 10%. Esto quiere decir que si un artículo costaba en el año base $ 100, al año cuesta $ 110 y a los dos años $ 121. Analizando los valores acumulados se observa, también, que la variación del precio del artículo es del 21% y no del 20%, porque estas variaciones operan en forma compuesta, o sea, que el aumento de precios (10%) se hace sobre el precio anterior.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 100 PV EXE	VDT
100 +/- PV	(-) 100 PV	(-) 100 F3	10 I % EXE	100 +/- VA
10 i%	10 i%	10 F2	2 n EXE	10 % IA
2 n	2 n	2 F1	0 PMT EXE	2 N
COMP FV	COMP FV EXE	COMP F5	FV SOLVE	VF

En Excel: = VF (tasa; nper; pago; VA; tipo)

= VF (10%; 1; 0; −100)

= VF (10%; 2; 0; −100)

Esta operación se puede realizar una sola vez con la misma función VF, cambiando el número de períodos en la barra de fórmulas.

Los índices de la referencia nos sirven, entonces, para determinar la tasa de inflación promedio, que nos muestra la desvalorización de la moneda o pérdida de su poder adquisitivo.

Cabría preguntar: pero si la inflación para todos los años, o meses, no es igual, ¿cómo se obtienen los índices y cómo podemos hacer proyecciones? Ciertamente, la inflación no tiene una variación uniforme, pero lo que si es cierto es que cada aumento se hace sobre el valor anterior, que a su vez es un acumulado de otros valores anteriores.

Así por ejemplo, si tenemos: $I_0 = 100$

$I_1 = 115$

$I_2 = 138$

$I_3 = 162.84$

Para calcular las variaciones anuales se divide el índice de cada año por el índice anterior. Los aumentos son: el primer año el 15%, el segundo año el 20% y el tercer año el 18%.

Sobre estos tres aumentos diferentes cada año, podemos calcular un aumento promedio anual para los tres años, aplicando la fórmula básica $F = P(1 + i)^n$.

$$162.84 = 100(1 + i)^3$$

$$i = 17.65\% \text{ anual}$$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 100 PV EXE	VDT
100 +/- PV	(-) 100 PV	(-) 100 F3	162.84 FV EXE	100 +/- VA
162.84 FV	162.84 FV	162.84 F5	3 n EXE	162.84 VF
3 n	3 n	3 F1	0 PMT EXE	3 N
COMP i%	COMP i% EXE	COMP F2	I % SOLVE	% IA

En Excel: = TASA (nper; pago; VA; VF)

= TASA (3; 0; −100; 162,84)

Al utilizarse los índices de precios suele cometerse el error de considerar su promedio aritmético como la tasa promedio. Esto es así cuando las variaciones de precios no son tan dispares, pero lo cierto es que la inflación se aplica sobre el valor acumulado del período anterior y, por lo tanto, obra como interés compuesto (sin ser interés compuesto), por lo que la tasa promedio resulta ser una tasa promedio ponderada.

Ejemplo 4.32

Calcular la inflación promedio anual, si las inflaciones fueron: primer año del 20%, segundo año del 30% y tercer año del 35%.

El promedio aritmético de las inflaciones de los tres años es:

$$\frac{20 + 30 + 35}{3} = 28.33\%$$

El promedio ponderado obtenido por medio de los índices es: $I_0 = 100$

$I_1 = 120$

$I_2 = 156$

$I_3 = 210.60$

Considerando $I_0 = 100$ y $I_3 = 210.60$, la inflación promedio anual se calcula con la ecuación básica $F = P(1 + i)^n$.

$$210.60 = 100(1 + i)^3$$

Despejando el valor de *i*, que corresponde a la inflación promedio, se obtiene un valor de 28.18% anual. Se observa la diferencia entre los dos promedios.

Ejemplo 4.33

Se invierten $ 2.000.000 y después de 3 meses se reciben $ 2.100.000. Si la inflación del primer mes fue del 1.8%, la del segundo mes del 1.2% y la del tercer mes del 2.0%, calcular si el dinero inicial invertido aumentó o disminuyó en términos reales.

La solución más sencilla se plantea comparando el valor recibido después de los tres meses con el valor de la inversión, expresado en términos corrientes, al final del trimestre. Si el valor recibido es menor que el valor proyectado, no hay crecimiento real y se pierde dinero, porque ni siquiera se recupera su poder adquisitivo. Si los valores son iguales, apenas se recupera el poder adquisitivo y no existe ni pérdida ni ganancia.

Pero, si el valor proyectado en pesos corrientes es menor que el valor recibido se gana dinero y éste crece en términos reales. Como veremos más adelante, con el cálculo de la tasa real se determina en forma exacta el porcentaje de crecimiento real del dinero.

Se calcula en pesos corrientes lo que se debe recibir al final del trimestre para conservar el poder adquisitivo del dinero, es decir, para tener el mismo dinero.

$$F = P(1 + Inf\ 1)(1 + Inf\ 2)(1 + Inf\ 3) \quad (4.17)$$

$$F = 2.000.000\ (1 + 0.018)(1 + 0.012)(1 + 0.02)$$

$$F = \$\ 2.101.640.64$$

El resultado indica que no hubo crecimiento real del dinero, porque con lo que se recibe no se recupera ni siquiera el poder adquisitivo de la inversión inicial. En otras palabras, se perdió dinero en la inversión que se hizo.

Ejemplo 4.34

La inflación del mes de enero de 2006 fue del 1.35%. Si esta tasa de inflación se mantiene constante mes tras mes, ¿cuál es la tasa de inflación de todo el año?

Primera solución. Aplicando la ecuación de la tasa efectiva (4.2) que supone que la tasa de interés, en este caso la tasa de inflación, se aplica sobre el valor acumulado anterior.

$$TEA = (1 + i)^n - 1 \quad (4.2)$$

$$TEA = (1 + 0.0135\ )^{12} - 1$$

$$TEA = 17.46\%\ \text{anual}$$

Segunda solución. La solución consiste en aplicarle a un producto conocido (P) un incremento constante del 1.35% mensual, y luego con el valor inicial P y el valor final F, calcular el incremento que sufrió el producto después de un año, que corresponde a la tasa de inflación anual.

$$P = 100$$

$$i = 1.35\%$$

$$n = 12$$

$$F = ?$$

$$F = P(1 + i)^n \quad (3.1)$$

$$F = 100\ (1+0.0135)^{12}$$

$$F = \$\ 117.46$$

Si a principios del año un cierto producto costaba $ 100 y a fin de año cuesta $ 117.46, significa que ésta sufrió un aumento del 17.46% anual, que corresponde a la inflación acumulada en el año.

Ejemplo 4.35

Pedro le vende hoy a usted una motocicleta por $ 2.500.000 y acepta que le pague después de 6 meses, sin intereses. ¿Cuánto debe entregarle para que reciba el mismo dinero que le prestó, si la inflación promedio mensual es del 1.0%?

El dinero va perdiendo poder de compra cada día, debido a la inflación. Lo justo es que, así no tenga que pagar intereses, usted devuelva el mismo poder de compra que Pedro le entregó. La solución se logra aplicándole al dinero recibido el ajuste por inflación.

$$F = P(1 + i)^n$$

$$F = 2.500.000(1 + 0.01)^6$$

$$F = \$\ 2.653.800.37$$

¿Cuánto debería entregar usted, suponiendo que la inflación fue del 1.0% negativa?

Al aplicar la fórmula básica $F = P(1 + i)^n$, la tasa de interés es negativa.

$$F = 2.500.000(1 - 0.01)^6 = \$\ 2.353.700.37$$

En este caso no hubo inflación sino *deflación* (disminución de precios en bienes y servicios). Una motocicleta que costaba hace 6 meses $ 2.500.000, hoy tiene un valor de $ 2.353.700.37.

Lo mencionado en este ejercicio para el caso de un producto, es válido aplicarlo a los salarios. En una economía inflacionaria el empleado que no recibe aumento de sueldo, o bien, lo recibe en un porcentaje inferior a la inflación, se empobrece ya que el poder de compra de su sueldo se reduce en forma tal, que termina por ser insuficiente para mantener el nivel de vida acostumbrado. Esta consideración nos permite concluir, que el aumento del salario mínimo debe hacerse sobre la inflación pasada y no sobre la inflación proyectada.

Ejemplo 4.36

Un empleado de la empresa Omega Ltda gana actualmente $ 450.000 mensuales y hace 4 años ganaba $ 280.000. La inflación del primer año fue del 20%, la del segundo año del 21%, la del tercer año del 18% y la del cuarto año del 17%.

1. ¿Cuál debe ser el valor del sueldo actual?
2. Determinar, en términos reales, si su sueldo ha aumentado o disminuido.

Como la variación de la inflación no es constante, se requiere calcular una inflación promedio para los 4 años, utilizando los índices de precios. Asumimos un índice base de 100, aunque podemos asumir un valor diferente.

$$I_0 = 100$$

$$I_1 = 120$$

$$I_2 = 145.20$$

$$I_3 = 171.34$$

$$I_4 = 200.47$$

Estos índices se obtuvieron aplicándole al índice anterior el porcentaje de la inflación para cada período, siendo el índice anterior un valor acumulado.

Calculamos la tasa de inflación promedio anual por medio de la fórmula básica.

$$F = P(1 + i)^n \quad (3.1)$$

$$200.47 = 100\ (1 + i)^4$$

$$i = 18.99\%\ \text{anual}$$

Se calcula el valor del sueldo final del empleado aplicando la fórmula básica y asumiendo que el sueldo de hace cuatro años es un valor presente (P).

$$F = P(1 + i)^n$$

$$F = 280.000(1 + 0.1899)^4$$

$$F = \$\ 561.306.26$$

Este valor obtenido es el sueldo que debería estar ganando el empleado actualmente, que comparado con lo que realmente está devengando representa una pérdida de $111.316.26 en pesos corrientes, es decir, en pesos actuales.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-) 280.000 PV EXE	VDT
280.000 +/- PV	(-) 280.000 PV	(-) 280.000 F3	18.99 I% EXE	280.000 +/- VA
18.99 i%	18.99 i%	18.99 F2	4 n EXE	18.99 % IA
4 n	4 n	4 F1	0 PMT EXE	4 N
COMP FV	COMP FV EXE	COMP F5	FV SOLVE	VF

En Excel: = VF (tasa; nper; pago; VA; tipo)

= VF (18,99%; 4; 0; −280.000)

La solución a este primer punto del ejercicio también la plantea la expresión (4.17).

$$F = 280.000(1.20)(1.21)(1.18)(1.17) = \$\ 561.316.26$$

Para desarrollar el segundo interrogante del ejercicio, se deflacta el valor del sueldo actual ($450.000) expresado en pesos corrientes. En otras palabras, le descontamos al sueldo actual el efecto de la inflación.

$$P = \frac{F}{(1 + i)^n} = \frac{450.000}{(1 + 0.1899)^4}$$

$$P = \$\ 224.472.49$$

Quiere decir que el sueldo actual equivale a $ 224.472.49 del sueldo de hace tres años, lo que indica, que ganaba más hace tres años pues su sueldo era de $ 280.000.

El problema también lo podemos resolver comparando el incremento porcentual que debió sufrir el sueldo, con el porcentaje que realmente subió. Sabemos que la tasa de inflación promedio anual fue del 18.99% anual, lo que indica que en este porcentaje debió aumentar el sueldo del empleado. Miremos en que porcentaje subió el sueldo.

$$F = P(1 + i)^n$$

$$450.000 = 280.000(1 + i)^4$$

$$i = 12.59\%\ \text{anual}$$

Otro procedimiento. Podemos llegar a los mismos resultados y conclusiones utilizando los índices del año base (I_0) y el del año final (I_4).

Calculamos el valor del sueldo en pesos corrientes después de 4 años, partiendo de un valor de $ 280.000 a una tasa de inflación promedio del 18.99% anual, con la siguiente expresión.

$$\text{Sueldo} = 280.000 \times \frac{I_4}{I_0}$$

$$\text{Sueldo} = 280.000 \times \frac{200.47}{100}$$

$$\text{Sueldo} = \$\ 561.316.26$$

Calculamos el sueldo actual en pesos constantes o reales, pesos de hace 4 años, por medio de la siguiente expresión.

$$\text{Sueldo actual} = 450.000 \times \frac{I_0}{I_4}$$

$$\text{Sueldo actual} = 450.000 \times \frac{100}{200.47}$$

$$\text{Sueldo actual} = \$\ 224.472.49$$

Como conclusión del ejercicio establecemos dos expresiones para calcular valores corrientes y constantes, conocidos los índices de precios:

- Para pasar un precio corriente a precio constante, se hace la siguiente operación.

  $$\text{Precio constante } (P_0) = \text{Precio corriente } (P_n) \times \frac{I_0}{I_n}$$

- Para proyectar precios corrientes, se procede así:

  $$\text{Precio Corriente } (P_n) = \text{Precio corriente } (P_0) \times \frac{I_n}{I_0}$$

Es evidente que los ingresos fijos se reducen en su poder adquisitivo, terminando por ser insuficientes para mantener los costos de vida (*Portus, 1997*). El empleado, por ejemplo, que recibe un ingreso mensual fijo de $ 500.000 ve reducirse cada mes el poder de compra de su sueldo en $ 5.000, aproximadamente, con una inflación mensual del 1.0%, alcanzándolo a recuperar al final del año si el reajuste a su salario es, por lo menos, igual a la inflación del año transcurrido. Pero el proceso se repite cada año. Se inicia con un poder de compra que se va reduciendo cada mes hasta cuando le reajustan el salario. El siguiente ejercicio puede mostrar cómo pierde cada mes poder adquisitivo el salario de un empleado.

Ejemplo 4.37

Un empleado gana $ 500.000 mensuales. Si la inflación promedio mensual es del 1.0%, diseñe una tabla que muestre la desvalorización de su sueldo durante el año.

La solución al ejercicio consiste en deflactar por medio de un factor el valor nominal del salario mensual, lo que significa establecer una relación del ingreso nominal vs. el ingreso real (ver tabla página siguiente).

La segunda columna de la tabla corresponde al ingreso nominal y la cuarta columna al ingreso real. Se hace evidente que mantener el ingreso nominal significa un desmejoramiento del ingreso real, ya que la inflación hace perder la capacidad adquisitiva del sueldo. En efecto, al analizar las cifras se observa que el sueldo del empleado a finales del año es $ 56.275.39 menor en poder de compra que al principio del año. Desde otro punto de vista, el empleado termina ganando al final del año un 88.74% del sueldo que ganaba al principio del año. Si al final del año le reajustan el salario en un porcentaje equivalente a la inflación del 1.0% mensual acumulada, es decir, en un 12.68% anual (1.0% mensual $\Leftrightarrow$ 12.68% anual), le queda un sueldo de $ 563.412.51, que es equivalente a $ 500.000 de hace un año. Es decir, no recibe aumento de sueldo sino que recupera su poder de compra, el cual se va deteriorando con el transcurrir de los meses hasta llegar nuevamente al final del año con el sueldo desvalorizado. Se observa con este ejemplo el problema que se les presenta a todas las personas que tienen un ingreso fijo mensual, en cubrir los gastos familiares al perder su salario, en forma paulatina, poder de compra.

Mes	Sueldo	Factor	Sueldo real
1	$ 500.000	$\frac{1}{(1+0.01)^{1}}$	$ 495.049.50
2	$ 500.000	$\frac{1}{(1+0.01)^{2}}$	$ 490.148.02
3	$ 500.000	$\frac{1}{(1+0.01)^{3}}$	$ 485.295.07
4	$ 500.000	$\frac{1}{(1+0.01)^{4}}$	$ 480.490.17
5	$ 500.000	$\frac{1}{(1+0.01)^{5}}$	$ 475.732.84
6	$ 500.000	$\frac{1}{(1+0.01)^{6}}$	$ 471.022.62
7	$ 500.000	$\frac{1}{(1+0.01)^{7}}$	$ 466.359.03
8	$ 500.000	$\frac{1}{(1+0.01)^{8}}$	$ 461.741.61
9	$ 500.000	$\frac{1}{(1+0.01)^{9}}$	$ 457.169.91
10	$ 500.000	$\frac{1}{(1+0.01)^{10}}$	$ 452.643.48
11	$ 500.000	$\frac{1}{(1+0.01)^{11}}$	$ 448.161.86
12	$ 500.000	$\frac{1}{(1+0.01)^{12}}$	$ 443.724.62

Ejemplo 4.38

El señor García le prestó a un familiar $ 2.000.000 con el compromiso de devolvérselos, sin cobrarle intereses, transcurridos 6 meses. Si la inflación del semestre fue del 12%, calcular:

a. El valor real del dinero devuelto.

El valor real es el que resulta una vez descontada la inflación, es decir, es el valor presente equivalente a los $ 2.000.000 a una tasa igual a la inflación del período.

$$P = \frac{2.000.000}{1.12}$$

$$P = \$\ 1.785.714.29$$

El resultado se interpreta de la siguiente forma: el señor García compra con los $ 2.000.000 que le entregó el familiar lo que compraba con $ 1.785.714.91 hace 6 meses, en consecuencia, la inflación favoreció al familiar porque paga la deuda con dinero desvalorizado. Analizado el ejercicio de otra forma, el familiar devuelve solamente $ 1.785.714.91 de los $ 2.000.000 que le prestó el señor García.

Este ejercicio reafirma el concepto fundamental del valor del dinero en el tiempo en el sentido de que el interés es un factor que compensa la pérdida del valor adquisitivo del dinero.

b. Pérdida de valor, expresada en porcentaje.

El dinero prestado sufrió una pérdida de valor real igual a $ 2.000.000 − $ 1.785.714.29 = $ 214. 285.71, que expresada en porcentaje es:

$$\frac{214.285.71}{2.000.000} = 10.71\%$$

Esto significa que el señor García por ayudar a su familiar incurrió en una pérdida del 10.71% sobre los $ 2.000.000 prestados.

Para que el señor García no pierda dinero necesita que el familiar le entregue el valor prestado ($ 2.000.000) incrementado en un porcentaje igual a la inflación del período.

$$F = 2.000.000(1 + 0.12) = \$\ 2.240.000$$

Los $ 2.240.000 tienen el mismo poder adquisitivo de $ 2.000.000 de 6 meses atrás, es decir, con $ 2.240.000 el señor García comprará la misma cantidad de bienes y servicios que compraba hace 6 meses con $ 2.000.000.

Ejemplo 4.39

¿A cuánto equivalen $ 2.000.000 de febrero de 2003 en términos de pesos de marzo de 1999, si el índice de precios para marzo de 1999 es igual a 100 y el índice de precios para febrero de 2003 es igual a 187?

$$I_0 = 100$$

$$I_4 = 187$$

Los valores de los 2 índices indican que la inflación promedio de los 4 años fue del 16.94% anual. Este valor de i se calculó aplicando $F = P(1 + i)^n$, asumiendo $P = 100$, $F = 187$ y $n = 4$.

$$\text{Precio}_{1999} = 2.000.000 \times \frac{100}{187}$$

$$\text{Precio}_{1999} = \$\ 1.069.518.72$$

Lo que en marzo de 1999 costaba $ 1.069.518.72, cuesta $ 2.000.000 en febrero de 2003.

- Para proyectar precios corrientes, simplemente se hace la operación contraria.

$$\text{Precio corriente } (P_n) = \text{Precio nominal } \left(P_0\right) \times \frac{I_n}{I_0}$$

Si se tiene una cantidad de dinero por valor de $ 1.069.518.72 de febrero de 1999 y se desea calcular su equivalente en pesos de marzo de 2003, con una inflación promedio del 16.94% anual, hacemos el siguiente cálculo aplicando la ecuación básica.

$$F = P(1 + i)^n \tag{3.1}$$

$$F = 1.069.518.72(1 + 0.1694)^4$$

$$F = \$\ 2.000.000$$

Por medio de los índices: $I_0 = 100$

$$I_4 = 187$$

$$\text{Precio}_{2003} = \text{Precio}_{1999} \times \frac{I_{2003}}{I_{1999}}$$

$$\text{Precio}_{2003} = 1.069.518.72 \times \frac{187}{100}$$

$$\text{Precio}_{2003} = \$\ 2.000.000$$

Esto indica que $ 1.069.518.72 de febrero de 1999 son equivalentes a $ 2.000.000 de marzo de 2003. En otras palabras, lo que se compraba en febrero de 1999 con $ 1.069.518.72 se compra en marzo de 2003 con $ 2.000.000.

El DANE (Departamento Administrativo Nacional de Estadísticas) calcula para cada uno de los meses, de un determinado período, el IPC (Índice de Precios al Consumidor), por medio de una tabla llamada Series de empalme, de tal forma, que para proyectar precios corrientes basta con conocer el IPC del mes base y del mes terminal y aplicar las expresiones analizadas en el ejercicio 4.37.

17. Tasa real o tasa deflactada

Se define como aquella tasa que el mercado financiero estaría dispuesto a pagarle a cualquier inversionista en ausencia de la inflación. Esto indica, que la tasa real es la tasa de interés sin inflación. Al analizar cualquier operación que involucre el manejo del dinero es necesario ver el efecto que produce la inflación, en consecuencia, la tasa real debe ser la preocupación permanente de todo inversionista que aspire a ver crecer su

dinero en términos reales, ya que nada gana con obtener un rendimiento sobre una inversión si la inflación iguala o supera este rendimiento.

Al realizarse una inversión se presentan tres tipos de rendimientos: el rendimiento efectivo que es el que aspira obtener el inversionista al pactar la tasa de interés con su deudor. El rendimiento neto, que resulta de descontarle a la tasa efectiva el valor de los impuestos, y el rendimiento real que resulta de descontarle al rendimiento neto la tasa de inflación del período. La tasa efectiva resulta, entonces, afectada además de los costos como las comisiones, estudios de crédito etc, de factores como los impuestos y la inflación.

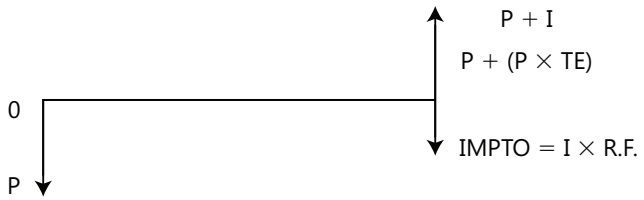
En forma análoga, al contratarse un crédito existirán, también, tres tipos de costos: costo efectivo, que viene definido por la tasa efectiva del crédito; costo después de impuestos o costo neto, que resulta de descontar el efecto de los impuestos (beneficio tributario) y el costo real que resulta de descontar el efecto inflacionario. En consecuencia, así como los impuestos y la inflación reducen el rendimiento real de una inversión, los mismos impuestos y la misma inflación reducen el costo de un crédito.

17.1 Rentabilidad neta de una inversión

La rentabilidad neta de una inversión es la rentabilidad efectiva corregida por los impuestos. Generalmente, a los rendimientos financieros (intereses) que se obtienen en una operación de ahorro se les aplica un mecanismo fiscal denominado *retención en la fuente*, que consiste en deducir de los intereses devengados un porcentaje, que pasa al fisco y se considera como un anticipo del pago de impuestos. Para el caso específico de los intereses, este porcentaje es del 7%. Es evidente que esta deducción afecta el rendimiento sobre el dinero, porque al final de cuentas se reciben menos intereses que los esperados. Por esta razón, cuando se realizan análisis de rendimientos no se puede desconocer el efecto que ejercen los impuestos (retención en la fuente) sobre una inversión. Al establecerse la relación entre los intereses netos recibidos (intereses devengados menos la retención en la fuente) y la inversión, resulta la rentabilidad neta.

Consideremos que se invierte un capital P durante un período de tiempo n a una tasa efectiva TE:

P = Capital invertido.
RN = Rentabilidad neta.
TE = Costo efectivo o rendimiento efectivo.
I = Intereses.
IN = Intereses netos.
R.F. = Retención en la fuente.
IMPTO = Valor de los impuestos.



Se calcula el valor de los intereses devengados. $I = P \times TE$

El valor de los impuestos anticipados es: $IMPTO = I \times R.F.$

Los intereses netos resultan de restarle al valor de los intereses devengados el valor de los impuestos.

$$IN = I - IMPTO. \quad (1)$$

Reemplazando en (1) $I = P \times TE$, se tiene: $IN = P \times TE - I \times R.F.$

$$IN = P \times TE - P \times TE \times R.F.$$

Factorizando P. $IN = P(TE - TE \times R.F)$

El rendimiento neto de una inversión es igual a los intereses netos (IN) sobre el capital invertido (P).

$$\frac{IN}{P} = RN = TE - TE \times R.F. \qquad RN = TE(1 - R.F.) \quad (4.18)$$

En términos específicos, la retención en la fuente no se puede considerar como el monto total de impuestos, sino apenas un anticipo sobre su pago. Por esta razón, con la expresión (4.18) se calcula el rendimiento neto después de aplicada la retención en la fuente, no el rendimiento neto después de impuestos.

Observemos, por medio de un ejemplo, el cálculo del rendimiento de una operación financiera, después de aplicada la retención en la fuente y después de impuestos:

Ejemplo 4.40

Blanca Elena constituye un CDT en el Banco Davivienda por valor de $ 3.000.000 a una tasa de interés del 3.50% EA, con un plazo de 90 días. Calcular:

a) Valor neto a recibir (capital + intereses netos)

b) Rendimiento neto (después de impuestos)

La tasa de interés que le reconocerá la entidad financiera está expresada como efectiva anual, lo que indica que si el plazo del CDT fuera de un año le aplicarían el 3.50% sobre los $ 3.000.000. Pero el plazo es de 90 días correspondiente a un trimestre, por lo tanto, es necesario calcular la tasa de interés trimestral equivalente al 3.50% EA.

$$TEA = (1 + TET)^4 - 1$$

$$TET = (1.035)^{1/4} - 1$$

$$TET = 0.86\% \text{ trimestral}$$

En Excel: $= TASA(4; 0; -1; 1{,}035)$

La tasa de interés del 0.86 % trimestral corresponde al rendimiento efectivo para Blanca Elena.

Al finalizar el trimestre la entidad financiera le liquida el valor de los intereses:

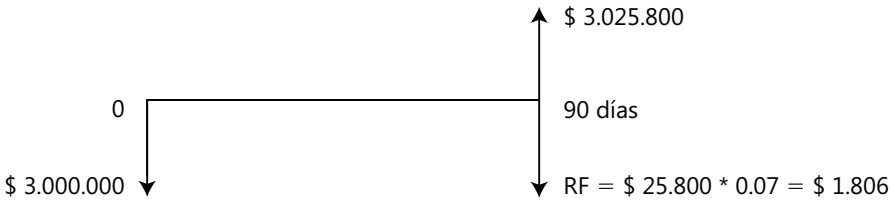
$$I = P * i$$

$$I = \$\ 3.000.000 * 0{,}0086 = \$\ 25.800$$

Veamos el flujo de caja de la operación financiera:

Los intereses recibidos son gravados con el 7% de retención en la fuente, como anticipo del pago de impuestos.

La situación real de la operación financiera se refleja a través del siguiente flujo de caja:



Blanca Elena recibe después de los 90 días $ 3.023.994, que resultan de descontarle a los $ 3.025.800 el valor de la retención en la fuente. El valor de los intereses netos será igual $ 23.994.

Calculamos el rendimiento neto (después de aplicada la retención en la fuente).

$$i = \frac{F}{P} - 1$$

$$i = \frac{3.023.994}{3.000.000} - 1$$

$$i = 0.80\ \%\ \text{trimestral}$$

Este rendimiento después de aplicada la retención en la fuente (después de impuestos) también se puede obtener aplicando la fórmula:

$$RN = RE(1 - RF)$$

Siendo:

RN = rentabilidad neta

RE = rentabilidad efectiva

RF = retención en la fuente

$$RN = 0.0086(1 - 0.07)$$

$$RN = 0.80\%\ \text{trimestral}$$

17.2 Costo de la deuda después de impuestos

Cuando se toma un crédito, los intereses que se pagan son deducibles, como gastos financieros, de las utilidades y permiten un menor pago de impuestos. Por cada peso de intereses que se paga se ahorra en impuestos un monto determinado por la tasa de impuestos, lo que se traduce en que el gobierno asuma parte del costo de la deuda.

La mayoría de las legislaciones tributarias, consideran los intereses como un gasto del período que afecta la utilidad antes de impuestos.

Algunos empresarios miran el crédito como una varita mágica que les ayuda a resolver los problemas de liquidez y a aumentar el rendimiento de su inversión. En contraposición, existen otros que no quieren saber nada del crédito. ¿De qué depende una u otra visión? ¿No será que ambos casos carecen de una adecuada perspectiva de lo que el crédito puede hacer por las empresas que ellos representan? (*Gallardo, 1998*). Evidentemente, el costo del dinero se abarata como consecuencia del beneficio tributario (deducibilidad de intereses como gasto) y por la oportunidad que tiene el deudor de cancelar el dinero tomado en préstamo con pesos de menor valor, lo que se traduce en un costo real muy bajo, o negativo en algunos casos. Pero, al mismo tiempo, en la medida en que aumenta la proporción de deuda en una empresa, también aumenta el riesgo financiero. En el evento de producirse una disminución sustancial en las ventas, por ejemplo, se podría estar en la imposibilidad de cubrir el servicio de la deuda (intereses y capital), lo que acarrearía, en consecuencia, problemas de tipo legal, disminución de la rentabilidad y quiebra de la empresa. La teoría financiera tradicional recomienda tomar deuda para mejorar la rentabilidad siempre que el dinero tomado en préstamo produzca más de lo que cuesta, pero todavía no existe consenso entre los tratadistas financieros en relación a cuál debe ser el nivel de endeudamiento óptimo de una empresa. Tampoco se puede desconocer que trabajar sin deuda implica realizar una administración menos presionada. Cuando una empresa financia sus activos con recursos propios, puede capear una situación de crisis; no así, una empresa que tiene compromisos financieros ineludibles. En este curso, nos interesa conocer los efectos positivos que sobre el costo del dinero tomado en préstamo, producen el pago de intereses y la inflación. La discusión sobre la estructura financiera óptima de una empresa (parte derecha del balance general) es tema que el lector puede consultar en los textos especializados de administración financiera.

A continuación analizaremos un caso práctico que nos permitirá conocer el valor del ahorro en impuestos y, en consecuencia, la reducción en el costo del crédito por el hecho de tener deuda.

Ejemplo 4.41

Los directivos de una empresa, aunque reacios a contratar deuda, están considerando la posibilidad de aceptar un crédito de $ 100.000.000 que les ofrece un banco a una tasa de interés del 30% MV, con un plazo de un año. El gerente financiero les hace el siguiente razonamiento financiero para demostrarles el beneficio de usar deuda, por el efecto de la deducibilidad de los intereses como gastos financieros.

Se asume una utilidad operativa (U.A.I.I.) de $ 60.000.000 y que el capital prestado se le reembolsa al banco al final del año. La tasa de interés efectiva periódica es del 2.5% mensual, que resulta de capitalizar la tasa nominal del 30% MV, equivalente al 34.49% EA, que sería el costo del crédito antes de impuestos. La tasa de impuestos es del 35%.

El valor de los intereses mensuales es igual a: $I = 100.000.000 \times 0.025 = \$\ 2.500.000$.

Calculamos la utilidad neta a partir de la utilidad operativa, suponiendo dos situaciones: con deuda y sin deuda. La utilidad operativa para las dos situaciones es la misma, porque es independiente de la forma como se financie la empresa.

	Con deuda	**Sin deuda**
U.A.I.I.	$ 60.000.000	$ 60.000.000
Intereses	$ 30.000.000	$ 0
U.A.I.	$ 30.000.000	$ 60.000.000
IMPTO (35%)	$ 10.500.000	$ 21.000.000
Utilidad neta	$ 19.500.000	$ 39.000.000

Se observa:

- Cuando se trabaja sin deuda, se paga mayor impuesto.
- Por el hecho de trabajar con deuda, se pagan intereses.
- La utilidad neta disminuyó en $ 19.500.000. Esto nos indica que el costo nominal de la deuda fue de 19.50% MV, que resulta de hacer la relación entre la diferencia de las dos utilidades netas y el valor de la deuda.
- Al trabajar con deuda se genera un ahorro en impuestos (beneficio tributario), que resulta de multiplicar el valor de los intereses por la tasa de impuestos. Se observa que el valor de los impuestos disminuyó en $ 10.500.000, que resultan de multiplicar $ 30.000.000 $\times$ 0.35.

La tasa nominal, después del beneficio tributario, del 19.50% representa un costo efectivo del 21.34% EA, menor que la tasa del 34.49% EA pactada al inicio del préstamo. El costo efectivo del crédito se redujo[9] en 13.15%, por efecto de la deducibilidad de los intereses como gastos financieros.

Desarrollemos una ecuación universal con la cual se pueda conocer el costo de la deuda después de impuestos, cualquiera sean los parámetros de tasa de interés y tasa de impuestos.

Con el razonamiento numérico de este ejercicio, podemos plantear la siguiente ecuación:

$$Kd = \frac{\text{Valor de intereses} - \text{Ahorro en impuestos}}{\text{Deuda}}$$

$$Kd = \frac{P \times i - P \times i \times \text{IMPTOS}}{P}$$

$$Kd = \frac{P \times i\left(1 - \text{IMPTOS}\right)}{P}$$

Sacando factor común $P \times i$, en el numerador, se tiene:

$$Kd = \frac{P \times i\left(1 - \text{IMPTOS}\right)}{P} \qquad Kd = i(1 - \text{IMPTOS}) \qquad (4.20)$$

Donde: Kd = costo de la deuda después de impuestos

i = tasa efectiva periódica

IMPTOS = tasa de tributación.

El costo después de impuestos para este ejercicio es: $Kd = 0.025(1 - 0.35)$

$$Kd = 0.0163 = 1.63\% \text{ mensual}$$

$$\text{TEA} = (1 + 0.0163)^{12} - 1$$

$$\text{TEA} = 21.34\% \text{ EA}$$

Conviene aclarar que, cuando se estudian textos de finanzas avanzadas traducidos del inglés, se observa que el factor impuestos (1-IMPTOS) se aplica sobre la tasa efectiva anual del crédito. Esta situación es válida en economías en las que se cobran tasas de interés por año vencido no aplicable, donde se pactan tasas de interés para períodos menores de un año. Por nuestras circunstancias particulares, el factor impuestos debe aplicarse sobre la tasa efectiva periódica, como lo hicimos arriba, y no sobre la tasa efectiva anual. Para el ejercicio que estamos analizando, es incorrecto anualizar la tasa periódica y luego aplicarle el factor impuestos:

$$\text{TEA} = (1 + 0.025)^{12} - 1$$

$$\text{TEA} = 34.49\% \text{ EA}$$

$$Kd = 0.3449\ (1 - 0.35)$$

$$Kd = 22.42\% \text{ EA} \quad 21.34\% \text{ EA}$$

Además, la fórmula (4.20), que acabamos de utilizar, sólo permite una aproximación en sentido estricto, porque supone, por deducción, que los impuestos se pagan en el mismo período en que se causan y en la realidad esto ocurre al año siguiente. El ahorro de impuestos debería incluirse, entonces, en el flujo de caja como un ingreso en el momento en que, efectivamente, se pagan los impuestos.

17.3 Rentabilidad real de una inversión

En la sección 14, cap. 4, se expuso en una forma amplia lo que es la tasa real y se llegó a la conclusión de que es la que queda después de descontarle a la tasa de interés la tasa de inflación. Ahora nos interesa, en primer lugar, analizar su forma de cálculo desde el punto de vista matemático, aplicada a una inversión. Antes de entrar a hacer este análisis, es pertinente aclararle al lector que bajo el esquema prestamista − prestatario, cuando se realiza una inversión el prestamista obtiene una rentabilidad y cuando se actúa como prestatario, a través de un crédito, se asume un costo. Pero ambos conceptos: rentabilidad y costo, hacen referencia a una misma tasa de interés.

Con frecuencia se incurre en el error de afirmar que la tasa real es la que resulta de restarle a la tasa de interés la inflación. Aceptar como cierta esta afirmación sería considerar que la inflación sólo afecta al capital y no también a los intereses. *Bodie y Merton (1999)* ilustran el siguiente caso: ¿cuál será la tasa real de rendimiento si la tasa de interés es del 8% anual y si la inflación, medida por el cambio proporcional del índice de precios, es del 5% anual? La intuición revela que es simplemente la diferencia entre la tasa de interés y la inflación, que en este caso es del 3%. Esto es casi correcto, pero no exactamente.

Para entender por qué, desarrollemos mediante el siguiente ejercicio, una expresión universal que nos permita calcular con exactitud la tasa real.

Ejemplo 4.42

El señor Pedro Picapiedra invirtió $ 100 y al final del año recibió netos $ 125. ¿Qué rentabilidad real anual obtuvo?

$$F = \$125$$

$$P = \$100$$

$$I = \$25$$

$$i = \frac{I}{P} = \frac{25}{100} = 0.25 = 25\% = RN$$

Si en ese mismo período se presentó una inflación del 20% no podemos decir que la rentabilidad real (RR) sea igual al 5%, que resultaría de restarle al rendimiento neto la inflación, veamos:

Con los $ 100 que el señor Picapiedra invirtió al principio del año podía comprar 100 artículos de $ 1 cada uno. Con una inflación anual del 20%, ese mismo artículo valdrá al final del año:

$$\text{valor artículo} = 1.00\ (1 + 0.20)^1$$

$$\text{valor artículo} = \$\ 1.20$$

Al final del año tiene: $F = \$\ 125$

¿Cuántos de los mismos artículos podrá comprar el señor Picapiedra al final del año?

$$\text{cantidad de artículos} = \frac{125}{1.20}$$

$$\text{cantidad de artículos} = 104.17$$

El rendimiento real para el período es:

$$RR = \frac{F}{P} - 1$$

$$RR = \frac{104.17}{100} - 1 = 4.17\% \text{ anual}$$

El dinero creció en términos reales en un 4.17% anual. Este resultado es diferente al que se obtendría al restarle al rendimiento neto (25%) la tasa de inflación del año (20%).

Analizando el ejercicio desde otro punto de vista, podemos apreciar que la inflación afecta tanto al capital como a los intereses. Al deflactar estos dos valores con una tasa de inflación del 20% anual, se tiene el valor futuro después de un año, expresado en pesos del momento cero.

$$P = \frac{100}{(1 + 0.20)} + \frac{25}{(1 + 0.20)}$$

$$P = 83.3333 + 20.8333 = \$\ 104.17$$

Al invertir $ 100 y recibir después de un año $ 104.17 (medidos en pesos de hoy), el crecimiento real del dinero es del 4.17% anual.

Por las consideraciones anteriores, es importante establecer la diferencia entre la tasa de interés efectiva y la tasa de interés real. La primera mide el retorno de los ahorros en términos de cantidad de dinero, que se obtiene en el futuro con un monto de ahorro actual. La tasa de interés real mide el retorno en términos de cantidad de bienes, que se pueden adquirir en el futuro con un monto de ahorro actual (*Sachs y Larraín, 1994*). La tasa real mide la capacidad de compra de un dinero futuro obtenido con una cantidad de dinero que se ahorró en el presente, mientras que la tasa efectiva mide la cantidad de dinero que se recibe en el futuro después de realizada una inversión inicial.

Con el razonamiento anterior podemos llegar a una expresión que nos permita calcular el rendimiento real en función del rendimiento neto y la inflación.

$$RR = 4.17\% = \frac{104.17}{100} - 1$$

$$RR = \left[\frac{\frac{125}{1.20}}{100} \right] - 1$$

$$104.17 = \frac{125}{1.20} \qquad (1)$$

Los $125 son el resultado de invertir $ 100 a una tasa del 25% anual. Esto quiere decir que los $125 son iguales a $ 100(1 + 0.25) = $ 100(1 + RN). Durante el año de la inversión la inflación fue del 20%, por ello, el $ 1.20 es igual a (1 + INF).

Reemplazando en (1), tenemos: $RR = \left[\frac{\frac{100(1+RN)}{(1+INF)}}{\frac{100}{1}} \right] - 1$

Desarrollando la expresión y eliminando 100, tenemos:

$$RR = \left[\frac{(1+RN)}{(1+INF)} - 1 \right]$$

$$RR = \left[\frac{(1+RN) - 1(1+INF)}{(1+INF)} \right]$$

$$RR = \frac{RN - INF}{1 + INF} \qquad (4.22)$$

Donde: RR = rendimiento real (tasa real).

RN = rendimiento neto.

INF = inflación del período.

En todas las operaciones que involucran el manejo del dinero no se cobrará la retención en la fuente, en consecuencia, se hace necesario generalizar la expresión (4.22) para calcular la tasa real en función de la tasa efectiva y la tasa de inflación del período.

$$TR = \frac{TE - INF}{1 + INF} \tag{4.23}$$

Donde: TE = tasa efectiva o tasa corriente

INF = tasa de inflación

Esta expresión se conoce como *la fórmula de Fisher* en honor del matemático y economista Irving Fisher (1867 1947).

Aplicando la expresión (4.22) para el ejemplo 4.43 RN = 25% INF = 20%

$$RR = \frac{0.25 - 0.20}{1 + 0.20}$$

RR = 0.0417 = 4.17% anual

Una alternativa de ahorro debe generar un retorno que cubra la pérdida de poder adquisitivo del dinero en el tiempo, y que adicionalmente premie el ahorro y cubra el riesgo de sacar el dinero del bolsillo y entregarlo a otros que lo necesitan. Para el ejemplo 4.53 la tasa real del 0.1143% trimestral fue el premio al riesgo del inversionista. De esto surge la siguiente regla práctica: *si invertimos nuestro dinero en instrumentos financieros que dan una tasa real igual a cero, conservamos el valor de nuestro dinero. Si la tasa real es mayor que cero, se acrecenta el valor de nuestro dinero. Pero, si la tasa real es menor que cero, entonces tenemos una pérdida.*

Ejemplo 4.43

¿Cuál es la tasa real anual que rindió un pagaré bancario por la suma de $ 2.500.000, si al final del año usted recibió $ 3.250.000 y la tasa de inflación anual fue del 22%?

El rendimiento efectivo se calcula con la siguiente expresión: $RE = \frac{F}{P} - 1$

$$RE = \frac{3.250.000}{2.500.000} - 1 = 30\% \text{ anual}$$

Por medio de la expresión (4.23) se calcula el rendimiento real de la inversión.

$$RR = \frac{RE - INF}{1 + INF} = \frac{0.30 - 0.22}{1.22}$$

$$RR = 6.56\% \text{ anual}$$

El dinero del inversionista creció en términos reales 6.56% anual.

Conviene recordar que bajo el esquema prestamista prestatario, el prestamista obtiene un rendimiento sobre la inversión y el prestatario paga un costo sobre el crédito, pero tanto el rendimiento real como el costo real se expresan por medio de la tasa real.

Ejemplo 4.44

El señor Rojas recibió $ 15.000.000 por la venta de una propiedad. Decidió invertir el dinero en una cuenta de ahorros en el Banco de los Andes durante año y medio, a una tasa de interés del 30% capitalizable mensualmente. Si la inflación permanece constante en un 1.5% mensual, calcular:

a. Valor final en términos reales o constantes

b. Rendimiento real de la inversión

Con los datos del ejercicio se puede deducir que hay un crecimiento real del dinero, porque la tasa de interés que recibe por sus ahorros es mayor que la tasa de inflación. El lector observa que la tasa de interés está expresada en forma nominal, que al capitalizarla es equivalente al 2.5% mensual.

$$F = P(1 + i)^n \quad (3.1)$$

$$F = 15.000.000(1 + 0.025)^{18}$$

$$F = \$\ 23.394.880.76$$

Este resultado es el valor final en pesos corrientes. Para calcular el valor final en términos reales o constante aplicamos el procedimiento de deflactación.

$$P = \frac{23.394.880.76}{\left(1 + 0.015\right)^{18}}$$

$$P = \$\ 17.895.015.36$$

Este es el valor final medido en pesos de hace año y medio, lo que significa que hubo crecimiento real del dinero.

Si se inicia la cuenta de ahorros con $ 15.000.000 y después de año y medio se llega a un valor final real de $ 17.895.015.36, podemos calcular la tasa de interés real aplicando la fórmula del interés compuesto.

$$F = P(1 + i)^n \quad (3.1)$$

$$17.895.015.36 = 15.000.000(1 + i)^{18}$$

$$i = 0.99\% \text{ mensual}$$

También podemos llegar a este resultado aplicando la expresión (4.22).

$$RR = \frac{0.025 - 0.015}{1 + 0.015}$$

$$RR = 0.99\% \text{ mensual}$$

Este resultado indica que los ahorros que tiene el señor Rojas, depositados en la cuenta, crecen 0.99% mensualmente en términos reales.

17.4 Costo real de un crédito

Con la solución del ejercicio anterior se llegó a una conclusión importante: los impuestos, lo mismo que la inflación, reducen la tasa de rendimiento de los ahorradores cuando el análisis se hace en términos reales. Pero, así mismo, como se apreciará en esta sección, los mismos impuestos como también la misma inflación, reducen el costo del crédito para el prestatario. En consecuencia, las aparentemente altas tasas de interés pagadas por los prestatarios durante períodos de inflación se reducen en términos reales (*Grant e Ireson, 1960*). El costo real de un crédito pasa a ser, el costo que paga un cliente después de descontar el ahorro en impuestos y la inflación.

Los deudores ganan con la inflación (Modie y Merton, 1999). Supóngase que obtiene un préstamo de $ 1.000.000 a una tasa de interés del 3% mensual y que dentro de un mes tiene que pagar el capital y los intereses. Si la tasa de inflación durante el mes fue del 3%, la tasa real sobre el préstamo será cero. Aunque habrá que pagar $ 1.030.000 en pesos de bolsillo, su valor real es de $ 1.000.000. Los $ 30.000 de intereses apenas compensan la disminución del poder adquisitivo del $ 1.000.000 de capital. Se infiere que el deudor gana porque devuelve el dinero recibido con pesos desvalorizados, y también, que se pueden ganar intereses y perder dinero al mismo tiempo. Por esta razón, es necesario distinguir entre lo que es la *valorización nominal* del dinero, que se produce al devengar intereses, y la *valorización real* del mismo, que se genera cuando el dinero crece en términos reales. Así, por ejemplo, si para el caso anterior la inflación mensual es del 4.0% la tasa real será negativa y, no obstante, haber ganado intereses por $ 30.000 el dueño del dinero obtiene una pérdida, porque para recuperar el mismo poder de compra debería recibir $ 1.040.000.

Entremos, ahora si, a demostrar con unos ejercicios de la vida real como los impuestos y la inflación reducen el costo del dinero. Inicialmente calculemos a partir de la expresión (4.23) la tasa efectiva o tasa corriente, como forma inicial de la fórmula de Fisher, en función de la tasa real y la inflación esperada.

$$TR = \frac{TE - INF}{1 + INF}$$

Aplicando la regla derivada del axioma fundamental de las ecuaciones: si a los dos miembros de una igualdad se suma una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste, se tiene:

$$TR + 1 = \frac{TE - INF}{1 + INF} + 1$$

$$(TR + 1) = \frac{(TE - INF) + (1 + INF)}{(1 + INF)}$$

$$(TR + 1)(1 + INF) = (TE - 1)$$

$$TE = (1 + TR)(1 + INF) - 1 \qquad (4.24)$$

Donde: TE = tasa efectiva o tasa corriente

TR = tasa real

INF = tasa de inflación esperada

Ejemplo 4.45

¿A qué tasa de interés mensual debe un inversionista prestar su dinero, si desea obtener un rendimiento real del 2.5% mensual y la tasa de inflación esperada es del 1.5% mensual?

Se aplica la ecuación (4.24) $TE = (1 + 0.025)(1 + 0.015) - 1$

$TE = 4.04\%$ mensual

Con base en este ejercicio podemos afirmar que las tasas de interés que se manejan en nuestro sistema financiero y comercial son tasas corrientes. Para el presente ejercicio, el inversionista alcanza a ganarse una tasa real del 2.5% mensual, si la inflación del mes es del 1.5% y presta su dinero al 4.04% mensual.

Así como en ejercicios precedentes hemos calculado el rendimiento real de una inversión, es necesario entrar, ahora, a analizar el cálculo del costo real de un crédito.

Ejemplo 4.46

El Banco Ganadero le concede un crédito a una tasa del 36% mes vencido con plazo de un año. Se desea calcular el costo real del crédito.

La tasa de interés del crédito está expresada como tasa nominal. Para conocer el costo efectivo es necesario dividirla entre 12 períodos.

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.36}{12} = 3\% \text{ mensual}$$

La tasa obtenida es una tasa efectiva periódica expresada en términos corrientes. Este no es el costo real del crédito, porque no podemos desconocer el beneficio tributario ni el efecto de la inflación.

Calculamos el costo después de impuestos del crédito, aplicando la expresión (4.20).

$Kd = i(1 - \text{IMPTO})$

$Kd = 0.03\ (1 - 0.35)$ $\qquad$ $\text{TEA} = (1 + 0.0195)^{12} - 1$

$Kd = 1.95\%$ mensual $\qquad$ $\text{TEA} = 26.08\%$ EA

La tasa obtenida sigue siendo una tasa corriente, sólo que está expresada como tasa efectiva anual. Se asume que la inflación del año es del 18%, por tanto, el costo real calculado será un costo real esperado.

$$\text{Costo real} = \frac{\text{Costo después de impuestos} - \text{Inflación}}{1 + \text{Inflación}}$$

$$\text{Costo real} = \frac{0.2608 - 0.18}{1 + 0.18}$$

$$\text{Costo real} = 6.85\% \text{ anual}$$

Apéndice:

Factores que determinan el costo del dinero

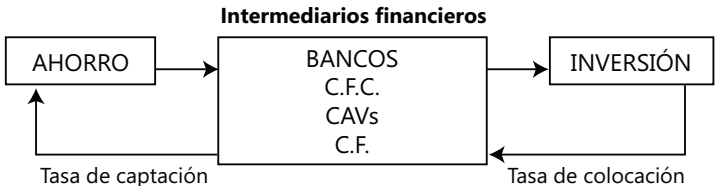
A este nivel del texto, cuando ya el lector maneja algunos de los conceptos fundamentales de las Matemáticas Financieras, como son las tasas de interés nominales, efectivas, tasa real, etc, conviene tratar un tema que preocupa a las personas naturales y/o jurídicas (empresas) que tienen la necesidad de acudir a conseguir dinero para financiar sus inversiones. Este tema hace referencia al nivel de las tasas de interés, o lo que es lo mismo, al costo del dinero. Estas personas se preguntan: ¿por qué las tasas de interés son tan altas en el país? y establecen comparaciones con el costo del dinero en otras partes del mundo.

Antes de entrar a describir los factores que determinan el costo del dinero es preciso señalar que las tasas de interés, desde el punto de vista de la entidad crediticia, se dividen en dos grandes grupos:

- *Tasas de captación*. Los intermediarios financieros (llámense Bancos, Corporaciones Financieras, Compañías de Financiamiento Comercial o Corporaciones de Ahorro y Vivienda) captan los recursos de las personas y empresas que tienen excedentes de dinero y les ofrecen una tasa de interés para que aquellos acepten entregarles su dinero, llamada tasa de *captación o tasa pasiva*. Esta tasa de interés de captación es el costo principal para los intermediarios financieros, porque es el precio que pagan por su materia prima, el dinero. El procedimiento de captación de recursos lo hacen los intermediarios financieros a través de los llamados instrumentos de captación de ahorros (CDT, cuentas de ahorros, cuentas corriente, bonos, etc.).
- *Tasa de colocación*. Como todo empresario, los intermediarios financieros deben recuperar en el precio de sus productos los costos en que incurren y buscar una rentabilidad o ganancia. De allí surge la tasa de interés de *colocación o tasa activa*, que es el precio que cobran por prestar el dinero. Esta tasa constituye el precio final que paga el usuario del crédito. De la diferencia de precios entre la tasa de

captación (costo del dinero para los intermediarios) y la tasa de colocación (costo del dinero para el usuario del crédito) surge el *margen de intermediación* (utilidad bruta de los intermediarios financieros).

Los altos niveles de las tasas de colocación son los que constituyen el mayor motivo de preocupación de todos los empresarios. Observemos a través del siguiente esquema el proceso que acabamos de describir:



Los intermediarios financieros permiten la transferencia entre el ahorro y la inversión. Siempre, en toda economía de mercado existirán personas naturales y/o jurídicas dispuestas a ahorrar o prestar su dinero y personas naturales y/o jurídicas que necesitan dinero prestado para realizar sus inversiones. Los intermediarios financieros, tal y como se observa en el esquema, son el punto de confluencia entre estos dos actores. Además, son transformadores de plazos porque captan a corto plazo y colocan a largo plazo, y de tasas de interés porque captan el dinero a una tasa de interés y la colocan a una tasa mayor.

Comenzaremos, entonces, por describir brevemente cuales son los elementos que, dentro de una economía de mercado, contribuyen uno a uno, a fijar las tasa de captación, que representa el costo del dinero para los intermediarios financieros :

- El nivel de la inflación. En países con alta inflación la gente tiene conciencia de lo costoso que es mantener el dinero ocioso, considerado como el peor pecado financiero, por el costo de oportunidad que representa y su desvalorización. Esto significa que si decide prestarlo a un intermediario financiero, lo hará a una tasa de interés que le cubra la inflación y una tasa adicional que le permita que su dinero crezca en términos reales. Este es el primer piso de donde parten todas las captaciones.
- Los rendimientos que el público desea percibir por prestar su dinero, no pueden ser inferiores a los que podría obtener en instrumentos de inversión similares, dentro o por fuera del país. Al existir tasas de rendimiento más atractivas por fuera del país se produce la fuga de capitales.
- El nivel de las tasas de interés que reconocen las entidades financieras están presionadas por sus competidores, entre ellos el mismo gobierno a través de la emisión de Títulos de Tesorería (TES). El ahorrador busca mayor rendimiento y menor riesgo. Lo que indica que el gobierno, a través del Banco de la Republica, puede darle señales al mercado financiero sobre el nivel de las tasas de captación.

Hasta aquí llegan los costos totales de las tasas de interés que pagan los intermediarios por captar dinero de los ahorradores y que tienen que trasladar, por necesidad, a sus prestatarios. Las entidades financieras funcionan como cualquier empresa comercial: compran y venden productos; ellas compran y venden dinero; y en ese proceso, la tasa de captación viene a ser el costo del producto y la tasa de colocación es el precio de venta.

Ahora bien, los intereses de colocación resultan de los costos de captación más el margen de intermediación (utilidad) que cobran los intermediarios por su gestión. Estos costos los podemos resumir en los siguientes puntos:

- La ineficiencia en el manejo del negocio bancario: exceso de burocracia, falta de tecnificación de las prácticas bancarias etc.
- La deficiente evaluación para el otorgamiento de los créditos que da como resultado una cartera de difícil o imposible recaudo. Esta pérdida por los malos créditos deben cubrirse con las utilidades provenientes de intereses percibidos por créditos sanos.
- Las inevitables e indispensables regulaciones gubernamentales, referentes a los encajes bancarios y reservas de cartera.

Esta explicación somera basta para entender todo el conjunto de variables que inciden finalmente en el costo del dinero, en las que el Estado tiene una enorme responsabilidad , por cuanto las tasas de interés podrían reducirse si se lograra bajar la inflación a los mismos niveles de los países industrializados. Cuando un país logra vencer las presiones inflacionarias, la competitividad del sistema bancario surge inevitablemente y se traduce en una reducción automática de sus márgenes de intermediación.

Podemos concluir que el elemento principal en el nivel de las tasas de interés es la inflación, aunque existen otros factores importantes como la devaluación, la oferta y demanda del dinero y el riesgo empresarial, y que en la medida en que la inflación baje las tasas de interés tendrán que llegar a niveles de un dígito.

NOTA ACLARATORIA:

La conversión de tasas de interés se realizará de las siguientes formas:

- Utilizando las ecuaciones de la tasa nominal y la tasa efectiva.
- Con las funciones de Excel: valor futuro (VF) y tasa.
- Con el aplicativo de conversión de tasas que aparece como complemento en el SIL.

Para utilizar el aplicativo, proceda de la siguiente forma:

1. Abra el archivo "conversión de tasas de interés" y haga click en opciones de advertencia de seguridad (en el caso de que se hayan deshabilitado las macros).
2. Después debe seleccionar la casilla de "Habilitar este contenido" y luego en aceptar (en el caso de que se hayan deshabilitado las macros).
3. Después de esto, debe dar click en "*fx*" para activar la función.
4. En seleccionar una categoría se abre el menú desplegable y se escoge "Definidas por el usuario" y damos click en aceptar.

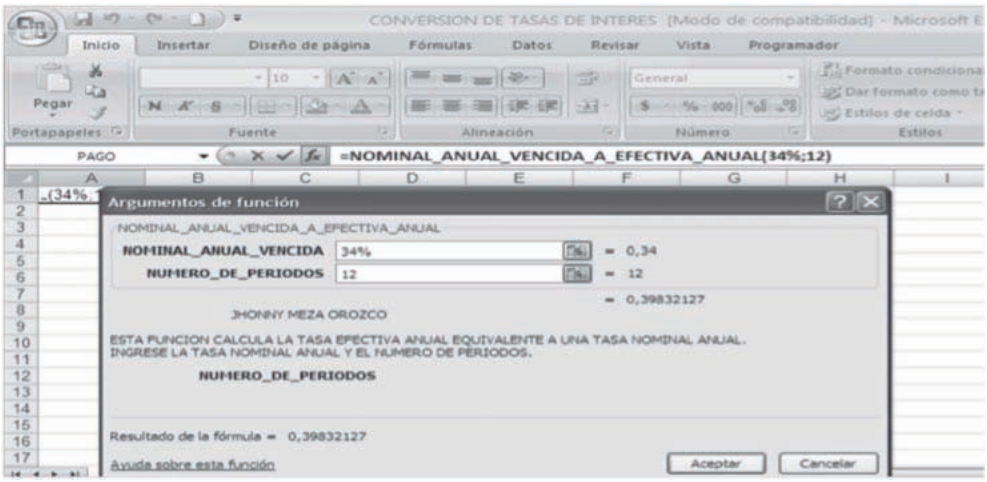
EJERCICIO 1. A partir de una tasa de interés del 34 % con capitalización mensual, calcular la tasa efectiva anual equivalente.

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.34}{12} = 2.83\% \text{ mensual}$$

Aplicamos la ecuación de la tasa efectiva: $TEA = (1 + TEM)^{12} - 1 = (1 + 0.0283)^{12} - 1 = 39.83\%$ EA.

En Excel: $= VF(34\%/12; 12; 0; -1) - 1$

Con el archivo: *nominal anual vencida a efectiva anual:*



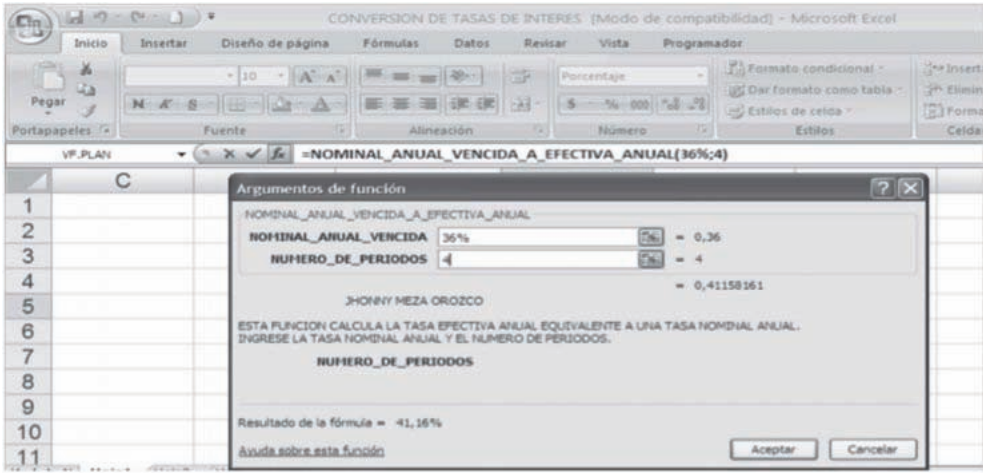
EJERCICIO 2. Calcular la tasa efectiva anual partiendo de una tasa del 36% con capitalización trimestral.

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.36}{4} = 9.0\% \text{ trimestral}$$

Aplicamos la ecuación de la tasa efectiva: TEA = $(1 + TET)^4 - 1 = (1 + 0.09)^4 - 1 =$ 41.16% EA.

En Excel: = VF (36%/4; 4; 0;-1)-1

Con el archivo: *nominal anual vencida a efectiva anual:*



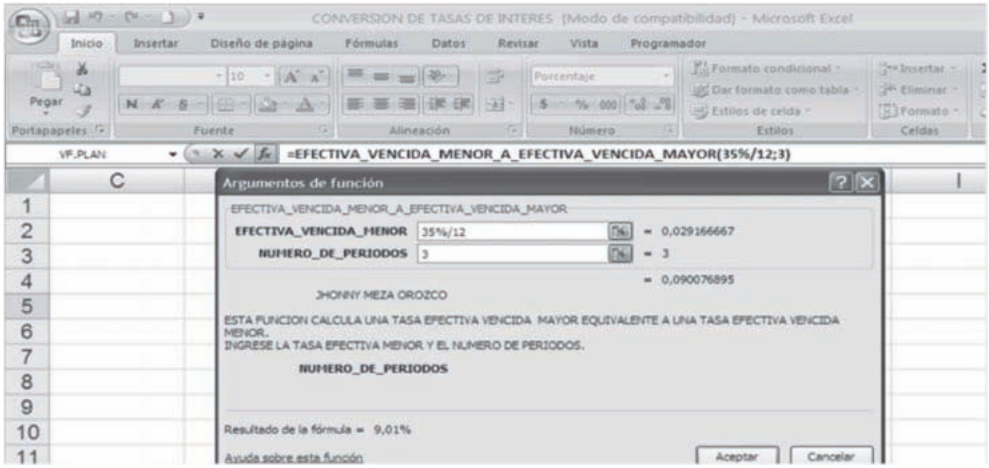
EJERCICIO 3. ¿Cuál es la tasa efectiva trimestral equivalente a una tasa del 35% capitalizable mensualmente?

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.35}{12} = 2.92\% \text{ mensual}$$

Aplicamos la ecuación de la tasa efectiva: TET = $(1 + TEM)^3 - 1 = (1 + 0.0292)^3 - 1 =$ 9.02% trimestral.

En Excel: = VF (35%/12; 3; 0; −1) − 1

Con el archivo: *efectiva vencida menor a efectiva vencida mayor*



EJERCICIO 4. Conocida la tasa nominal del 45% con capitalización mensual, hallar:

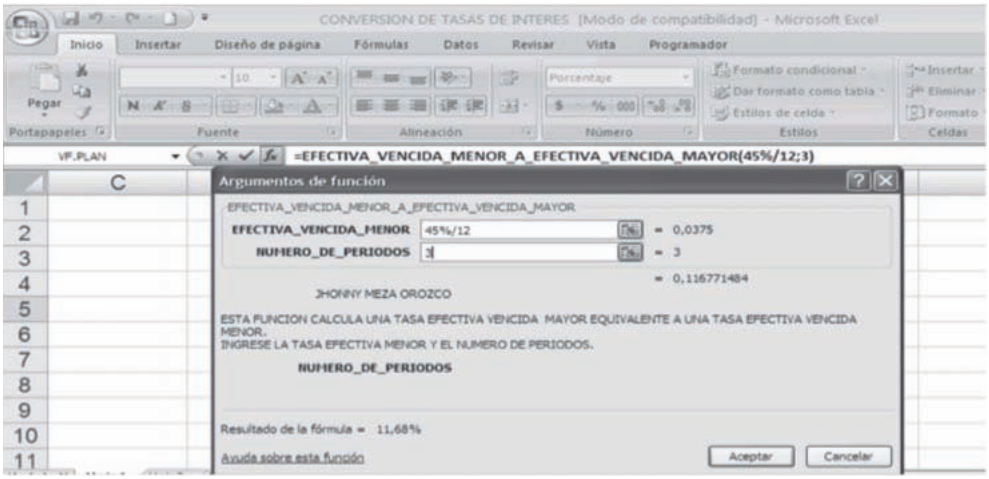
a) La tasa efectiva trimestral.

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.45}{12} = 3.75\% \text{ mensual}$$

Aplicamos la ecuación de la tasa efectiva: $TET = (1 + TEM)^3 - 1 = (1 + 0.0375)^3 - 1 = 11.68\%$ trimestral.

En Excel: $= VF(45\%/12; 3; 0; -1) - 1$

Con el archivo: *efectiva vencida menor a efectiva vencida mayor:*

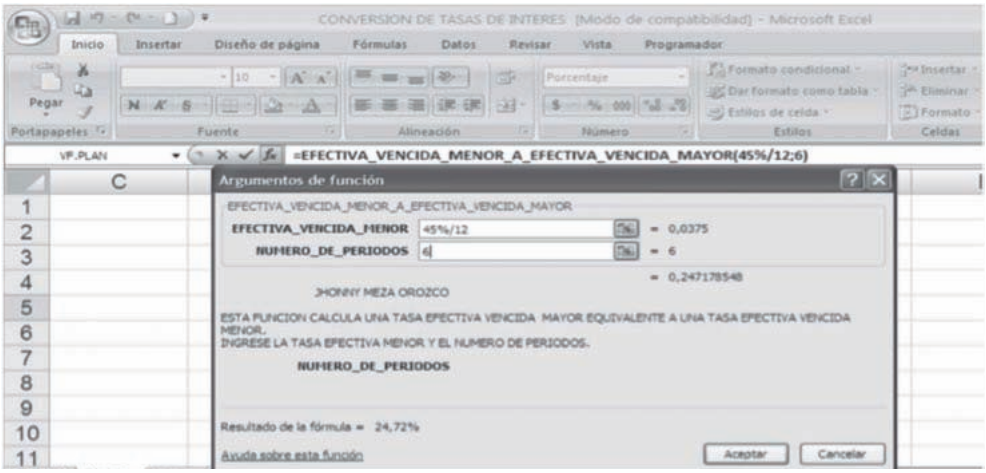


b) La tasa efectiva semestral.

Aplicamos la ecuación de la tasa efectiva: $TES = (1 + TEM)^6 - 1 = (1 + 0.0375)^6 - 1 = 24.72\%$ trimestral.

En Excel: $= VF(45\%/12; 6; 0; -1) - 1$

Con el archivo: *efectiva vencida menor a efectiva vencida mayor:*

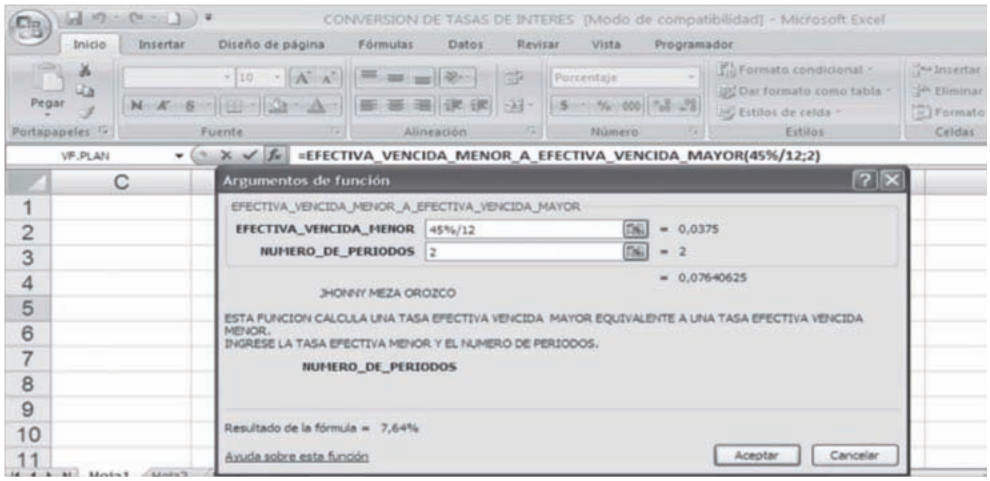


c) La tasa efectiva bimestral.

Aplicamos la ecuación de la tasa efectiva: $TEB = (1 + TEM)^2 - 1 = (1 + 0.0375)^2 - 1 = 7.64\%$ trimestral.

En Excel: $= VF(45\%/12; 2; 0; -1) - 1$

Con el archivo: *efectiva vencida menor a efectiva vencida mayor:*

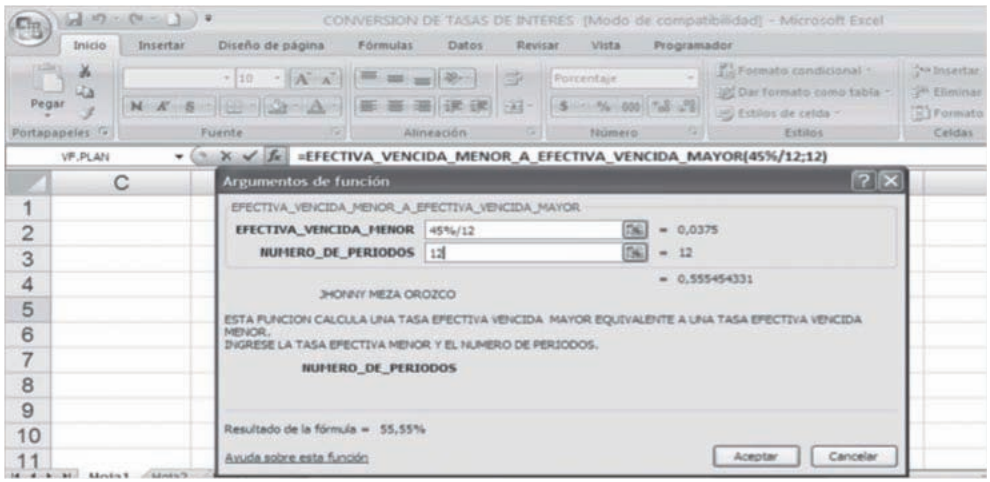


d) La tasa efectiva anual.

Aplicamos la ecuación de la tasa efectiva: $TEA = (1 + TEM)^{12} - 1 = (1 + 0.0375)^{12} - 1 = 55.55\%$ trimestral.

En Excel: $= VF(45\%/12; 12; 0; -1) - 1$

Con el archivo: *efectiva vencida menor a efectiva vencida mayor:*



EJERCICIO 5. A partir de la tasa efectiva anual del 33%, hallar:

a) La tasa efectiva semestral.

Aplicando la ecuación de la tasa efectiva:

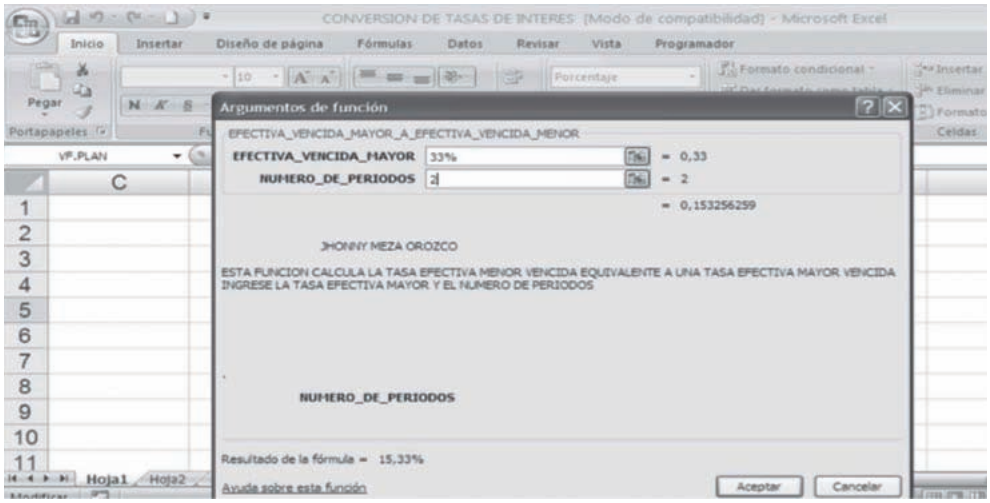
$$TEA = (1 + TES)^2 - 1$$

$$TES = (1 + TEA)^{1/2} - 1$$

$$TES = (1 + 0.33)^{1/2} - 1 = 15.33\% \text{ semestral}$$

En Excel: = TASA (2; 0; −1; 1,33)

Con el archivo: *efectiva vencida mayor a efectiva vencida menor:*



b) La tasa efectiva mensual:

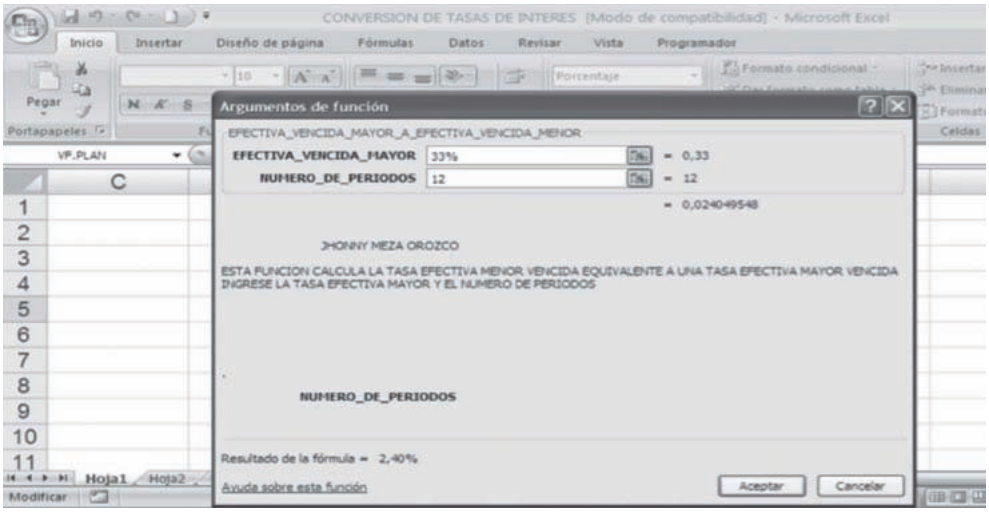
$$TEA = (1 + TEM)^{12} - 1$$

$$TEM = (1 + TEA)^{1/12} - 1$$

$$TEM = (1 + 0.33)^{1/12} - 1 = 2.40\% \text{ mensual}$$

En Excel: = TASA (12; 0; −1; 1,33)

Con el archivo: *efectiva vencida mayor a efectiva vencida menor:*



c) La tasa efectiva trimestral:

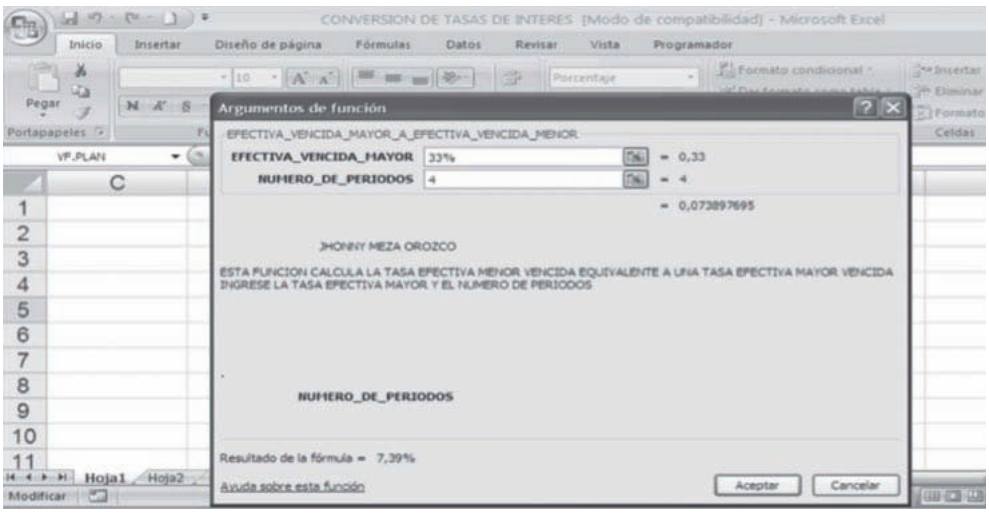
$$TEA = (1 + TET)^4 - 1$$

$$TET = (1 + TEA)^{1/4} = 1$$

$$TET = (1 + 0.33)^{1/4} - 1 = 7.39\% \text{ trimestral}$$

En Excel: TASA (4; 0; −1; 1,33)

Con el archivo: *efectiva vencida mayor a efectiva vencida menor:*



d) La tasa efectiva bimestral:

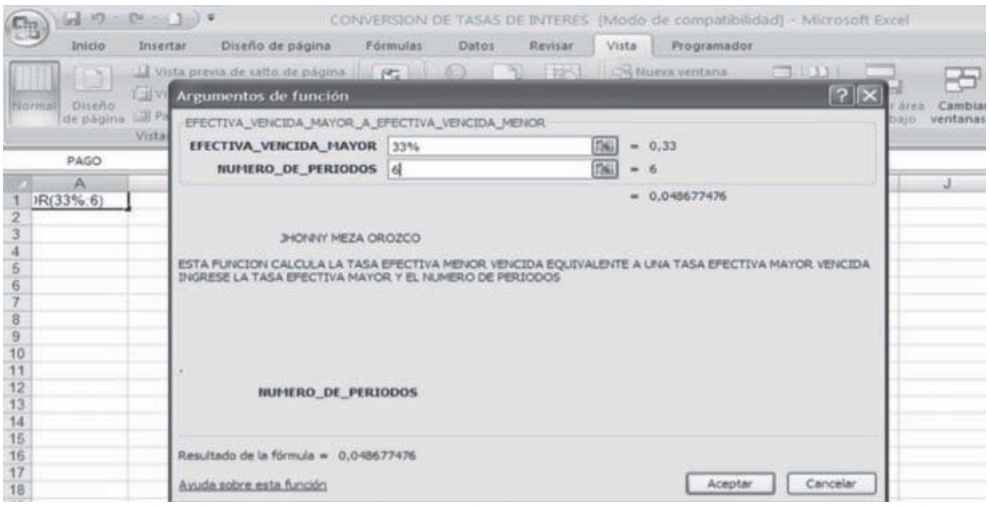
$$TEA = (1 + TEB)^6 - 1$$

$$TEB = (1 + TEA)^{1/6} - 1$$

$$TEB = (1 + 0.33)^{1/6} - 1 = 4.87\% \text{ bimestral}$$

En Excel: $= TASA\ (6; 0; -1; 1{,}33)$

Con el archivo: *efectiva vencida mayor a efectiva vencida menor:*



EJERCICIO 6. Un capital de $ 5.000.000 se invierte a una tasa de interés del 28% capitalizable mensualmente durante 2 años. Si la inflación permanece constante en un 1.23% mensual, calcular:

a) Valor futuro en términos nominales o corrientes.

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.28}{12} = 2.33\% \text{ mensual}$$

$$F = P(1 + i)^n = 5.000.000\ (1 + 0.0233)^{24} = \$\ 8.690.432.35$$

En Excel: $= VF\ (2{,}33\%; 24; 0; -5000000)$

b) Valor futuro en términos reales o constantes.

Deflactamos la tasa corriente del 2.33% mensual.

$$TR = \frac{TE - INFLACIÓN}{(1 + INFLACIÓN)} = \frac{0.0233 - 0.0123}{(1 + 0.0123)} = 1.09\% \text{ mensual}$$

$$F = P(1 + i)^n = 5.000.000\ (1 + 0.0109)^{24} = \$\ 6.485.847.33$$

En Excel: $= VF\ (1{,}09\%; 24; 0; -5.000.000)$

EJERCICIO 7. El señor García invierte $ 20.000.000 a una tasa de interés del 2% mensual durante un año. Durante el primer mes la inflación fue del 1.06%, para el segundo mes del 2.3% y de ahí en adelante la inflación se mantuvo constante en un 0.9%. Determinar si el señor García ganó o perdió dinero. ¿Por qué?

Una solución consiste en calcular la inflación mensual promedio y se compara con la tasa de interés del 2% mensual. Nos apoyamos en los índices de precios, para lo cual asumimos un índice inicial de 100.

$I_0 = 100\ I_1 = 101.60\ I_2 = 103.94\ I_3 = 104.87\ I_4 = 105.82\ I_5 = 106.77\ I_6 = 107.73$

$I_7 = 108.70\ I_8 = 109.68\ I_9 = 110.67\ I_{10} = 111.66\ I_{11} = 112.67\ I_{12} = 114.71$

Asumiendo: $P = 100 \quad F = 114.71 \quad n = 12 \quad i = ?$

$F = P(1 + i)^n$, despejando i, tenemos:

$$i = \left(\frac{F}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{114.71}{100}\right)^{\frac{1}{12}} - 1 = 1.15\% \text{ mensual (inflación mensual promedio)}$$

El señor García ganó dinero en términos reales porque la tasa de interés a la que invirtió su dinero es mayor que la tasa de inflación promedio

EJERCICIO 8. Qué tasa de interés nominal anual capitalizable mensualmente equivale a:

a) 33% Efectiva anual.

Aplicamos la ecuación de la tasa efectiva anual para calcular la tasa efectiva mensual.

$$TEA = (1 + TEM)^{12} - 1$$

$$TEM = (1 + TEA)^{1/12} - 1$$

$$TEM = (1 + 0.33)^{1/12} - 1 = 2.40\%$$

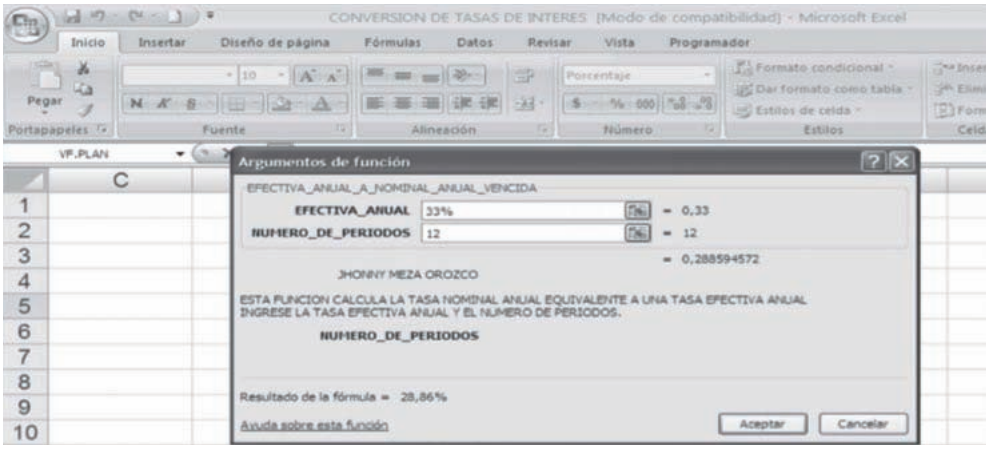
En Excel: $= TASA\ (12; 0; -1; 1{,}33)$

Para calcular la tasa nominal capitalizable mensualmente aplicamos la ecuación de la tasa nominal.

$$J = i * n = 2.40\% * 12 = 28.86\ \%\ MV$$

En Excel: $= (TASA\ (12; 0; -1; 1{,}33))*12$

Con el archivo: *efectiva anual a nominal anual vencida:*



b) 34% nominal anual capitalizable trimestralmente.

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.34}{4} = 8.50\% \text{ trimestral}$$

Aplicamos la ecuación de la tasa efectiva para calcular la tasa efectiva mensual

$$TEM = (1 + TET)^{1/3} - 1$$

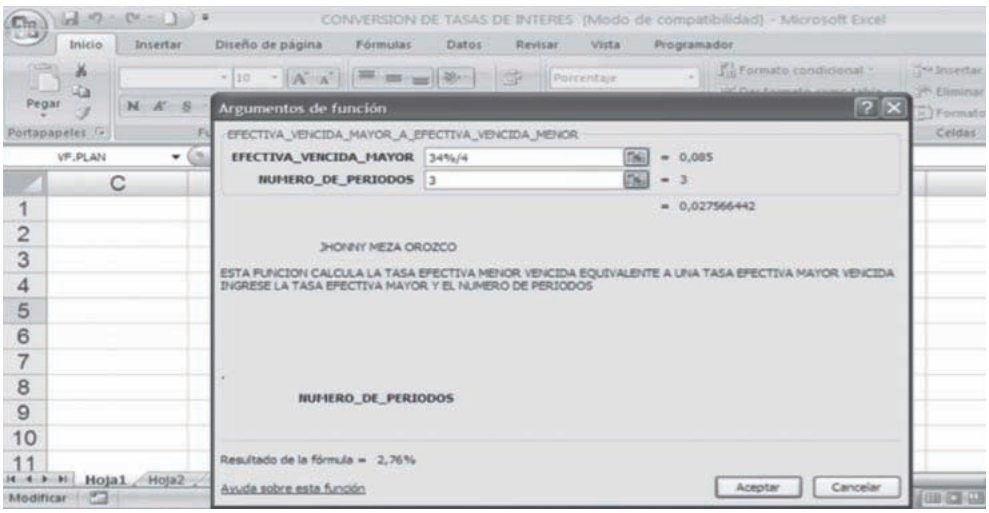
$$TEM = (1 + 0.085)^{1/3} - 1 = 2.76\% \text{ mensual}$$

Aplicamos la ecuación de la tasa nominal:

$$J = i * n = 2.76\% * 12 = 33.08\% \text{ MV}$$

En Excel: = ((TASA (3; 0; −1; 1,085)*12))

Con el archivo: *efectiva vencida mayor a efectiva vencida menor:*



Esta tasa efectiva mensual se multiplica por 12 períodos y obtenemos 33.08% MV.

EJERCICIO 9. Con base en las tasas efectivas, ¿qué es más conveniente?

a) Invertir en una sociedad que garantiza duplicar el capital en 36 meses.

Se calcula la tasa efectiva anual equivalente.

No se suministra datos sobre F y P, pero se pueden asumir

$$P = \$\ 100 \quad F = \$\ 200 \quad n = 36 \text{ meses (12 trimestres)} \quad i = ?$$

Aplicando la fórmula básica $F = P(1 + i)^n$, se tiene:

$$i = \left(\frac{F}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{200}{100}\right)^{\frac{1}{12}} - 1 = 5.95\% \text{ trimestral}$$

b) Prestar el dinero al 34% TV.

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.34}{4} = 8.50\% \text{ trimestral.}$$

Con base en los resultados es más conveniente la opción **B**, por arrojar una tasa efectiva mayor.

EJERCICIO 10. ¿En cuánto tiempo debemos retirar una inversión realizada en el día de hoy, a una tasa nominal del 41.91% capitalizable mensualmente, si deseamos que se triplique?

Asumimos valores para P y F:

$$P = \$\ 100 \quad F = \$\ 300 \quad i = \frac{J}{n} = \frac{0.4191}{12} = 3.49\% \text{ mensual} \quad n = ?$$

Aplicando la fórmula básica $F = P(1 + i)^n$, tenemos:

$$n = \frac{\text{Log}\left(\frac{F}{P}\right)}{\text{Log}(1 + i)} = \frac{\text{Log}\left(\frac{300}{100}\right)}{\text{Log}(1 + 0.0349)} = 32 \text{ meses}$$

En Excel: = NPER (41,91%/12; 0; −100; 300)

EJERCICIO 11. Su empresa necesita $ 3.000.000 para comprar inventarios. Usted encuentra en el mercado financiero 3 compañías financieras que le ofrecen el préstamo en las siguientes condiciones:

Compañía A: exige cancelar el préstamo con un pago único de $ 3.800.000 al finalizar el año.

$P = \$\ 3.000.000 \quad F = \$\ 3.800.000 \quad n = 12 \text{ meses} \quad i = ?$

$$i = \left(\frac{F}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{3.800.000}{3.000.000}\right)^{\frac{1}{12}} - 1 = 1.99\% \text{ mensual}$$

En Excel: $= \text{TASA}(12;\ 0;\ -3.000.000;\ 3.800.000)$

Compañía B: cobra una tasa del 34% anual capitalizable mensualmente.

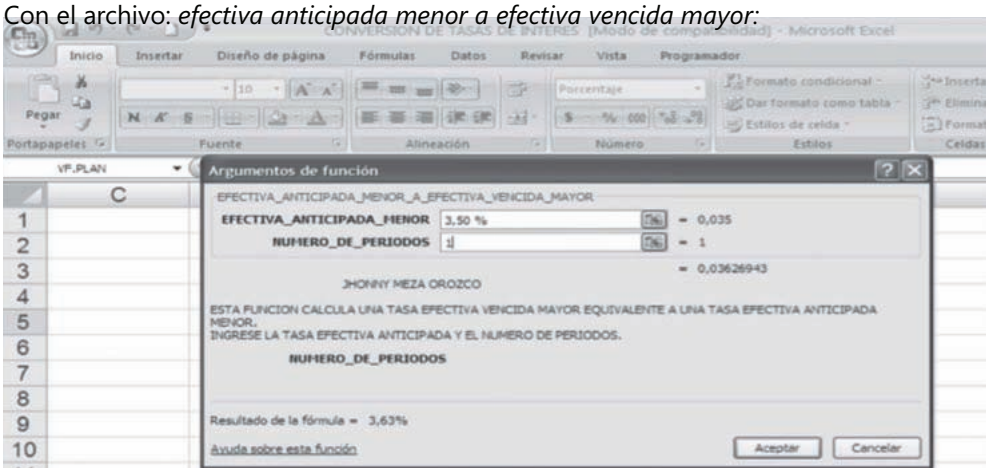
$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.34}{12} = 2.83\% \text{ mensual.}$$

Compañía C: cobra una tasa de 3.5% mensual anticipada.

$$I_v = \frac{i_a}{1 - i_a} = \frac{0.035}{1 - 0.035} = 3.63\% \text{ mensual.}$$

En Excel: $= \text{VF}\ (-3{,}50\%;\ -1;\ 0;\ -1) - 1$

Con el archivo: *efectiva anticipada menor a efectiva vencida mayor:*



Con base en los resultados podemos concluir que la mejor opción es la de la compañía A, por cobrar una menor tasa efectiva mensual.

EJERCICIO 12. Un inversionista realiza una inversión de $ 20.000.000 durante 6 meses a una tasa de interés del 2% mensual. La inflación de los 3 primeros meses fue en promedio del 1.5% mensual y en los otros 3 meses del 2% mensual. Calcular:

a) Rendimiento real.

Calculamos, en primer lugar, la inflación promedio

$I_0 = 100 \quad I_1 = 101.50 \quad I_2 = 103.02 \quad I_3 = 104.57 \quad I_4 = 106.66 \quad I_5 = 108.79 \quad I_6 = 110.97$

Asumiendo: $P = 100 \quad F = 110.97 \quad n = 6 \quad i = ?$

$F = P(1 + i)^n$, despejando i, tenemos:

$$i = \left(\frac{F}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{110.97}{100}\right)^{\frac{1}{6}} - 1 = 1.75\% \text{ mensual (inflación mensual promedio)}$$

Calculamos la tasa real:

$$TR = \frac{TE - INFLACIÓN}{(1 + INFLACIÓN)} = \frac{0.02 - 0.0175}{(1 + 0.0175)} = 0.25\% \text{ mensual}$$

b) ¿Qué sucede si la tasa de inflación promedio mensual del último trimestre llegó al 3.5%?

Se observa claramente, sin necesidad de hacer algún cálculo, que la inflación promedio mensual es mayor que la tasa de interés del 2% mensual a la cual invierte los $ 20.000.000, por lo tanto, pierde dinero en términos reales.

EJERCICIO 13. Usted tiene 3 opciones para aceptar un crédito bancario:

1. A una tasa del 36% trimestre anticipado.

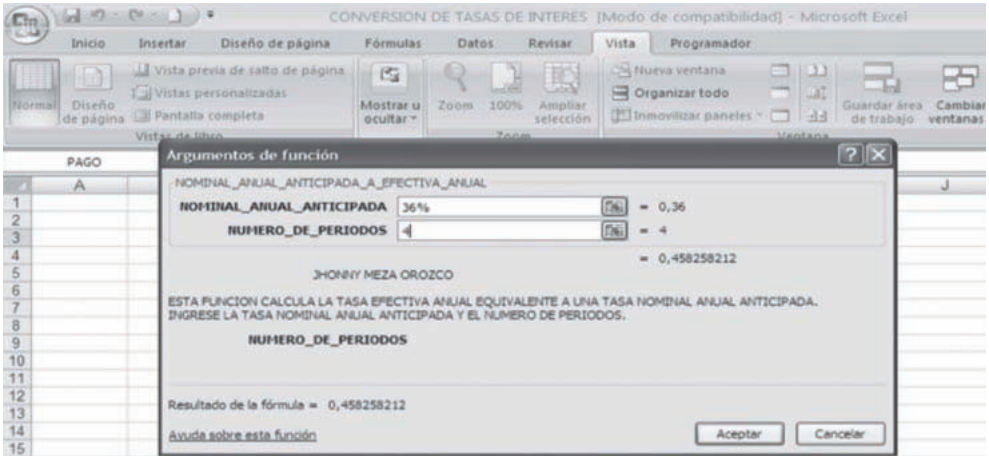
$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.36}{4} = 9.0\% \text{ trimestral anticipada}$$

Conocida la tasa efectiva trimestral anticipada, calculamos la tasa efectiva anual equivalente.

$$TEA = (1 - i_a)^{-n} - 1 = (1 - 0.09)^{-4} - 1 = 45.83\% \text{ EA}$$

En Excel: $= VF(-36\%/4; -4; 0; -1) - 1$

Con el archivo: *nominal anual anticipada a efectiva anual:*



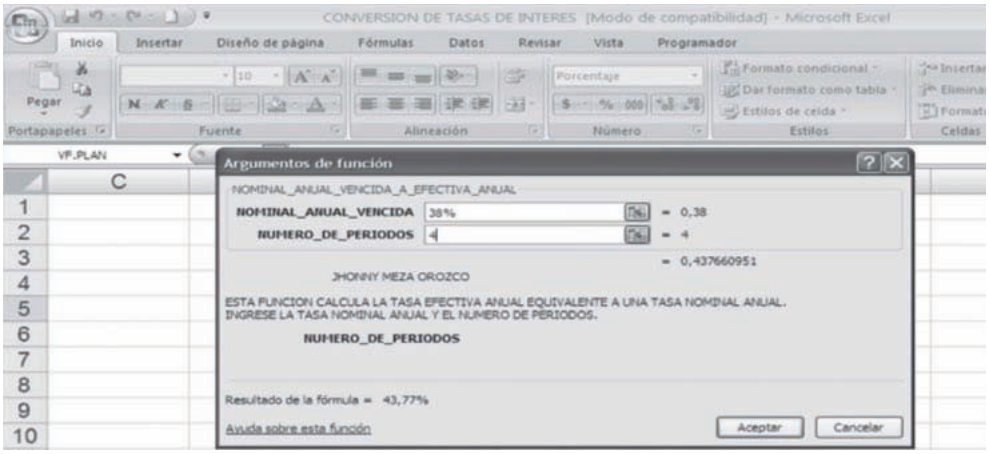
2. A una tasa del 38% trimestre vencido.

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.38}{4} = 9.5\% \text{ trimestral vencida}$$

Aplicando la ecuación de la tasa efectiva: $TEA = (1 + 0.095)^4 - 1 = 43.77\%$ EA.

En Excel: $= VF(38\%/4; 4; 0; -1) - 1$

Con el archivo: *nominal anual vencida a efectiva anual:*



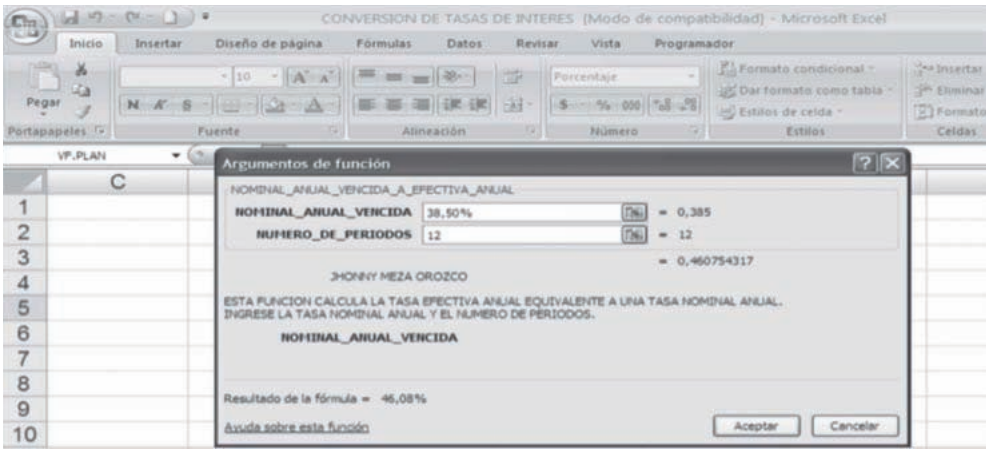
3. A una tasa del 38.5% mes vencido.

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.385}{12} = 3.21\% \text{ mensual}$$

Aplicando la ecuación de la tasa efectiva: $TEA = (1 + 0.0321)^{12} - 1 = 46.08\ \%\ EA$

En Excel: $= VF\ (38{,}5\%/12;\ 12;\ 0;\ -1) - 1$

Con el archivo: *nominal anual vencida a efectiva anual:*



Con base en las tasas efectivas anuales se concluye que la segunda opción es la que más le conviene.

EJERCICIO 14. El señor Pérez compró una casa en 1998 por $ 100.000.000 y después de 5 años la vende por $ 180.000.000. Si la inflación promedio en los 5 años fue del 20% anual:

a. ¿Cuánto ganó o perdió en el negocio en pesos corrientes?

Se aplica el efecto inflacionario al valor de la casa en 1998, durante 5 años:

$$F = 100.000.000(1 + 0.20)^5 = \$\ 248.832.000$$

En Excel: = VF (20%; 5; 0; −100000000)

Lo que significa que perdió $ 68.832.000

b. ¿En cuánto debió vender la casa para recuperar su dinero?

$$F = \$\ 248.320.000$$

c. Calcule en pesos de 1.998 (pesos reales), el valor de venta de la casa.

Se deflacta el valor de la venta después de 5 años.

$$P = \frac{F}{\left(1 + \text{INFLACIÓN}\right)} = \frac{180.000.000}{\left(1 + 0.20\right)^5} = \$\ 72.337.962.96$$

En Excel: = VA (20%; 5; 0; −180.000.000)

EJERCICIO 15. ¿Qué tasa nominal capitalizable mensualmente convertirá $ 450.000 de hoy en $ 678.000 al cabo de dos años y medio?

P = $ 450.000 F = $ 678.000 n = 30 meses i = ?

$$i = \left(\frac{F}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{678.000}{450.000}\right)^{\frac{1}{30}} - 1 = 1.38\%\ \text{mensual}$$

Aplicamos la ecuación de la tasa nominal:

$$J = i * n = 1.38\% * 12 = 16.51\%\ MV$$

En Excel: = ((TASA (30; 0; −450.000; 678.000)*12))

EJERCICIO 16. Calcular de qué porcentaje fue la inflación en el primer semestre de 2009, si las inflaciones mensuales fueron las siguientes:

Enero = 2.37% Febrero = 1.09% Marzo = 2.34%

Abril = 1.65% Mayo = 0.46% Junio = 3.21%

La inflación se aplica sobre el valor acumulado anterior; opera como el interés compuesto sin ser interés compuesto.

$$F = 100(1.0237)(1.0109)(1.0234)(1.0165)(1.0046)(1.0321) = 111.62$$

Si asumimos: P = 100 F = 111.62

$$i = \frac{F}{P} - 1 = \frac{111.62}{100} - 1 = 11.62\%\ \text{semestral}$$

EJERCICIO 17. El valor de la UVR el día 18 de junio es de $ 104.48. Calcule el valor de la UVR, día a día, para dentro de 3 días, si la inflación del mes de mayo fue del 0.6%.

$$UVR_t = UVR\ 15*(1 + i)^{t/d}$$

$$UVR_{19\ junio} = 104.48(1 + 0.006)^{1/30} = \$\ 104.5008$$

$$UVR_{20\ junio} = 104.48(1 + 0.006)^{2/30} = \$\ 104.5217$$

$$UVR_{21\ junio} = 104.48(1 + 0.006)^{3/30} = \$\ 104.5425$$

En Excel:

$$= VF(0{,}6\%;\ 1/30;\ 0;\ -104{,}48)$$

$$= VF(0{,}6\%;\ 2/30;\ 0;\ -104{,}48)$$

$$= VF(0{,}6\%;\ 3/30;\ 0;\ -104{,}48)$$

NOTA: el valor de la UVR se expresa con 4 decimales.

EJERCICIO 18. ¿Qué tasa nominal mes anticipado equivale al 38% nominal trimestre vencido?

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.38}{4} = 9.50\%\ \text{trimestral}$$

Aplicamos la ecuación de la tasa efectiva, para calcular la tasa efectiva mensual.

$$TET = (1 + TEM)^3 - 1$$

$$TEM = (1 + TET)^{1/3} - 1$$

$$TEM = (1 + 0.095)^{1/3} - 1 = 3.07\ \%\ \text{mensual}$$

Calculamos la tasa mensual anticipada equivalente:

$$I_a = \frac{i_v}{1 + i_v} = \frac{0.0307}{1 + 0.0307} = 2.98\%\ \text{mensual anticipada}$$

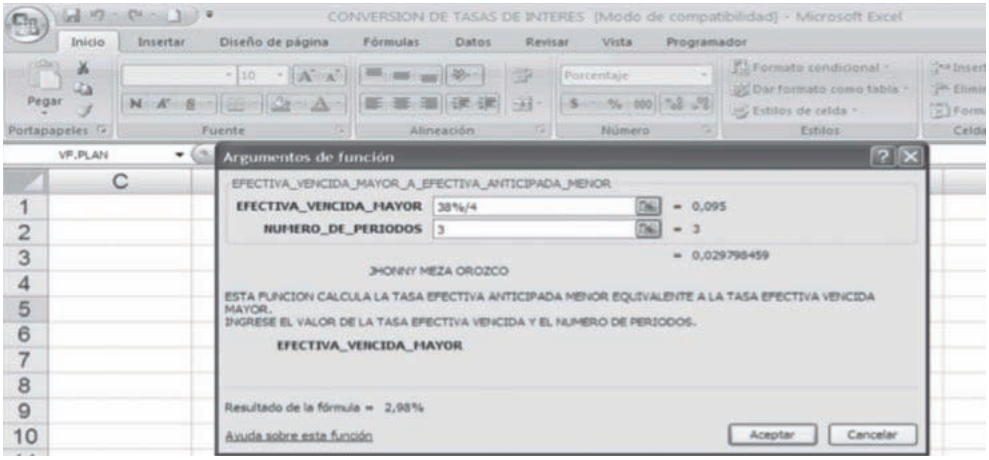
Aplicamos la ecuación de la tasa nominal:

$$J = i_a * n = 2.98\ \% * 12 = 35.76\%\ MA$$

En Excel: $= TASA\ (3;\ 0;\ -1;\ 1 + 0.38\%/4)$

$= ((VF\ (3{,}07\%;\ -1;\ 0;\ -1) - 1)*12)$ y se le cambia el signo

Con el archivo: *efectiva vencida mayor a efectiva anticipada menor:*



El resultado lo multiplicamos por 12 períodos, aplicando la ecuación de la tasa nominal.

EJERCICIO 19. ¿Qué tasa trimestral anticipada equivale al 2.5% mensual anticipada?

Aplicando la ecuación de la tasa efectiva en función de la tasa anticipada:

$$\text{TET} = (1 - \text{TEMA})^{-3} - 1$$

$$\text{TET} = (1 - 0.025)^{-3} - 1 = 7.89\% \text{ trimestral}$$

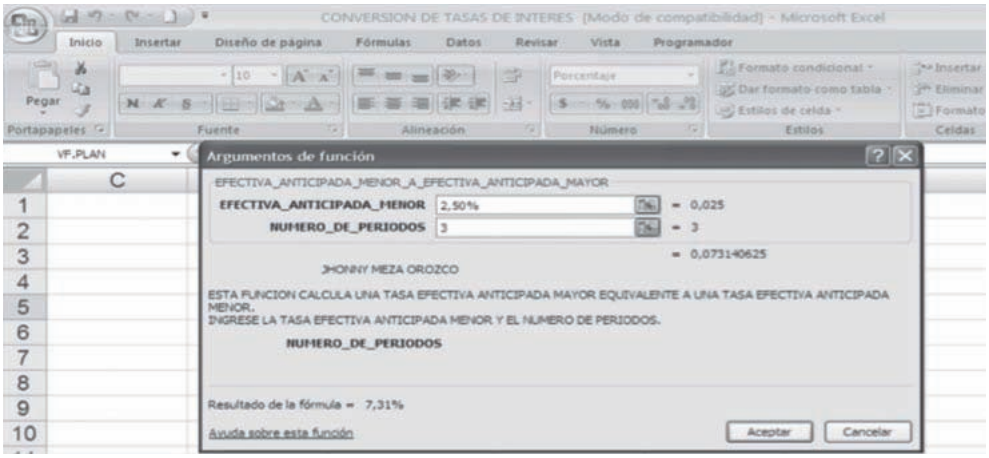
Calculamos la tasa efectiva trimestral anticipada:

$$i_a = \frac{i_v}{1 + i_v} = \frac{0.0789}{1 + 0.0789} = 7.31\% \text{ trimestral anticipada}$$

En Excel: $= \text{VF}(-2{,}5\%; -3; 0; -1) - 1 = 7.89\%$ trimestral

$= \text{TASA}(-1; 0; -1; 1{,}0789) = -7.31\%$ y le cambiamos el signo

Con el archivo: *efectiva anticipada menor a efectiva anticipada mayor:*



EJERCICIO 20. Invierte hoy $ 200.000 y después de 3 años recibe $ 500.000. Calcular la tasa nominal mes anticipado que obtuvo como rendimiento.

P = $ 200.000 F = $ 500.000 n = 36 meses i = ?

$$i = \left(\frac{F}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{500.000}{200.000}\right)^{\frac{1}{36}} - 1 = 2.58\% \text{ mensual}$$

Calculamos la tasa efectiva mensual anticipada equivalente:

$$I_a = \frac{i_v}{1 + i_v} = \frac{0.0258}{1 + 0.0258} = 2.52\% \text{ mensual anticipada}$$

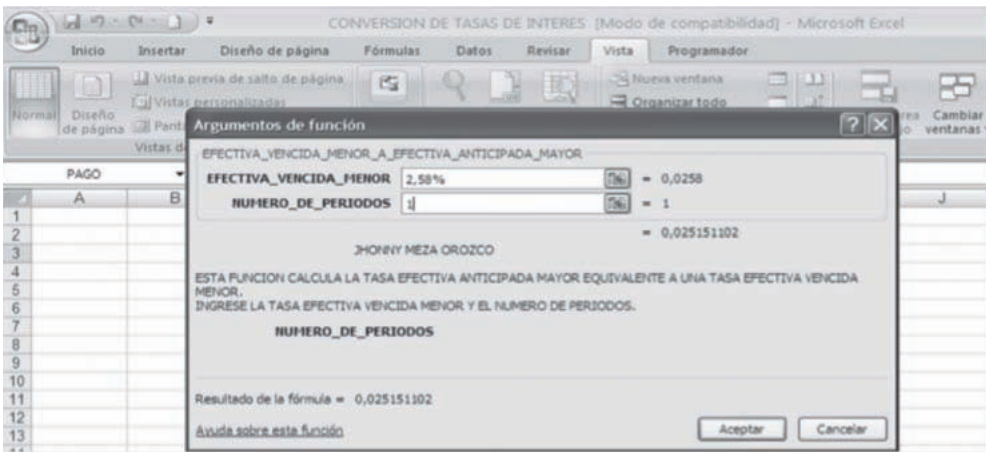
Aplicamos la ecuación de la tasa nominal:

$$J = i_a * n = 2.52\% * 12 = 30.18\% \text{ MA}$$

En Excel: = TASA (36; 0; −200000; 500000)

= ((VF (2,58%; −1; 0; −1) − 1)*12) y se le cambia el signo

Con el archivo: *efectiva vencida menor a efectiva anticipada mayor:*



El resultado lo multiplicamos por 12 períodos, aplicando la ecuación de la tasa nominal.

EJERCICIO 21. Un banco le concede un préstamo de $ 100.000.000 con un plazo de un año a una tasa del 34% TA. Usted logra que el banco le cambie la tasa por una nominal mes vencido. Calcular esta tasa equivalente y los intereses del primer mes.

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.34}{4} = 8.50\% \text{ trimestral anticipada}$$

Calculamos la tasa trimestral vencida equivalente:

$$I_v = \frac{i_a}{1 - i_a} = \frac{0.0850}{1 - 0.0850} = 9.29\% \text{ trimestral}$$

Aplicamos la ecuación de la tasa efectiva para calcular la tasa efectiva mensual:

$$TET = (1 + TEM)^3 - 1$$

$$TEM = (1 + TET)^{1/3} - 1$$

$$TEM = (1 + 0.0929)^{1/3} - 1 = 3.01\% \text{ mensual}$$

Aplicamos la ecuación de la tasa nominal:

$$J = i * n = 3.01\% * 12 = 36.07\% \text{ MV}$$

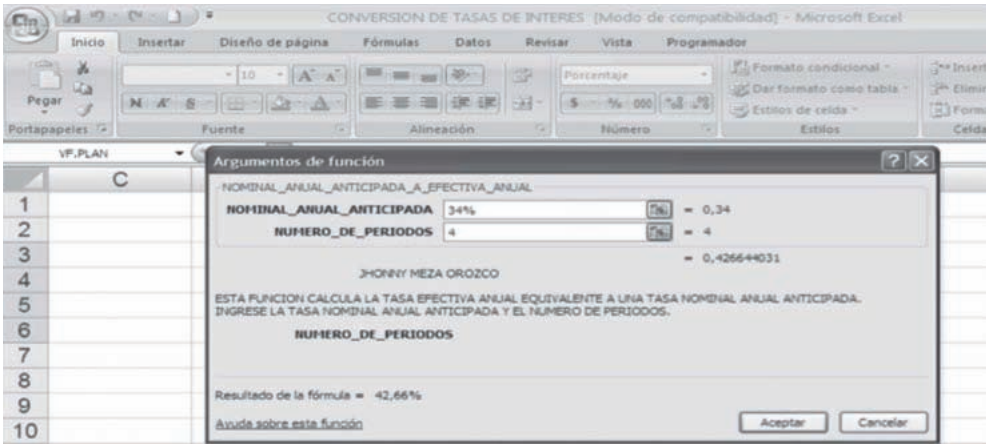
Calculamos los intereses del primer mes:

$$I = P * i = 100.000.000 * 0.0301 = \$\ 3.005.833.33$$

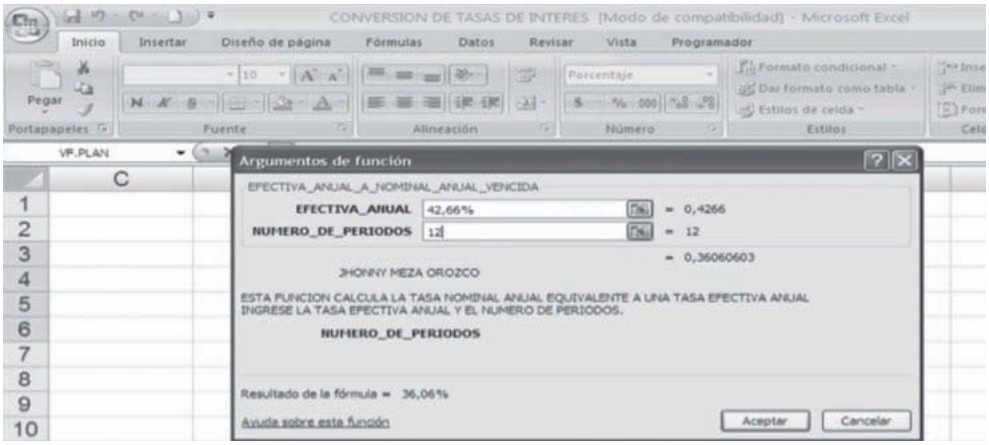
En Excel: $= VF\ (-34\%/4; -4; 0; -1) - 1 = 42{,}66\ \%\ EA$

$= 12*TASA\ (12; 0; -1; 1{,}4266)$

Con el archivo: *nominal anual anticipada a efectiva anual:*



Conocida la tasa efectiva anual equivalente, calculamos la tasa nominal capitalizable mensualmente con el archivo efectiva anual a nominal anual vencida:



EJERCICIO 22. Usted va a constituir un CDT por 90 días por valor de $ 10.000.000y el Banco Cafetero le ofrece una tasa del 7.5% EA. Si usted solicita recibir los intereses cada mes, ¿cuál es el valor de los intereses mensuales?

Aplicamos la ecuación de la tasa efectiva para calcular la tasa efectiva mensual equivalente al 7.5% EA:

$$TEA = (1 + TEM)^{12} - 1$$

$$TEM = (1 + TEA)^{1/12} - 1$$

$$TEM = (1 + 0.075)^{1/12} - 1 = 0.60\ \%\ \text{mensual}$$

En Excel: $= TASA\ (12; 0; -1; 1{,}075)$

Con el archivo: *efectiva vencida mayor a efectiva vencida menor:*

Calculamos los intereses mensuales:

$$I = P * I = \$\ 10.000.000 * 0.006 = \$\ 60.000$$

EJERCICIO 23. El señor Pedro Picapiedra necesita $ 50.000.000 para realizar un ensanche en su planta de triturado. El Banco de Crédito se los presta a una tasa del 32% mes anticipado. ¿Cuál debe ser el valor del préstamo solicitado para que después de descontados los intereses del primer mes, realmente reciba los $ 50.000.000?

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.32}{12} = 2.67\%\ \text{mensual anticipado}$$

Aplicando la fórmula del valor futuro en función de la tasa anticipada:

$$F = P(1 - ia)^{-n} = 50.000.000(1 - 0.0267)^{-1} = \$\ 51.371.622.32$$

En Excel: $= VF\ (-2{,}67\%; -1; 0; -50.000.000)$

EJERCICIO 24. Una empresa proveedora de materia prima le ofrece el siguiente plan de pagos por la venta de sus productos: 10/10 neto 30. Calcular el costo efectivo, si usted no se acoge al descuento por pronto pago.

El esquema de pagos queda de la siguiente forma: si se paga en los 10 primeros días se recibe un descuento del 10%, es decir, se pagaría $ 90 si asumimos un valor de $ 100 a los 30 días; en caso contrario se paga neto a los 30 días.

$$i = \frac{F}{P} - 1 = \frac{100}{90} - 1 = 11.11\% \text{ en 20 días}$$

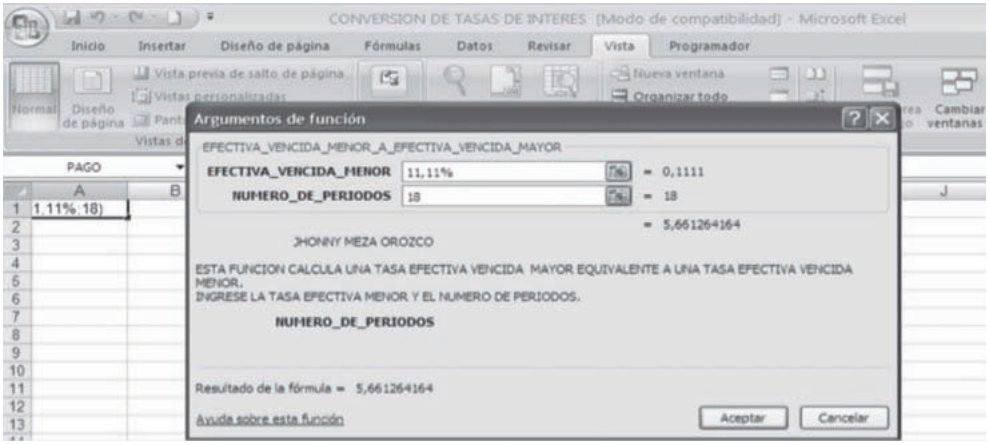
Calculamos la tasa efectiva anual equivalente:

$$TEA = (1 + TEM)^{18} - 1 = (1 + 0.1111)^{18} - 1 = 566.13\ \%\ EA$$

Nota: se eleva a la 18 porque el año tiene 18 períodos de 20 días.

En Excel: $= VF(11{,}11\%; 18; 0; -1) - 1$

Con el archivo: *efectiva vencida menor a efectiva vencida mayor:*



EJERCICIO 25. Usted le presta a un amigo $ 5.000.000 por 4 meses sin cobrarle intereses. La inflación de los 4 meses fue: para el primer mes de 0.9%, para el segundo mes de 1.2%, para el tercer mes de 2.2% y para el cuarto mes de 1.5%. Calcular:

Valor real pagado.

$$P = \frac{5.000.000}{(1 + 0.009)(1 + 0.012)(1 + 0.022)(1 + 0.015)} = \$\ 4.720.543.81$$

De los $ 5.000.000 que prestó, apenas recibe $ 4.720.543.81. Para no perder ni ganar dinero, es decir, para recibir el mismo dinero que prestó, debe recibir:

$$F = 5.000.000(1 + 0.009)(1 + 0.012)(1 + 0.022)(1 + 0.015) = \$\ 5.296.129.81$$

EJERCICIO 26. Usted deposita en el Banco Agrario $ 2.000.000 a una tasa de interés del 3.5% efectivo anual durante 90 días. Calcular:

- Valor de los intereses trimestrales:

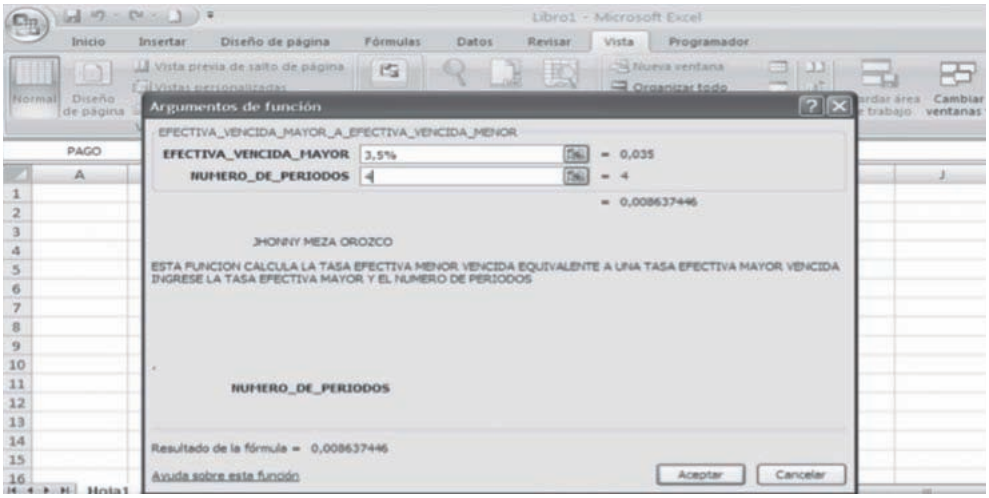
$$TEA = (1 + TET)^4 - 1$$

$$TET = (1 + TEA)^{1/4} - 1$$

$$TET = (1 + 0.035)^{1/4} - 1 = 0.86\ \%\ \text{trimestral}$$

En Excel: $= TASA\ (4; 0; -1; 1{,}035)$

Con el archivo: *efectiva vencida mayor a efectiva vencida menor:*



Calculamos los intereses: $I = P * I = \$\ 2.000.000 * 0.0086 = \$\ 17.200$

- Valor de los intereses netos

  El valor de los intereses netos es igual al valor de los intereses menos la retención en la fuente del 7%.

$$RF = \$\ 17.200 * 0.07 = \$\ 1.204$$

Intereses netos: $I_{netos} = \$\ 17.200 - \$\ 1.204 = \$\ 15.996$

- Rendimiento neto

  El rendimiento neto es igual a los intereses netos sobre la inversión:

$$RN = \frac{I}{P} = \frac{15.996}{2.000.000} = 0.80\%\ \text{trimestral}$$

- Rendimiento real si la tasa de inflación del trimestre fue del 0.95%.

  Al ser la inflación del trimestre mayor que el rendimiento neto trimestral, el rendimiento real es negativo.

EJERCICIO 27. ¿Cuánto tiempo debe esperar para que una inversión realizada hoy por $ 15.000.000 se le convierta en $ 18.600.000, si le reconocen una tasa de interés del 29% TV?

$$i = \frac{0.29}{4} = 7.25\% \text{ trimestral}$$

$$n = \frac{\text{Log}\left(\frac{F}{P}\right)}{\text{Log}(1+i)} = \frac{\text{Log}\left(\frac{18.600.000}{15.000.000}\right)}{\text{Log}(1+0.0725)} = 3.07 \text{ trimestres}$$

En Excel: = NPER (29%/4; 0; −15000000; 18600000)

EJERCICIO 28. Un fabricante de ropa femenina ofrece a sus clientes la siguiente escala de descuentos, con plazo máximo de pago a 90 días.

De 0 a 30 días 12%

Lo que significa que si se acoge al descuento por pronto pago le hacen un descuento del 12%. Si asumimos que el producto se lo facturan a 30 días por $ 100, el valor de contado sería de $ 88. En caso de no acogerse al descuento incurriría en un costo de:

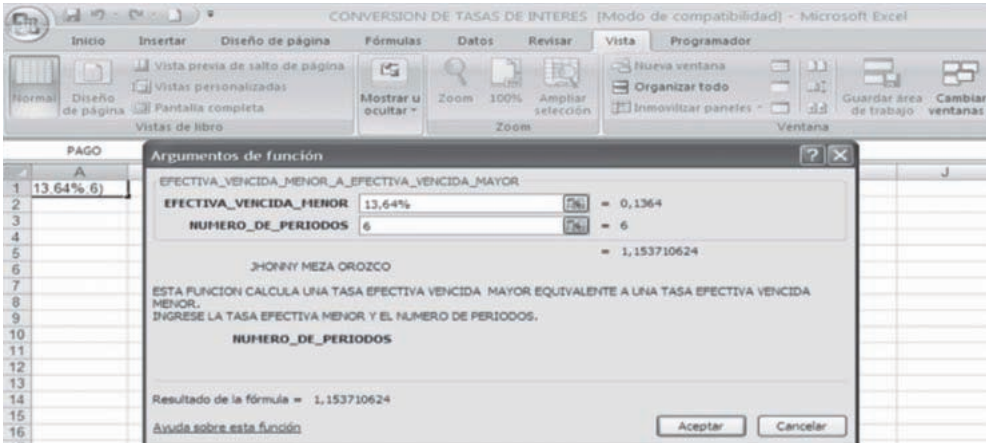
$$i = \frac{F}{P} - 1 = \frac{100}{88} - 1 = 13.64\% \text{ bimestral (durante 60 días)}$$

Calculamos la tasa efectiva anual equivalente:

$$\text{TEA} = (1 + \text{TEB})^6 - 1 = (1 + 0.1364)^6 - 1 = 115.37\%$$

En Excel: = VF (13,64%; 6; 0; −1) − 1

Con el archivo: *efectiva vencida menor a efectiva vencida mayor:*



De 30 a 60 días 8%

Lo que significa que si se acoge al descuento por pronto pago le hacen un descuento del 8%. Si asumimos que el producto se lo facturan a 30 días por $ 100, el valor de contado sería de $ 92. En caso de no acogerse al descuento incurriría en un costo de:

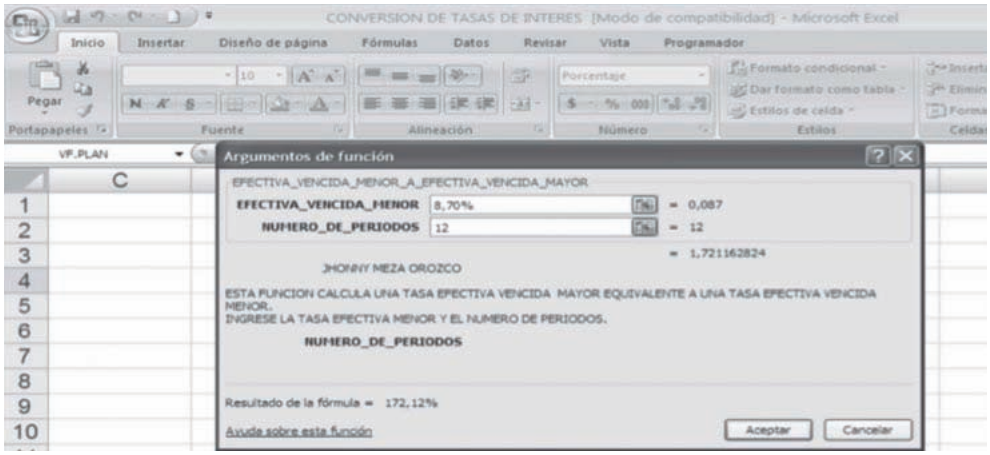
$$i = \frac{F}{P} - 1 = \frac{100}{92} - 1 = 8.70\% \text{ mensual}$$

Calculamos la tasa efectiva anual equivalente:

$$TEA = (1 + TEM)^{12} - 1 = (1 + 0.0870)^{12} - 1 = 172.12\% \text{ EA}$$

En Excel: $= VF(8{,}70\%; 12; 0; -1) - 1$

Con el archivo: *efectiva vencida menor a efectiva vencida mayor:*



Los resultados de las tasas efectivas anuales de las dos opciones nos indican que la opción más conveniente es la segunda, por tener una tasa efectiva anual mayor y representar un mayor costo.

EJERCICIO 29. Katya Elena necesita $ 20.000.000 para comprar un vehículo. Va a un banco y le ofrecen su financiación al 26% MV. Acude a un amigo que se compromete a prestarle esa cantidad si le paga $ 32.000.000 en un plazo de 2 años. ¿Cuál de los dos préstamos le conviene?

Primera opción: $i = \frac{0.26}{12} = 2.17\%$ mensual

Segunda opción: P = $ 20.000.000 F = $ 32.000.000 $n = 24$ meses $i = ?$

$$i = \left(\frac{F}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{32.000.000}{20.000.000}\right)^{\frac{1}{24}} - 1 = 1.98\% \text{ mensual}$$

Con base en las tasas efectivas mensuales se concluye que el mejor préstamo es el del amigo.

EJERCICIO 30. Una comercializadora desea obtener una utilidad real del 7.0% sobre la venta de un producto que le cuesta $ 20.000. Si la inflación es del 9.0%, ¿en cuánto debe venderlo?

Calculamos la tasa de incremento sobre el precio de compra:

$$TE = (1 + TR)(1 + INF) - 1 = (1 + 0.07)(1 + 0.09) = 16.63\ \%$$

Lo que indica que debe incrementar un 16.63% sobre el precio de compra:

$$F = \$\ 20.000 * 1.1663 = \$\ 23.326$$

EJERCICIO 31. Una obligación bancaria presenta una mora de 32 días sobre un saldo de $ 2.500.000. Calcular los intereses moratorios si la tasa de usura es del 20.45% EA.

Calculamos la tasa efectiva diaria equivalente a la tasa de usura, teniendo en cuenta que para el cálculo de intereses moratorios se toma el año de 365 días (Superintendencia Financiera).

Aplicando la ecuación de la tasa efectiva:

$$TEA = (1 + TED)^{365} - 1$$

$$TED = (1 + TEA)^{1/365} - 1$$

$$TED = (1 + 0.2045)^{1/365} - 1 = 0.05\ \%\ \text{diaria}$$

En Excel: $= TASA\ (365;\ 0;\ -1;\ 1{,}2045)$

Con el archivo: *efectiva vencida mayor a efectiva vencida menor:*

Calculamos los intereses moratorios:

$$I = P * i * n = \$\ 2.500.000 * 0.0005 * 32 = \$\ 40.000$$

CAPÍTULO 5

Anualidades o series uniformes

Ni tengo que pagar
ni me quedas a deber;
si yo te enseñé a querer
tu me enseñaste a olvidar.

Ramón de Campoamor

Quien compra al fiado,
compra doblado.

G. Fandiño

0. Introducción

En el capítulo 3 se analizaron operaciones financieras con flujos de caja conformados por un pago único y un ingreso único, o de pagos e ingresos diferentes ubicados en diferentes fechas, sin ninguna periodicidad; para esta clase de ejercicios, con la aplicación de una ecuación de valor, calculamos el valor presente y el valor futuro equivalentes a esa serie de pagos. También, en algunos casos, se calculó la tasa de interés de una operación financiera por medio del método de ensayo y error, y el tiempo de negociación. En la práctica, sobre todo en los créditos comerciales, es común el financiamiento de activos a través de una serie de pagos que tienen la característica de ser iguales y periódicos. Tales pagos iguales y periódicos se llaman *anualidades, series uniformes o rentas uniformes*. Son casos de anualidades las cuotas periódicas para el pago de un electrodoméstico, de un vehículo, los sueldos mensuales, las cuotas de seguros, los pagos de arrendamientos, entre otros, siempre y cuando, no cambien de valor durante algún tiempo.

En este capítulo se aborda el estudio de las anualidades más comunes y de mayor aplicación en la vida práctica. Para su estudio calcularemos el valor presente

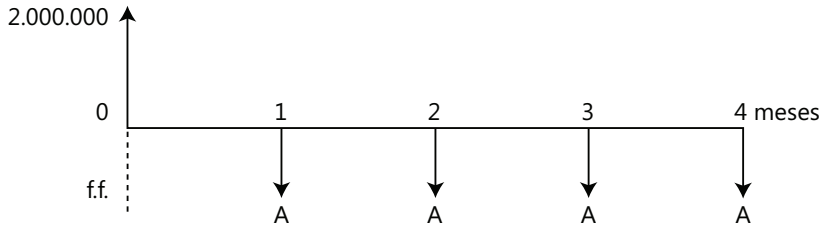
equivalente a la anualidad, valor futuro equivalente, el valor de la cuota igual y periódica y el número de pagos o tiempo de negociación. Haremos el cálculo de la tasa de interés de flujos de caja que presentan varios egresos utilizando el método de *ensayo y error*, con la calculadora financiera y con la hoja electrónica Excel.

Con la solución del siguiente ejercicio podemos hacer la introducción a este tema:

Ejemplo 5.1

Una persona compra un juego de muebles, cuyo valor de contado es de $ 2.000.000. Si le dan la facilidad para pagarlo en 4 cuotas mensuales iguales de A cada una, pagaderas al final de cada mes, cobrando una tasa de interés del 36% capitalizable mensualmente, ¿cuál es el valor de las cuotas?

El flujo de caja siguiente muestra lo que sucede en la operación financiera:



El comprador recibe un crédito de $ 2.000.000 para pagarlo con 4 cuotas mensuales iguales. La tasa de interés de la operación está expresada en forma nominal, por lo tanto, se debe capitalizar para conocer la tasa efectiva del crédito.

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.36}{12} = 0.03 = 3\% \text{ mensual.}$$

Planteamos la ecuación de valor con fecha focal en el momento cero.

$$2.000.000 = \frac{A}{(1+0.03)^1} + \frac{A}{(1+0.03)^2} + \frac{A}{(1+0.03)^3} + \frac{A}{(1+0.03)^4}$$

$$2.000.000 = \frac{A}{1.03} + \frac{A}{1.0609} + \frac{A}{1.0927} + \frac{A}{1.1255}$$

Factorizando A, tenemos:

$$2.000.000 = A(0.9709 + 0.9426 + 0.9151 + 0.8885)$$

$$2.000.000 = A(3.7171)$$

$$A = \$\ 538.054.09$$

Si hubiésemos planteado la ecuación con fecha focal en el mes tres, tendríamos:

$$2.000.00\,(1+0.03)^3 = A\,(1+0.03)^2 + A\,(1+0.03)^1 + A + \frac{A}{(1+0.03)^1}$$

$$2\,.185.454 = 1.0609A + 1.03A + A + \frac{A}{1.03}$$

$$2.185.454 = 4.0618A$$

$$A = \$\ 538.054.09$$

Utilizando la técnica de la ecuación de valor se logró fácilmente la solución de este ejercicio. Pero, si el número de pagos hubiese aumentado considerablemente la solución no habría sido tan sencilla, como en el caso de pagar una deuda mediante cuotas mensuales iguales durante 10 años. El conflicto que se presenta cuando se tiene un número grande de cuotas creó la necesidad de diseñar un modelo matemático que planteara una solución lógica y sencilla, llamado *Anualidad*.

1. Definición de anualidad

Una *anualidad* es un conjunto de pagos iguales[1] hechos a intervalos iguales de tiempo. El término anualidad parece significar que los pagos se hacen anualmente. En el sentido estricto de la expresión, esto no es necesariamente así. En Matemáticas Financieras, *anualidad* significa pagos hechos a intervalos iguales de tiempo, que pueden ser anuales, trimestrales, mensuales, quincenales, diarios, etc.

El estudio de las anualidades es de mucha importancia en finanzas, entre otras razones, porque es el sistema de amortización más común en los créditos comerciales, bancarios y de vivienda. Este sistema de pagos permite que el financiador, cada vez que recibe el pago de la cuota, recupere parte del capital prestado.

Antes de entrar de lleno a estudiar las anualidades, es necesario definir algunos términos:

1.1 Renta o pago

Es el pago periódico y de igual valor.

1.2 Período de renta

Es el tiempo que transcurre entre dos pagos.

2. Condiciones para que una serie de pagos sea una anualidad

Para que un conjunto de pagos se considere una anualidad debe cumplir con las siguientes condiciones:

- Todos los pagos deben ser iguales.
- Todos los pagos deben ser periódicos.

[1] En anualidades, los pagos iguales significan pagos constantes.

- Todos los pagos son llevados al principio o al final de la serie, a la misma tasa, a un valor equivalente, es decir, la anualidad debe tener un valor presente equivalente y un valor futuro equivalente.
- El número de pagos debe ser igual al número de períodos.

3. Clases de anualidades

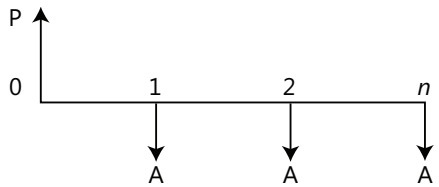
Las clases de anualidades más comunes, son las siguientes:

- Anualidad vencida.
- Anualidad anticipada.
- Anualidad diferida.
- Anualidad perpetua.

4. Anualidad vencida

Es aquella en que los pagos se hacen al final del período. Así, por ejemplo, el salario mensual de un empleado, las cuotas mensuales iguales y vencidas en la compra de vehículos y electrodomésticos, son casos de anualidades vencidas.

El flujo de caja siguiente representa una anualidad vencida, donde P es el valor inicial de la obligación y A es el valor de los pagos iguales y periódicos.



4.1 Valor presente de una anualidad vencida

Es un valor, ubicado un período anterior a la fecha del primer pago, equivalente a una serie de pagos iguales y periódicos. Desde el punto de vista matemático, es la suma de los valores presentes de todos los pagos.

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] \tag{5.1}$$

Con la expresión (5.1) se calcula un valor presente equivalente (P) a una serie de pagos iguales y periódicos, conocidos el número de pagos (*n*), el valor de cada pago (A) y la tasa de interés (*i*). En otros términos, reemplaza una serie de pagos iguales llamada *anualidad*, por un valor presente equivalente P.

El error más frecuente que se comete al trabajar problemas de anualidades es la colocación incorrecta de P, razón por la cual, es importante recordar la siguiente regla: *el valor presente (P) estará ubicado al principio del período en que se hace el primer pago*

(A). Para el caso del flujo utilizado, y cuando el primer pago se hace en 1, el valor presente quedará ubicado en el momento cero. ¿Por qué? porque se dedujo con P en el momento cero y A al final del primer período (*Blank y Tarquin, 1992*).

Uso de la calculadora financiera

Para realizar los cálculos de las anualidades se utiliza una nueva tecla, de las utilizadas en las operaciones con interés compuesto: PMT en las Casio y PAGO en la Hewlett Packard. Esta tecla corresponde al valor de la cuota de la anualidad, cualquiera que sea su clase (vencida o anticipada), y aparece en el mismo menú con que se trabaja el interés compuesto. Puesto que existen anualidades vencidas y anticipadas, antes de hacer los cálculos financieros se debe configurar la calculadora. Para las anualidades anticipadas la solución se obtiene configurando el modo anticipado. En las calculadoras Casio esto se logra oprimiendo la tecla BGN, que significa comienzo. En la Casio FC 100, se activa oprimiendo la tecla BGN que aparece al final de la segunda fila. En la Casio FC 200, BGN aparece como segunda función de la tecla MODE, por lo tanto, se requiere para activarla, oprimir primero SHIFT y luego la tecla MODE. En la calculadora FC 1.000, se oprime MODE 4 y se verifica que aparezca PAYMENT: BGN; en caso que aparezca PAYMENT: END, se oprime SHIFT MODE. Para las calculadoras Hewlett Packard 17 B II y 19 B II, el modo anticipado se activa entrando al menú OTRO, que aparece al final del menú VDT; al oprimir OTRO se debe oprimir a continuación INIC y aparece en la parte superior de la pantalla 1 PGOS/AÑO: MODO INICIAL, luego se oprime EXIT para regresar al menú VDT.

Para trabajar las anualidades vencidas, en las Casio FC 100 y FC 200 *no debe* aparecer en la pantalla la palabra BGN. En la FC 1.000, al oprimir MODE 4 debe aparecer PAYMENT: END.

En la calculadora Hewlett Packard 17 B II y 19 B II debe aparecer en la parte superior de la pantalla, activado el menú VDT, 1 PGOS/AÑO: MODO FINAL. El manual del propietario indica que el % IA corresponde a una tasa nominal anual. Es decir, al hacer una operación con una tasa mensual del 3%, se debe ingresar una tasa del 36% IA y debe aparecer en la parte superior de la pantalla 12 PGOS/AÑO: MODO FINAL O INICIAL, dependiendo de que la anualidad sea vencida o anticipada. De la misma forma, para una operación con una tasa del 9% trimestral, se debe ingresar una tasa del 36% IA y debe aparecer el mensaje 4 PGOS/AÑO. Para evitar el trabajo engorroso de estar cambiando la composición de los pagos, se sugiere trabajar en forma definitiva con 1 PGOS/AÑO: MODO FINAL O INICIAL, como así lo haremos en este libro, y la tasa que se ingresa como % IA es la tasa periódica: 3%, 9%, por ejemplo.

Para el cálculo de las anualidades Excel tiene las mismas funciones que se utilizan para el interés compuesto, con una función adicional que es PAGO que hace referencia al valor de la cuota.

NOTACIÓN TEXTO	SIGNIFICADO	NOTACIÓN EXCEL
P	Valor presente	VA
F	Valor futuro	VF
n	Número de períodos	NPER
i	Tasa de interés	TASA
A	Valor de la cuota	PAGO

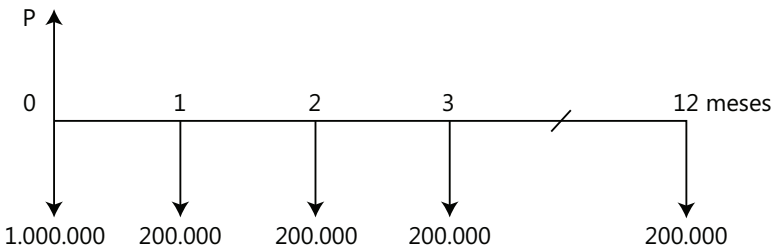
Ejemplo 5.2

Se compró un vehículo con una cuota inicial de $ 1.000.000 y 12 cuotas mensuales iguales de $ 200.000. La agencia cobra el 2.5% mensual sobre saldos. Calcular el valor del vehículo.

Cuota inicial = $ 1.000.000 A = $ 200.000 $n = 12$

$i = 2.5\%$ mensual P = ?

El flujo de caja de la operación corresponde al siguiente diagrama.



Tal como se mencionó en el ejemplo (5.1), la solución primaria a este problema se logra planteando una ecuación de valor con fecha focal en el momento cero, de la siguiente forma:

$$P = 1.000.000 + \frac{200.000}{(1.025)^1} + \frac{200.000}{(1.025)^2} + \frac{200.000}{(1.025)^3} + ... + \frac{200.000}{(1.025)^{12}}$$

Este procedimiento resulta tedioso porque implica trasladar en forma individual 12 valores del futuro al presente. Aplicando la fórmula (5.1) se calcula el valor presente de las 12 cuotas iguales, que quedará ubicado al principio del período en el que se hace el primer pago.

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] \tag{5.1}$$

$$P = 200.000\left[\frac{(1+0.025)^{12} - 1}{0.025(1+0.025)^{12}}\right]$$

$$P = \$\ 2.051.552.92$$

El valor del vehículo será igual al valor presente de los 12 pagos iguales más la cuota inicial.

Valor del vehículo = $ 1.000.000 + $ 2.051.552.92

Valor del vehículo = $ 3.051.552.92

Es equivalente pagar en el día de hoy la suma de $ 3.051.552.92, que cancelar hoy una cuota inicial de $ 1.000.000 y 12 cuotas mensuales iguales de $ 200.000, si la tasa de interés es del 2.5% mensual.

No obstante lo anterior, las anualidades consideran una diversidad de situaciones en las que resultan limitadas las fórmulas. Se presentan flujos de caja constituidos por valores individuales, además de la serie de pagos iguales y periódicos. La solución a esta clase de ejercicios se logra con una ecuación de valor, en la que las fórmulas se constituyen en simples herramientas que simplifican el proceso de traslado de cantidades monetarias a través el tiempo. Por ejemplo, este ejercicio también se puede resolver planteando una ecuación de valor con fecha focal en el momento cero, de la siguiente forma:

$$P = 1.000.000 + 200.000\left[\frac{(1+0.025)^{12}-1}{0.025(1+0.025)^{12}}\right]$$

$$P = \$\ 3.051.552.92$$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENU	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	(-) 200.000 PMT	VDT
200.000 +/- PMT	(-) 200.000 PMT	SHIFT AC EXE AC	2.5 I % EXE	CLEAR DATA
2.5 i %	2.5 i %	(-) 200.000 F4	12 n EXE	200.000 +/- PAGO
12 n	12 n	2.5 F2	0 FV EXE	2.5 % IA
COMP PV	COMP PV EXE	12 F1	PV SOLVE	12 N
		COMP F3		VA

En Excel: = VA (tasa; nper; pago; VF; tipo)

= VA (2,5%; 12; −200000; 0)

En este caso no aplica el valor futuro, por lo tanto se ingresa un valor de cero. El argumento Tipo que aparece al final del paréntesis hace referencia a si es una cuota anticipada o vencida. Si la cuota es vencida se omite el valor tipo. Si es anticipada se ingresa el número 1.

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

Figura 5.1

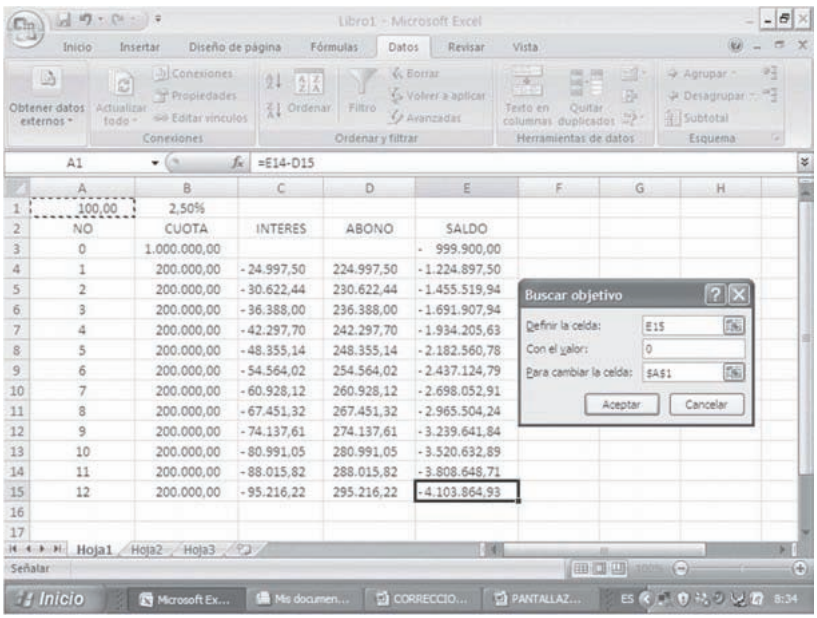
	A	B	C	D	E
1	100	2.50%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	1.000.000			=A1−B3
4	1	200.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	200.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12	200.000			

En la celda A1 escribimos un valor arbitrario, de 100, que es la incógnita del ejercicio y corresponde al valor del vehículo y en la B1 la tasa de interés del 2.50%. En la celda B3 escribimos 1.000.000 como valor de la cuota inicial y en la celda E3 registramos el valor

del saldo a financiar restándole al valor del vehículo la cuota inicial. En las celdas B4 hasta B15 escribimos 200.000 como valor de las cuotas mensuales. En la celda C4 calculamos los intereses, escribiendo =E3*$B$1 (la tasa de interés con referencia absoluta). En la celda D4 calculamos el abono a capital escribiendo =B4−C4 y en la celda E4 calculamos el saldo insoluto escribiendo =E3−D4. (Ver figura 5.1).

Rellenamos las celdas en blanco (rango C5:E15) copiando las fórmulas en C4, D4 y E4. Se observa que la tabla de amortización está desajustada porque el saldo final E15 no es igual a cero. Nos ubicamos en la celda E15, que corresponde al saldo final, hacemos clic en DATOS y en Análisis Y si, y en Buscar Objetivo (en el caso de utilizar Excel 2.003 haga clic en Herramientas y clic en Buscar Objetivo) y aparece un cuadro diálogo que tenemos que rellenar. En la casilla Definir celda se indica la celda que queremos tome cierto valor, en este caso la celda E15 que corresponde al saldo final; en la casilla Con el valor se indica el valor que se desea tome la casilla anterior, en este caso un valor de cero para que la obligación se amortice y en la casilla Para cambiar la celda se indica la celda que debe tomar un valor, que en este caso es la celda A1 que es la incógnita y corresponde al valor del vehículo. Se oprime aceptar y el programa hace iteraciones hasta que aparece el mensaje La búsqueda con la celda E15 ha encontrado una solución y hacemos clic en aceptar. En la tabla de amortización definitiva aparece en la celda A1 un valor de $3.051.552.92. (Ver figura 5.2).

Figura 5.1



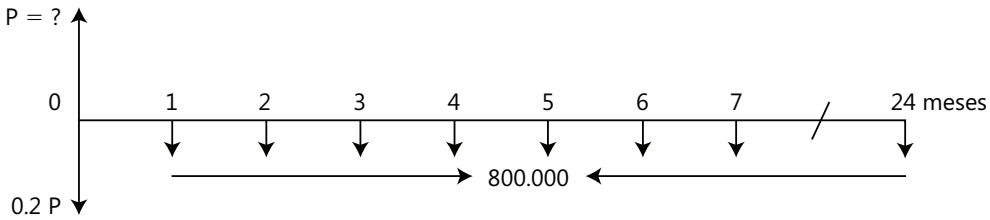
	A	B	C	D	E
1	100,00	2,50%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	1.000.000,00			- 999.900,00
4	1	200.000,00	- 24.997,50	224.997,50	- 1.224.897,50
5	2	200.000,00	- 30.622,44	230.622,44	- 1.455.519,94
6	3	200.000,00	- 36.388,00	236.388,00	- 1.691.907,94
7	4	200.000,00	- 42.297,70	242.297,70	- 1.934.205,63
8	5	200.000,00	- 48.355,14	248.355,14	- 2.182.560,78
9	6	200.000,00	- 54.564,02	254.564,02	- 2.437.124,79
10	7	200.000,00	- 60.928,12	260.928,12	- 2.698.052,91
11	8	200.000,00	- 67.451,32	267.451,32	- 2.965.504,24
12	9	200.000,00	- 74.137,61	274.137,61	- 3.239.641,84
13	10	200.000,00	- 80.991,05	280.991,05	- 3.520.632,89
14	11	200.000,00	- 88.015,82	288.015,82	- 3.808.648,71
15	12	200.000,00	- 95.216,22	295.216,22	- 4.103.864,93

Al analizar la ecuación de valor mencionamos que su aplicación permitía la solución de la mayor parte de los problemas de Matemáticas Financieras. En el caso de las anualidades también es aplicable. Cuando se utiliza la fórmula (5.1), se traslada cada uno de los valores que conforman la anualidad a un valor presente equivalente ubicado en una fecha anterior a la del primer pago; y al igualar este valor con el que los genera

se crea una ecuación de valor. Como se dijo en el párrafo anterior, la fórmula únicamente simplifica el proceso de traslado del dinero, pero la concepción del teorema se conserva. No pecamos de atrevidos si asimilamos la fórmula (5.1) a una ecuación de valor. Sería grande la dificultad que tendríamos para calcular, por ejemplo, el valor de la cuota de un crédito de $ 50.000.000 que se va a amortizar con 60 cuotas mensuales, si no existiera la fórmula (5.1). Nos tocaría plantear una ecuación de valor, y al ubicar la fecha focal en el momento cero, por ejemplo, tendríamos que hacer 60 cálculos de valor presente.

Ejemplo 5.3

Calcular el valor de contado de un activo que financiado se puede adquirir de la siguiente forma: cuota inicial equivalente al 20% del valor de contado y 24 cuotas mensuales de $ 800.000. La tasa de interés de financiación es del 3% mensual.



Con fecha focal en el momento cero se plantea la ecuación de valor.

$$P = 0.2P + A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$P = 0.2P + 800.000\left[\frac{(1+0.03)^{24} - 1}{0.03(1+0.03)^{24}}\right]$$

$$P = \$\ 16.935.542.12$$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENU	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	(-) 800.000 PMT	VDT
800.000 +/- PMT	(-)800.000 PMT	SHIFT AC EXE AC	3 I % EXE	CLEAR DATA
3 i %	3 i %	(-) 800.000 F4	24 n EXE	800.000 +/- PAGO
24 n	24 n	3 F2	0 FV EXE	3 % IA
COMP PV	COMP PV EXE	24 F1	PV SOLVE	24 N
		COMP F3		VA

En Excel: = VA (tasa; nper; pago; VF; tipo)

= VA (3%; 24; −800.000; 0)/0,80

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

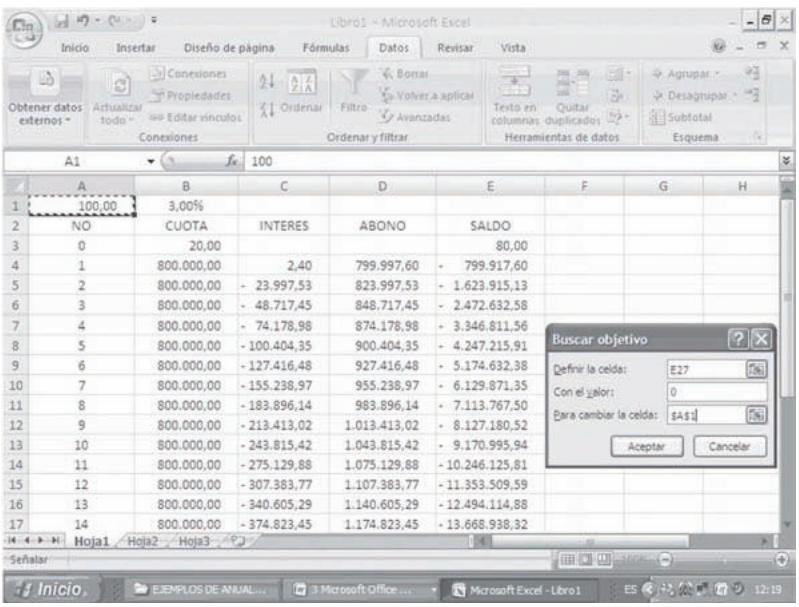
Figura 5.3

	A	B	C	D	E
1	100	3.0%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	=0.20*A1			=A1−B3
4	1	800.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	800.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
27	24	800.000			

En la celda A1 escribimos un valor arbitrario de 100, que es la incógnita del ejercicio y en B1 escribimos la tasa de interés del 3.0%. En la celda B3 escribimos =0,20*A1 para calcular el valor de la cuota inicial y en la celda E3 escribimos =A1−B3 para indicar que el saldo en el momento cero es igual al valor del activo menos la cuota inicial. Desde la celda B4 hasta la celda B27 escribimos 800.000 como valor de cada una de las 24 cuotas mensuales. En la celda C4 calculamos los intereses, escribiendo =E3*$B$1 (la tasa de interés con referencia absoluta). En la celda D4 calculamos el abono a capital escribiendo =B4−C4 y en la celda E4 calculamos el saldo insoluto escribiendo =E3−D4. (Ver figura 5.3).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E27 y aplicando *Buscar objetivo* encontramos en la celda A1 un valor de $ 16.935.542.12 que corresponde al valor del activo. (Ver figura 5.4).

Figura 5.4



4.2 Valor presente de una anualidad vencida con tasa variable

En los ejemplos 5.2 y 5.3 hemos calculado el valor presente de un conjunto de valores periódicos y de igual monto (Anualidad) bajo el supuesto de que la tasa de interés para cada período permanece constante, que es lo que supone el factor $(1+i)^n$ de la fórmula del valor presente de una anualidad vencida. En muchas ocasiones se deben calcular valores presentes de cuotas uniformes con tasas variables y en estos casos no aplica la fórmula 5.1, de tal forma que debemos diseñar un procedimiento con la hoja de cálculo Excel para poder encontrar una solución.

Ejemplo 5.4

Calcular el valor presente de 4 cuotas mensuales de $ 200 dadas las siguientes tasas de interés:

Tabla de datos

MES	1	2	3	4
TASA	1.0%	1.2%	0.8%	1.5%

Se observa que las tasas de interés son diferentes para cada período, de tal forma que la fórmula $P = A\left[\dfrac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$ no aplica. La solución matemática sería:

$$P = \frac{200}{(1+0.01)} + \frac{200}{(1+0.01)(1+0.012)} + \frac{200}{(1+0.01)(1+0.012)(1+0.008)}$$

$$+ \frac{200}{(1+0.01)(1+0.012)(1+0.008)(1+0.015)}$$

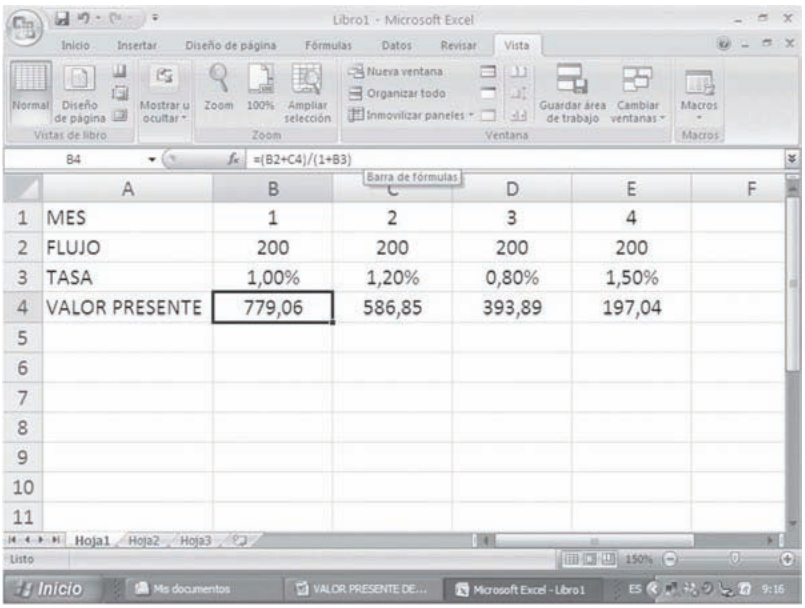
$P = \$\ 779.06$

Las calculadoras financieras no traen ningún menú para desarrollar el ejercicio.

Solución con la hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	MES	1	2	3	4
2	FLUJO	200	200	200	200
3	TASA	1.0%	1.2%	0.8%	1.5%
4	P	$=\dfrac{(B2+C4)}{(1+B3)}$	$=\dfrac{(C2+D4)}{(1+C3)}$	$=\dfrac{(D2+E4)}{(1+D3)}$	$=\dfrac{(E2+F4)}{(1+E3)}$

Para calcular el valor presente se hace necesario construir una fórmula, de los períodos más lejanos hasta los más cercanos, en cuyo numerador se sume lo que viene del período posterior (F4) con el flujo del mes (E2), y en el denominador se descuente la tasa del período. Esta fórmula se copia para los períodos anteriores, lográndose el efecto acumulativo, de tal forma que en la celda B4 obtenemos el valor presente equivalente. (Ver tabla de datos y hoja de cálculo en excel de este ejemplo).



	A	B	C	D	E	F
1	MES	1	2	3	4	
2	FLUJO	200	200	200	200	
3	TASA	1,00%	1,20%	0,80%	1,50%	
4	VALOR PRESENTE	779,06	586,85	393,89	197,04	
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						

4.3 Valor de la cuota en función del valor presente

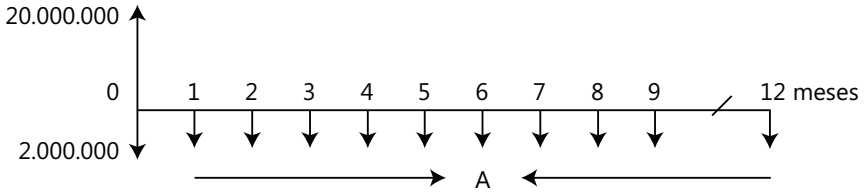
Conocidos el valor presente (P), la tasa de interés (*i*) y el número de pagos (*n*), podemos calcular el valor de la cuota. Si de la fórmula del valor presente (5.1) despejamos el valor de la cuota A, tenemos:

$$A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] \tag{5.2}$$

El valor entre llaves se denomina *factor de recuperación de capital*.

Ejemplo 5.5

Un lote de terreno que cuesta $ 20.000.000 se propone comprar con una cuota inicial del 10% y 12 cuotas mensuales con una tasa de interés del 2% mensual. Calcular el valor de las cuotas.



Al restarle al valor del terreno la cuota inicial de $ 2.000.000 queda el saldo de la deuda que se va a financiar por medio de 12 cuotas mensuales.

Valor a financiar = $ 20.000.000 − $ 2.000.000 = $ 18.000.000

$$A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] \tag{5.2}$$

$$A = 18.000.000\left[\frac{0.02(1.02)^{12}}{(1.02)^{12} - 1}\right]$$

$$A = \$\ 1.702.072.74$$

Cada mes, durante 12 meses, se deben pagar $ 1.702.072.74 para cancelar el saldo de la deuda de $ 18.000.000.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENU	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	18.000.000 PV EXE	VDT
18.000.000 PV	18.000.000 PV	SHIFT AC EXE AC	2 I % EXE	CLEAR DATA
2 i %	2 i %	18.000.000 F3	12 n EXE	18.000.000 VA
12 n	12 n	2 F2	0 FV EXE	2 % IA
COMP PMT	COMP PMT EXE	12 F1	PMT SOLVE	12 N
		COMP F4		PAGO

En Excel: = PAGO (tasa; nper; VA; VF; tipo)

= PAGO (2%; 12; −18.000.000; 0)

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

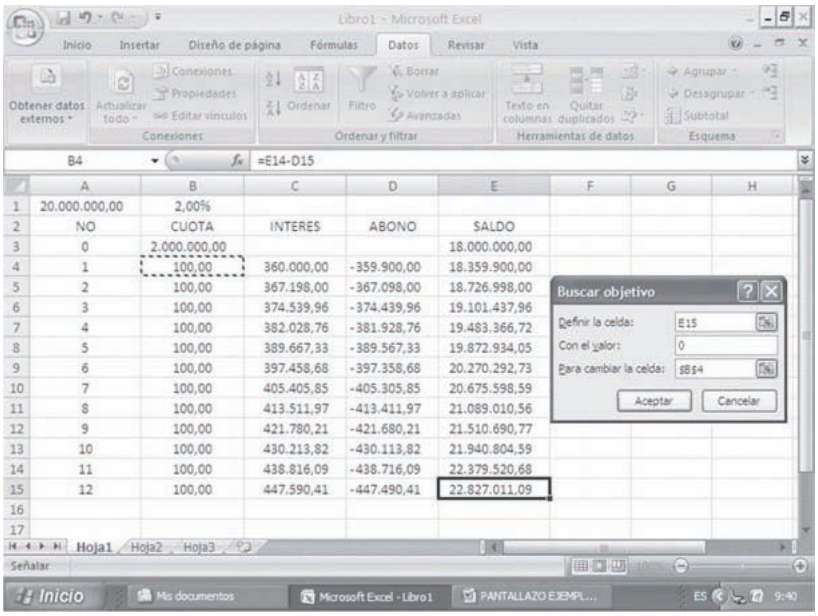
Figura 5.5

	A	B	C	D	E
1	20.000.000	2.0%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	=0.10*A1			=A1−B3
4	1	100	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12				

En la celda A1 escribimos 20.000.000, que corresponde al valor del lote de terreno y en la B1 2.0%, que es la tasa de interés. En la celda B3 escribimos = 0,10*A1 para calcular el valor de la cuota inicial y en la celda E3 escribimos = A1 − B3 para indicar que el saldo en el momento cero es igual al valor del lote menos la cuota inicial. En la celda B4 escribimos un valor arbitrario de 100, que es la incógnita del ejercicio y que corresponde a cada una de las 12 cuotas. En la celda B5 escribimos = B4 para indicar que la segunda cuota es igual a la primera, y copiamos la celda B5 hasta la celda B15. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, abono a capital y saldo insoluto. (Ver figura 5.5).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicando *Buscar objetivo* encontramos en la celda B4 un valor de $ 1.702.072.74 que corresponde al valor de la cuota mensual. (Ver figura 5.6).

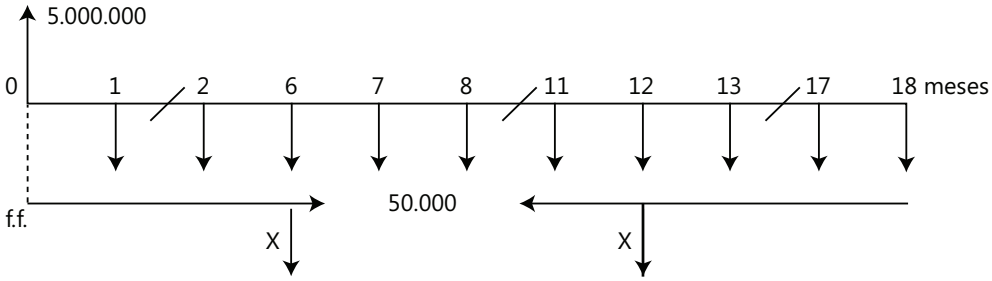
Figura 5.6



	A	B	C	D	E
1	20.000.000,00	2,00%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	2.000.000,00			18.000.000,00
4	1	100,00	360.000,00	-359.900,00	18.359.900,00
5	2	100,00	367.198,00	-367.098,00	18.726.998,00
6	3	100,00	374.539,96	-374.439,96	19.101.437,96
7	4	100,00	382.028,76	-381.928,76	19.483.366,72
8	5	100,00	389.667,33	-389.567,33	19.872.934,05
9	6	100,00	397.458,68	-397.358,68	20.270.292,73
10	7	100,00	405.405,85	-405.305,85	20.675.598,59
11	8	100,00	413.511,97	-413.411,97	21.089.010,56
12	9	100,00	421.780,21	-421.680,21	21.510.690,77
13	10	100,00	430.213,82	-430.113,82	21.940.804,59
14	11	100,00	438.816,09	-438.716,09	22.379.520,68
15	12	100,00	447.590,41	-447.490,41	22.827.011,09
16					
17					

Ejemplo 5.6

Se tiene un crédito de $ 5.000.000 para pagarlo en 18 cuotas mensuales de $ 50.000 más dos cuotas extras en los meses 6 y 12. Si la operación financiera se realiza con un interés del 3% mensual, calcular el valor de las cuotas extras.



Se elige el momento cero para plantear la ecuación de valor. Las cuotas extras son adicionales a las cuotas normales de $ 50.000.

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] + \frac{X}{(1+i)^n} + \frac{X}{(1+i)^n}$$

$$5.000.000 = 50.000\left[\frac{(1+0.03)^{18} - 1}{0.03(1+0.03)^{18}}\right] + \frac{X}{(1+0.03)^6} + \frac{X}{(1+0.03)^{12}}$$

$$5.000.000 = 687.675.65 + 0.8375X + 0.7014X$$

$$4.312.324.35 = 1.54X$$

$$X = \$\ 2.802.212.20$$

En este ejercicio observa el lector que las anualidades plantean situaciones financieras cuya solución no se logra con la simple aplicación de una fórmula, sino que es necesario plantear una ecuación de valor.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENU	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	(-) 50.000 PMT EXE	VDT
50.000 +/- PMT	(-)50.000 PMT	SHIFT AC EXE AC	3 I % EXE	CLEAR DATA
3 i %	3 i %	(-) 50.000 F4	18 n EXE	50.000 +/- PAGO
18 n	18 n	3 F2	0 FV EXE	3 % IA
COMP PV	COMP PV EXE	18 F1	PV SOLVE	18 N
		COMP F3		VA

En Excel: $= VA\ (tasa; nper; pago; VF; tipo)$

$= VA\ (3\%; 18; -50000; 0)$

El valor obtenido con la calculadora financiera corresponde al valor presente de la anualidad. La ecuación de valor, conocido este resultado, se plantea de la siguiente forma:

$$500.000 = 687.675.65 + \frac{X}{(1+0.03)^6} + \frac{X}{(1+0.03)^{12}}$$

Resolviendo la ecuación se obtiene un valor de X = $ 2.802.212.20.

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

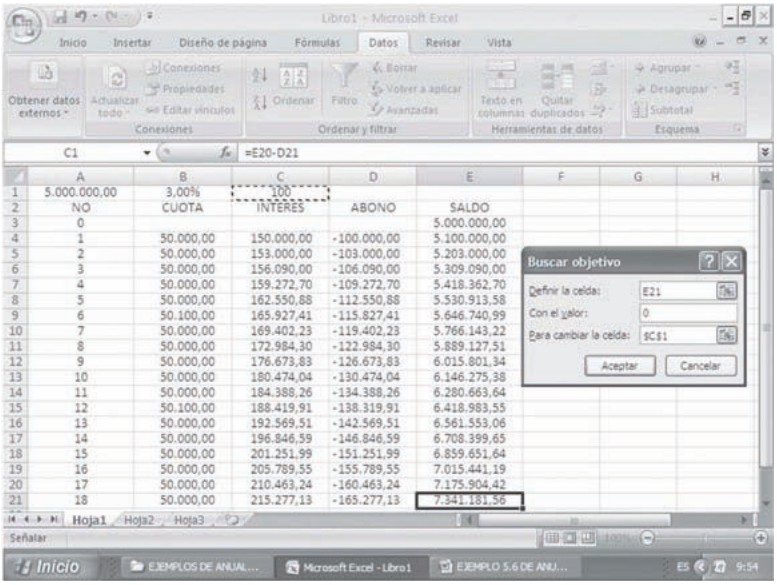
Figura 5.7

	A	B	C	D	E
1	5.000.000	3.0%	100		
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	50.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
.....	.....	.....	.....	.....	.....
8	5	50.000			
9	6	=50.000+$C$1		.....	.....
10	7	50.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
14	11	50.000			
15	12	=50.000+$C$1			
16	13	50.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
21	18	50.000			SALDO FINAL

En la celda A1 escribimos 5.000.000, que corresponde al valor del crédito, en la B1 escribimos 3.0% como tasa de interés y en la C1 escribimos un valor arbitrario, 100 en este caso, que corresponde al valor de las cuotas extras que vamos a calcular. En la celda E3 escribimos =A1 para indicar el saldo del crédito en el momento cero. Desde B4 hasta B21, a excepción de B9 y B15, registramos las cuotas mensuales de 50.000. En las celdas B9 y B15 escribimos 50.000 más $C$1 para indicar que en estos meses se paga la cuota normal de $ 50.000 más la cuota extra (C1) que vamos a calcular. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, abono a capital y el saldo insoluto. (Ver figura 5.7).

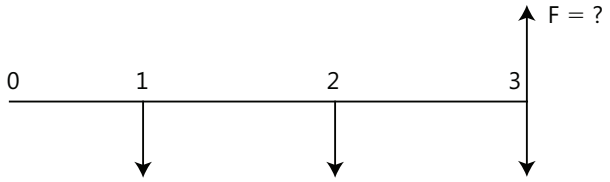
Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E21 y aplicando *Buscar objetivo* encontramos en la celda C1 un valor de $ 2.802.212.20 que corresponde al valor de la cuota extra. (Ver figura 5.8).

Figura 5.8



4.4 Valor futuro de una anualidad vencida

Es un valor ubicado en la fecha del último pago, equivalente a toda la serie de pagos iguales y periódicos. En forma matemática, es el valor final que resulta de sumar todos los valores llevados al futuro. El flujo que analizaremos a continuación tiene 3 pagos iguales de A, y se desea calcular su valor futuro equivalente ubicado en la fecha del último pago.

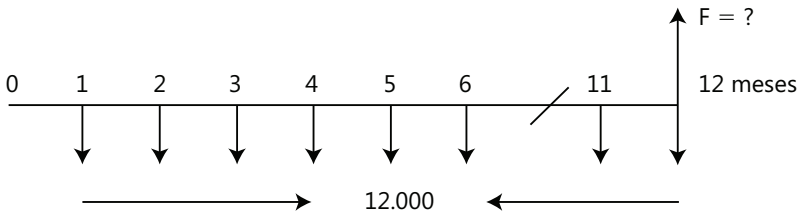


$$F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \tag{5.3}$$

Por medio de la fórmula (5.3) se calcula el valor futuro equivalente a una serie de pagos iguales, conocidos el valor de cada pago (A), la tasa de interés (i) y el número de pagos o ingresos (n). Por la forma como se dedujo, *el valor futuro equivalente a una serie de pagos iguales vencidos queda ubicado en la fecha en que se hace el último pago.*

Ejemplo 5.7

Si Juan David deposita $ 12.000 cada fin de mes, durante un año, en una entidad financiera que paga una tasa del 3.0% mensual. ¿Cuánto dinero tendrá acumulado al final de este tiempo?



En forma análoga a lo expuesto en el análisis del valor presente, la solución primaria a este ejercicio la proporciona una ecuación de valor, con fecha focal en el mes 12, de la siguiente forma:

$$F = 12.000\,(1.03)^{11} + 12.000\,(1.03)^{10} + 12.000\,(1.03)^{9} + ... + 12.000(1.03) + 12.000$$

Que al resolver resulta: F = $ 170.304.35. Pero, para un número de depósitos muy grande, el método anterior para obtener el valor futuro resulta trabajoso. Por lo tanto, en aras de la simplicidad se emplea la expresión (5.3), que al aplicarla traslada en forma rápida y efectiva valores iguales y periódicos a un valor futuro equivalente ubicado en la fecha del último pago.

$$F = A\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right] \tag{5.3}$$

$$F = 12.000\left[\frac{(1+0.03)^{12}-1}{0.03}\right]$$

$$F = \$\ 170.304.35$$

Como se observa en el flujo de caja, los depósitos se realizan al final de cada mes. Los primeros $ 12.000 ganarán intereses durante 11 meses, los segundos $ 12.000 ganarán intereses durante 10 meses, etc. El último depósito no gana intereses y teóricamente se retira el mismo día que se deposita, junto con el resto del dinero acumulado, lo cual no es razonable ni sucede en la práctica. ¿Por qué se da esta situación? ¿Por qué la fórmula resuelve esta situación y no otra? (*García, 1999*). Como se anotó en un párrafo anterior, el valor futuro de una anualidad vencida está ubicado en la fecha del último pago. Además, la costumbre es hacer depósitos al principio del período, pero esta situación se resolverá cuando se analicen las anualidades anticipadas.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENU	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	(-)12.000 PMT	VDT
12.000 +/- PMT	(-)12.000 PMT	SHIFT AC EXE AC	3 I % EXE	CLEAR DATA
3 i %	3 i %	(-)12.000 F4	12 n EXE	12.000 +/- PAGO
12 n	12 n	3 F2	0 FV EXE	3 % IA
COMP FV	COMP FV EXE	12 F1	FV SOLVE	12 N
		COMP F5		VF

En Excel: = VF (tasa; nper; pago; VA; tipo)

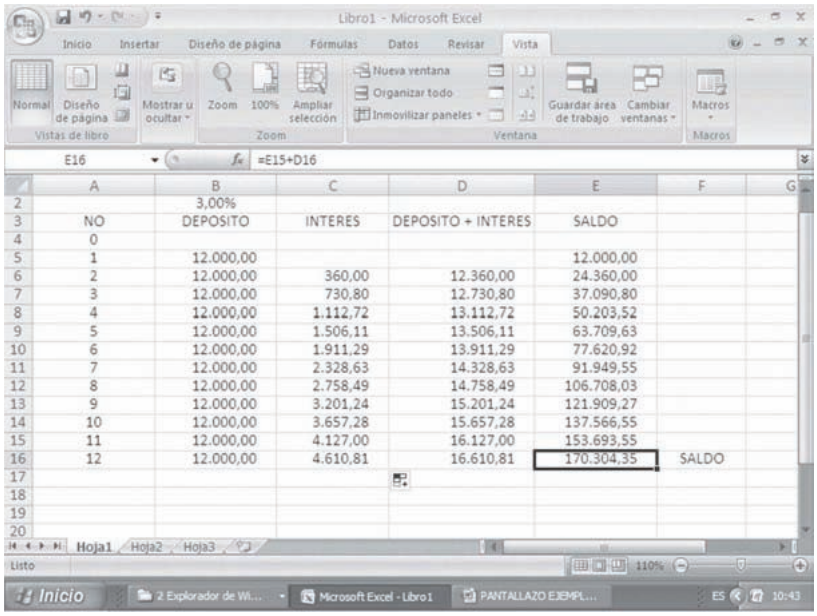
= VF (3%; 12; −12000; 0)

Solución con la hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1		3.0%			
2	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO+INTERÉS	SALDO
3	0				
4	1	12.000			=B4
5	2	12.000	=E4*$B$1	=B5+C5	=E4+D5
.....	.....	.....	.....	.....	.....
14	11	12.000			
15	12	12.000			SALDO FINAL

En la celda B1 escribimos 3% que es la tasa de interés que van a reconocer por los depósitos mensuales. En la celda B4 escribimos 12.000 como valor del primer depósito y copiamos este valor hasta la celda B15. Calculamos los intereses del primer depósito en la celda C5 escribiendo =E4*$B$1 (la tasa de interés con referencia absoluta) y en la celda D5 sumamos el valor del segundo depósito más los intereses del primer depósito. En la celda E5 sumamos el saldo anterior (E4) más D5 (segundo depósito más intereses del primer depósito). Rellenamos las celdas en blanco copiando las fórmulas de las celdas C5, D5 y E5 en el rango C6:E15 y obtenemos en E15 un saldo final de $ 170.304.35. (Ver figura 5.9).

Figura 5.9



Al final del primer mes se tendrá acumulado el valor del depósito ($ 12.000). Al final del segundo mes se tendrá acumulado el valor del depósito de ese período más el valor acumulado del mes anterior con sus respectivos intereses ($ 12.000 + $ 12.000 × 0.03 + $ 12.000). El valor acumulado al final del año será igual al valor acumulado en el onceavo mes, más los intereses sobre este valor acumulado, más el último depósito ($ 153.693.55 + $ 153.693.55 × 0.03 + $ 12.000). Indica lo anterior que el último depósito no gana intereses.

4.4.1 Valor futuro de una anualidad vencida con tasa variable

Al realizar el procedimiento de cálculo del ejercicio anterior asumimos que en la entidad financiera cada uno de los depósitos mensuales de $ 12.000 ganaría intereses del 3% mensual, a excepción del depósito número 12 que no gana intereses. Esto es impráctico e irreal ya que las tasas de interés en nuestro país son fluctuantes en períodos muy cortos de tiempo, lo que significa que cada fin de mes, al hacer el depósito, le reconocerán una tasa de interés diferente.

Ejemplo 5.8

Supóngase que para el ejemplo 5.7 la tasa de interés del 3.0% mensual no permanece constante en los próximos meses sino que se prevén las siguientes tasas. Calcular el valor del dinero acumulado en la entidad financiera al final del año.

MES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
TASA	3.0%	2.9%	3.1%	2.5%	2.7%	2.8%	3.0%	3.1%	3.2%	3.3%	3.2%

Nota: aparecen en la tabla 11 tasas de interés debido a que el depósito número 12 no gana intereses, tal como se observa en el flujo de caja del ejemplo 5.7.

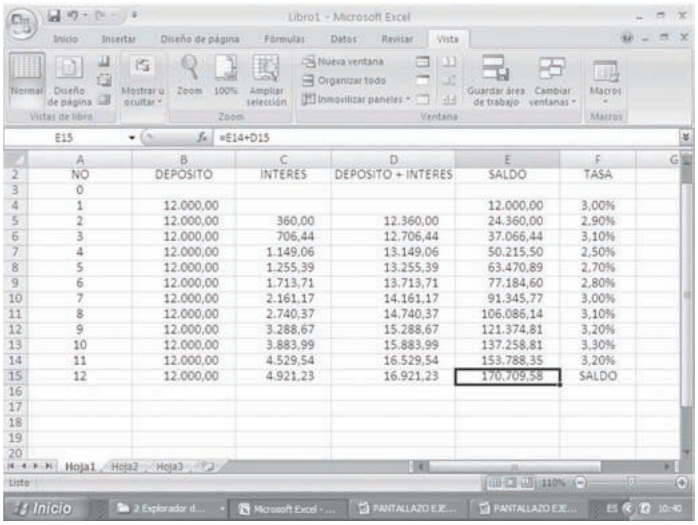
La fórmula 5.3 del valor futuro, que tiene implícita la reinversión de intereses a la misma tasa de interés con el factor $(1 + i)^n$, no aplica para este caso. Las calculadoras financieras tampoco tienen ninguna función que haga este cálculo. Procederemos a realizar un procedimiento coherente en la hoja de cálculo Excel.

Solución con la hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E	F
1	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO+INTERÉS	SALDO	TASA
2	0					
3	1	12.000			=B3	3.00%
4	2	12.000	=E3*F3	=B4+C4	=E3+D4	2.90%
5	3	12.000				3.10%
6	4	12.000				2.50%
7	5	12.000				2.70%
8	6	12.000				2.80%
9	7	12.000				3.00%
10	8	12.000				3.10%
11	9	12.000				3.20%
12	10	12.000				3.30%
13	11	12.000				3.20%
14	12	12.000				SALDO FINAL

En las celdas B3 hasta B14 escribimos 12.000 como valor de los depósitos mensuales. En las celdas F3 hasta F13 escribimos las tasas de interés previstas para los próximos 11 meses. En la celda C4 calculamos el valor de los intereses del primer depósito escribiendo =E3*F3 (obsérvese que no se fija la tasa de interés con la referencia absoluta, debido a que ésta cambia de valor cada período) y en la celda D4 sumamos el valor del segundo depósito más los intereses del primer depósito escribiendo =B4 + C4. En la celda E4 sumamos el saldo anterior (E3) más D4 (segundo depósito más intereses del primer depósito). Rellenamos las celdas en blanco copiando las fórmulas y obtenemos en E14 un saldo final de $ 170.709.58. (Ver figura 5.9a).

Figura 5.9a

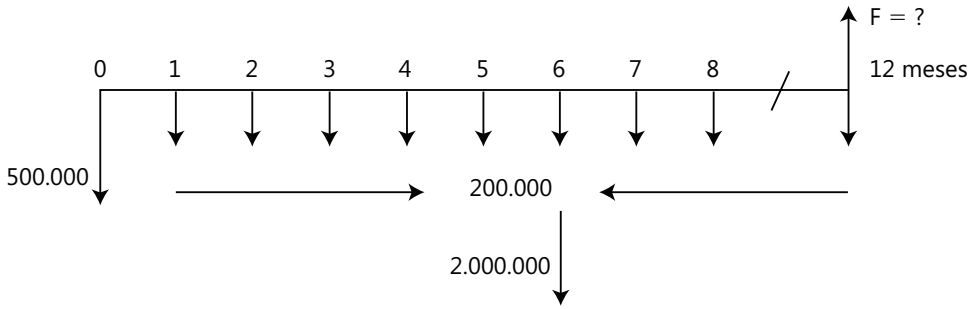


Ejemplo 5.9

Un padre de familia inicia una cuenta de ahorros con $ 500.000 en una entidad bancaria que le paga una tasa de interés del 2% mensual. Cada fin de mes deposita $ 200.000, durante 12 meses. Si al final del mes 6 hace un depósito extra de $ 2.000.000, calcular el valor acumulado al final del año.

El siguiente flujo de caja refleja lo que sucede en la operación de ahorro.

Con fecha focal en el mes 12 planteamos la ecuación de valor.



$$F = 500.000\left(1 + 0.02\right)^{12} + 200.000\left[\frac{\left(1.02\right)^{12} - 1}{0.02}\right] + 2.000.000\left(1 + 0.02\right)^{6}$$

F = $ 5.568.863.68

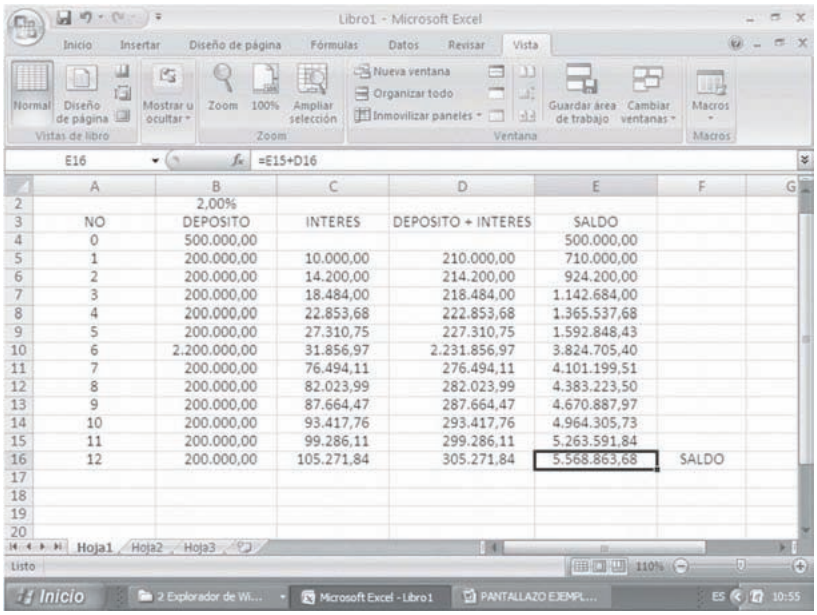
Solución con la hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1		2.00%			
2	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO+INTERÉS	SALDO
3	0	500.000			=B3
4	1	200.000	=E3*$B$1	=B4+C4	=E3+D4
5	2	200.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
9	6	2.200.000			
10	7	200.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12	200.000			SALDO FINAL

En la celda B1 escribimos 2% que es la tasa de interés que van a reconocer por los depósitos mensuales en la entidad bancaria. En la celda B3 escribimos 500.000 como depósito inicial. Desde la celda B4 hasta la celda B15 registramos 200.000 como valor de

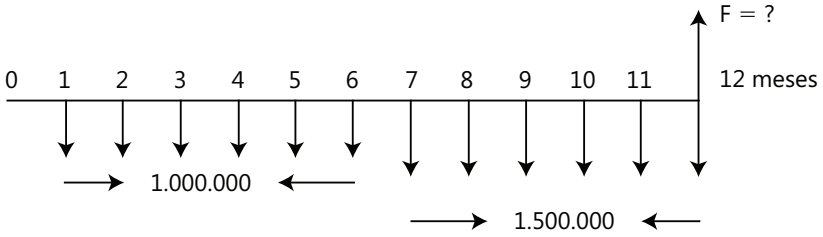
los depósitos mensuales, excluyendo la celda B9 donde escribimos 2.200.000 (depósito mensual más depósito extra). En la celda C4 calculamos los intereses del depósito inicial. En la celda D4 registramos el valor del primer depósito mensual más los intereses que genera el depósito inicial. En la celda E4 sumamos el saldo anterior E3 (valor del depósito inicial) más D4 (primer depósito mensual más intereses del depósito inicial). Rellenamos las celdas en blanco copiando las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y obtenemos en E15 un saldo final de $ 5.568.863.68 (Ver figura 5.10).

Figura 5.10



Ejemplo 5.10

Un ahorrador decide hacer depósitos de $1.000.000 por mes vencido, durante un año, en una entidad que le paga una tasa de interés del 1.8% mensual. Al llegar a hacer el séptimo depósito le informan que la tasa de interés ha aumentado al 2% mensual, por ello, decide aumentar a $ 1.500.000 el valor de los depósitos. ¿Qué valor tiene acumulado al final del año?



En primer lugar se calcula el valor acumulado en la cuenta de ahorros al final del mes 7, antes de realizar el respectivo depósito, a una tasa de interés del 1.8% mensual.

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \tag{5.3}$$

$$F = 1.000.000\left[\frac{(1.018)^6 - 1}{0.018}\right]$$

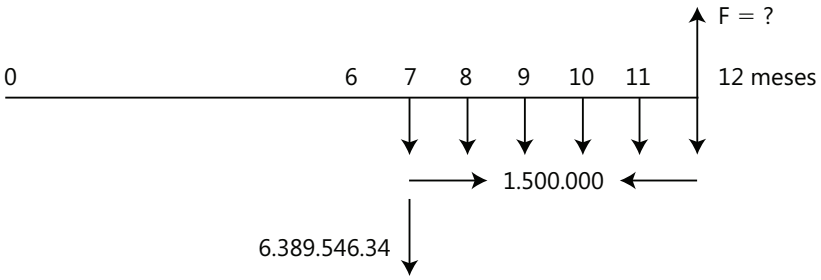
$$F = \$\ 6.276.568.11$$

Al aplicar la fórmula (5.3) el valor futuro que se obtiene corresponde al valor acumulado al final del mes 6. Como son depósitos mensuales vencidos, el séptimo depósito se realiza al final del mes 7, por lo tanto, el valor acumulado en el mes 6 gana intereses durante un mes a una tasa de interés del 1.8% mensual.

$$F = \$\ 6.276.568.11(1 + 0.018) = \$\ 6.389.546.34$$

Este resultado es lo que se tiene acumulado al final del séptimo mes, que ganará intereses del 2% mensual durante los 5 meses restantes.

El nuevo flujo de caja queda de la siguiente forma:



Con fecha focal en el mes 12 se plantea la siguiente ecuación de valor.

$$F = 6.389.546.34(1.02)^5 + 1.500.000\left[\frac{(1.02)^6 - 1}{0.02}\right]$$

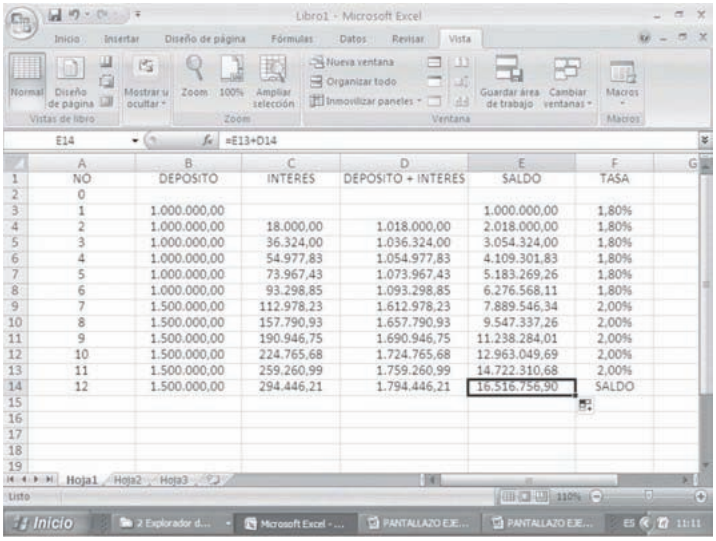
$$F = \$\ 16.516.756.90$$

Solución con la hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E	F
1	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO+INTERÉS	SALDO	TASA
2	0					
3	1	1.000.000			=B3	1.80%
4	2	1.000.000	=E3*F3	=B4+C4	=E3+D4	1.80%
5	3	1.000.000				1.80%
6	4	1.000.000				1.80%
7	5	1.000.000				1.80%
8	6	1.000.000				1.80%
9	7	1.500.000				2.00%
10	8	1.500.000				2.00%
11	9	1.500.000				2.00%
12	10	1.500.000				2.00%
13	11	1.500.000				2.00%
14	12	1.500.000				SALDO FINAL

En las celdas B3 hasta B2 registramos los depósitos. En las celdas F3 hasta F8 escribimos 1.80% que es la tasa de interés que le reconocerán al ahorrador durante los 6 primeros meses y en las celdas F9 hasta F13 escribimos 2.00% que es la tasa de interés que pagará la entidad durante los siguientes 5 meses. En la celda C4 calculamos el valor de los intereses del primer depósito escribiendo =E3*F3 (obsérvese que no se fija la tasa de interés, escribiendo la referencia absoluta, debido a que ésta cambia de valor cada período) y en la celda D4 sumamos el valor del segundo depósito más los intereses del primer depósito. En la celda E4 sumamos el saldo anterior (E3) más D4 (segundo depósito más intereses del primer depósito). Rellenamos las celdas en blanco copiando las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 y obtenemos un valor de $ 16.516.756.90 en la celda E14. (Ver figura 5.11).

Figura 5.11



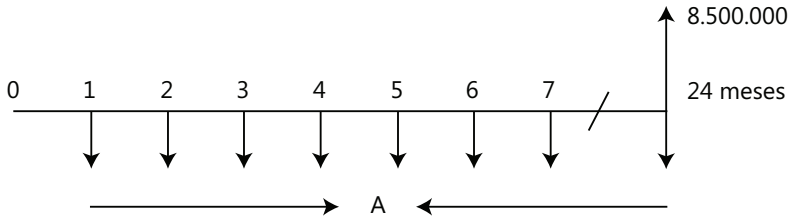
4.5 Valor de la cuota en función del valor futuro

Conocidos el valor futuro equivalente a una serie de pagos iguales (F), la tasa de interés efectiva periódica (*i*) y el número de pagos (*n*), se desea calcular el valor de la cuota igual y periódica. De la fórmula (5.3) despejamos el valor de A y se obtiene:

$$A = F\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right] \tag{5.4}$$

Ejemplo 5.11

¿Cuánto se debe depositar al final de cada mes, durante dos años, en una cuenta de ahorros que reconoce una tasa del 2.50% mensual para reunir la suma de $ 8.500.000?



$$A = F\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right] \tag{5.4}$$

$$A = 8.500.000\left[\frac{0.025}{(1+0.025)^{24} - 1}\right]$$

$$A = \$\ 262.758.97$$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENU	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	8.500.000 FV EXE	VDT
8.500.000 FV	8.500.000 FV	SHIFT AC EXE AC	2.5 I % EXE	CLEAR DATA
2.5 i %	2.5 i %	8.500.000 N F5	24 n EXE	8.500.000 VF
24 n	24 n	2.5 F2	0 PV EXE	2.5 % IA
COMP PMT	COMP PMT EXE	24 F1	PMT SOLVE	24 N
		COMP F4		PAGO

En Excel: = PAGO (tasa; nper; VA; VF; tipo)

= PAGO (2,5%; 24; 0; 8.500.000)

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

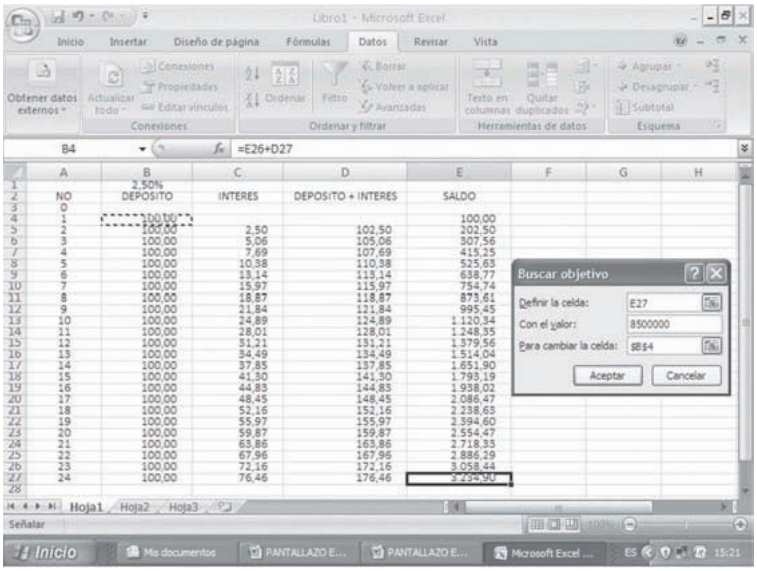
Figura 5.12

	A	B	C	D	E
1		2.50%			
2	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO+INTERÉS	SALDO
3	0				
4	1	100.00			=B4
5	2	=B4	=E4*$B$1	=B5+C5	=E4+D5
6	3				
.....	.....	.....	.....	.....	.....
27	24				SALDO FINAL

En la celda B1 escribimos 2.5% como tasa de interés que van a reconocer en la entidad bancaria por los depósitos mensuales. En la celda B4 escribimos un valor arbitrario de 100, como valor del depósito mensual, que corresponde a la incógnita del ejercicio. Como los depósitos a calcular son de igual valor copiamos la celda B4 hasta la celda B27 a partir de B5. El saldo al final del primer mes debe ser igual al primer depósito, por lo tanto, escribimos =B4 en la celda E4. En la celda C5 calculamos los intereses del primer depósito. En la celda D5 registramos el valor del segundo depósito mensual más los intereses que genera el depósito del primer mes. En la celda E5 sumamos el saldo anterior E4 (valor del primer depósito) más D5 (segundo depósito más intereses del primer depósito). (Ver figura 5.12).

Copiamos las fórmulas de las celdas C5, D5 y E5 en el rango C6:E27 y aplicando *Buscar objetivo* encontramos en la celda B4 un valor de $ 262.758.97. (Ver figura 5.13).

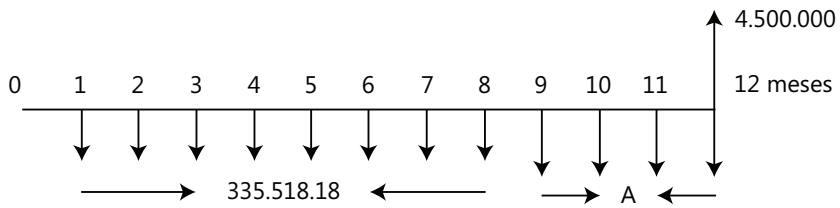
Figura 5.13



Ejemplo 5.12

Un padre de familia necesita disponer al final del año de $ 4.500.000, para tal efecto comienza a hacer depósitos al final de cada mes de $ 335.518.18 en una entidad que le paga el 2% mensual. Al llegar a la entidad a hacer el noveno depósito le informan que la tasa de interés ha bajado al 1.6% mensual. ¿De qué valor deben ser los nuevos depósitos?

Si la tasa de interés no hubiera cambiado, el padre de familia hubiera seguido depositando $ 335.518.18 y al final del año tendría acumulado $ 4.500.000, pero debido a la disminución en la tasa de interés debe aumentar el valor de los depósitos.

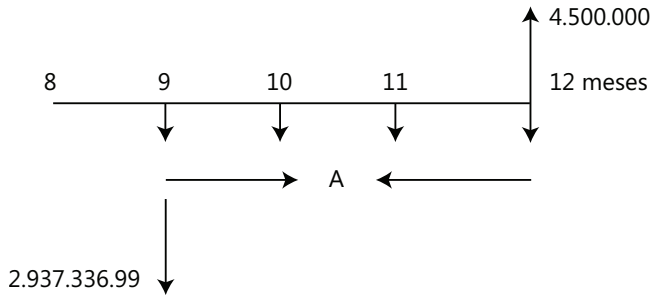


En primer lugar se calcula la cantidad que se tiene acumulada al final del mes 8. Esta cantidad se representará por F_1.

$$F_1 = 335.518.18\left[\frac{(1.02)^8 - 1}{0.02}\right]$$

$$F_1 = \$\ 2.879.742.15$$

Este es el valor acumulado a finales del mes 8, que gana intereses durante un mes al 2% mensual.



$$F = 2.879.742.15\ (1.02) = \$\ 2.937.336.99$$

El siguiente flujo de caja muestra la situación que se tendrá al final del mes 9 hasta el final del año.

Tomando el mes 12 como fecha focal se plantea la siguiente ecuación de valor, con la nueva tasa de interés (1.6% mensual).

$$2.937.336.99\left(1.016\right)^{3} + A\left[\frac{\left(1.016\right)^{4} - 1}{0.016}\right] = 4.500.000$$

$$A = \$\ 346.446.96$$

El padre de familia deberá depositar $ 346.446.97 cada mes durante 4 meses, empezando en el mes 9.

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

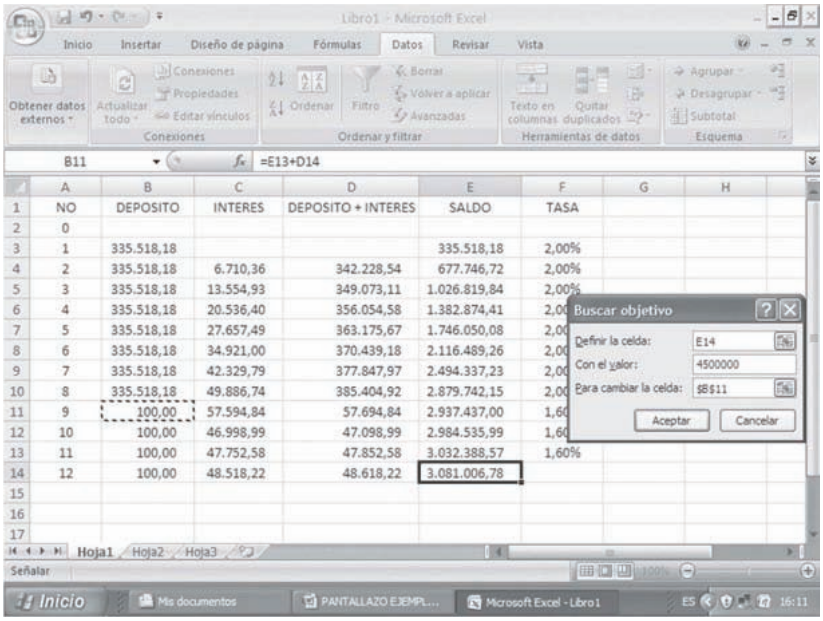
Figura 5.14

	A	B	C	D	E	F
1	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO+INTERÉS	SALDO	TASA
2	0					
3	1	335.518.18			=B3	2.0%
4	2	335.518.18	=E3*F3	=B4+C4	=E3+D4	2.0%
5	3	335.518.18				2.0%
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
10	8	335.518.18				2.0%
11	9	100				1.6%
12	10	=B11				1.6%
13	11		.....	.....	.....	1.6%
14	12					

En las celdas B3 hasta B10 registramos los depósitos de 335.518.18 y en la celda B11 escribimos un valor arbitrario de 100, que es la incógnita del ejercicio y corresponde al valor de los nuevos depósitos; copiamos la celda B11 hasta la celda B14 a partir de B12. El saldo al final del primer mes será igual al valor del primer depósito B3. Desde F3 hasta F10 registramos la tasa del 2.0% que reconocerá la entidad hasta el octavo depósito y en las celdas F11 hasta F13 registramos la nueva tasa del 1.6%. En la celda C4 calculamos los intereses del primer depósito multiplicando el saldo al final del primer mes (E3) por la tasa de interés (F3). En la celda D4 registramos el valor del segundo depósito (B4) más los intereses que genera el primer depósito (C4). En la celda E4 sumamos el saldo anterior E3 (valor del primer depósito) más D4 (segundo depósito más intereses del primer depósito). (Ver figura 5.14).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E14 y aplicando *Buscar objetivo* encontramos en la celda B11 un valor de $ 346.446.96. (Ver figura 5.15).

Figura 5.15



4.6 Cálculo del tiempo de negociación

Es el número de cuotas necesarias para amortizar una obligación. Para las anualidades vencidas, el tiempo de la operación, medido en número de períodos, algunas veces coincide con el número de pagos, lo cual no siempre se cumple. El número de cuotas o tiempo de negociación lo podemos calcular a partir del valor presente o del valor futuro, dependiendo de qué valor de ellos se conozca en la operación.

$$n = \frac{\text{Log A} - \text{Log}(\text{A} - \text{P}i)}{\text{Log}(1 + i)} \tag{5.5}$$

$$n = \frac{\text{Log}(\text{F}i + \text{A}) - \text{Log A}}{\text{Log}(1 + i)} \tag{5.6}$$

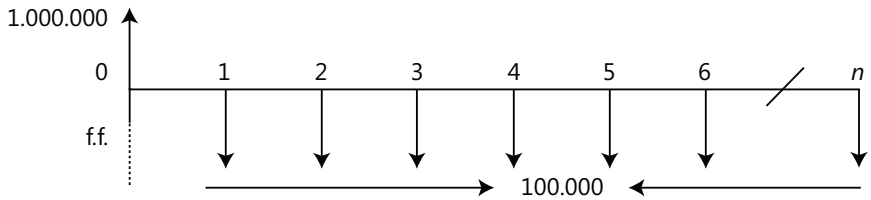
Ejemplo 5.13

Una deuda de $ 1.000.000 se debe cancelar con cuotas mensuales iguales de $ 100.000 cada una. Si la tasa de interés cobrada es del 36% capitalizable mensualmente, ¿con cuántos pagos se cancela la deuda?

Se capitaliza la tasa nominal para conocer la tasa efectiva mensual equivalente.

$$i = \frac{\text{J}}{n} = \frac{0.36}{12} = 0.03 = 3\% \text{ mensual}$$

El flujo de caja es el siguiente.



$$n = \frac{\text{Log A} - \text{Log}(\text{A} - \text{P}i)}{\text{Log}(1 + i)} \tag{5.5}$$

Aplicando la fórmula (5.5) para los datos del ejemplo, se tiene:

$$n = \frac{\text{Log } 100.000 - \text{Log}(100.000 - 30.000)}{\text{Log}(1 + 0.03)}$$

$$n = \frac{5 - 4.845098}{0.012837} = 12 \text{ CUOTAS}$$

Generalmente, este resultado se interpreta en forma equivocada al relacionarlo siempre con el número de períodos. Cuando el resultado es un número entero, éste corresponde tanto al número de cuotas como al número de períodos. Para este ejercicio, podemos decir que la obligación se cancela en 12 meses o con 12 cuotas mensuales de $ 100.000. Pero, en el caso de que el resultado no sea un número entero, por ejemplo, $n = 12.70$, contrario a lo que podría pensarse, este no indica que la obligación se cancela en 12 meses y 21 días (30 días $\times$ 0.70 fracción de mes). Una interpretación preliminar es que la obligación se cancela con 13 cuotas mensuales, de las cuales 12 cuotas son de $ 100.000 y una cuota de un valor menor pagada en el mes 13 por valor de $ 70.000 ($ 100.000 $\times$ 0.70). En los ejercicios siguientes se analizarán otras soluciones posibles a este problema.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENU	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	1.000.000 PV EXE	VDT
1.000.000 PV	1.000.000 PV	SHIFT AC EXE AC	3 I % EXE	CLEAR DATA
3 i %	3 i %	1.000.000 F3	(-) 100.000 PMT EXE	1.000.000 PV
100.000 +/- PMT	(-) 100.000 PMT	3 F2	0 FV EXE	3 % IA
COMP n	COMP n EXE	(-) 100.000 F4	n SOLVE	100.000 */- PAGO
		COMP F1		N

En Excel: = NPER (Tasa; pago; VA; VF; tipo)

= NPER (3%; −100.000; 1.000.000)

Solución con la hoja de cálculo Excel

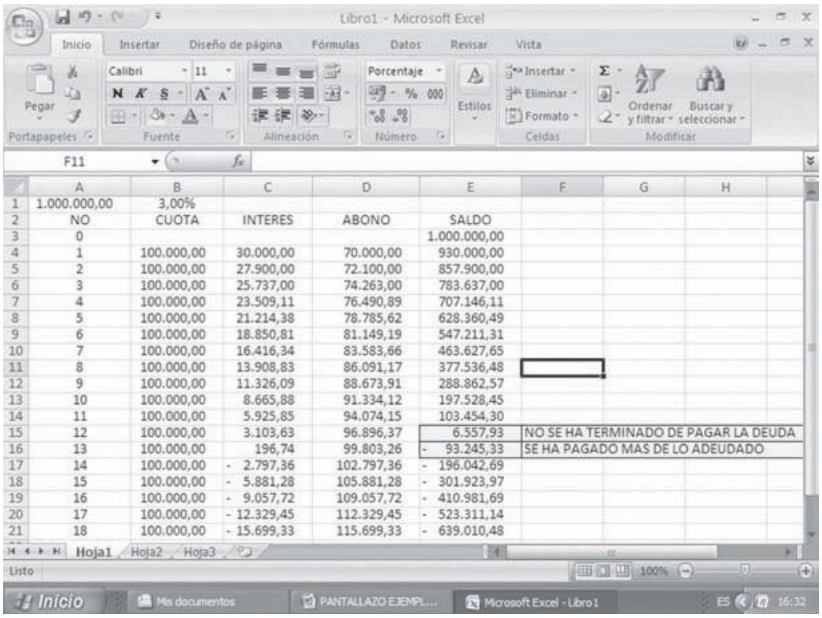
Figura 5.16

	A	B	C	D	E
1	1.000.000	3.0%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	100.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	100.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
21	18	100.000			

En la celda A1 escribimos 1.000.000, que corresponde al valor del crédito, y en B1 escribimos 3.0% como tasa de interés. Desde la celda B4 hasta la celda B21 registramos el valor de los pagos de $ 100.000. Como se trata de calcular el número de pagos mensuales de $ 100.000, podemos registrar un mayor número sin que afecte el resultado final que viene determinado por el valor del saldo final, teniendo en cuenta que para que una deuda se amortice el saldo final debe ser cero. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los valores correspondientes a los intereses, abono a capital y saldo al final del período. Rellenamos las celdas en blanco copiando las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E21. (Ver figura 5.16).

Al analizar la figura 5.17 se observa un saldo en E15 de $ 6.557.93 (positivo) y un saldo en E16 de $ 93.245.33 (negativo) lo que indica que el número de pagos está entre 12 y 13, más cerca de 12 que de 13 porque $ 6.557.93 está más cerca de cero que $ 93.245.33. Podemos concluir que el número de pagos mensuales de $ 100.000 es de 12 y fracción. Sí revisamos el resultado obtenido al hacer el cálculo matemático y con la calculadora financiera, efectivamente el resultado es igual a 12.06 que lo aproximamos a 12.

Figura 5.17

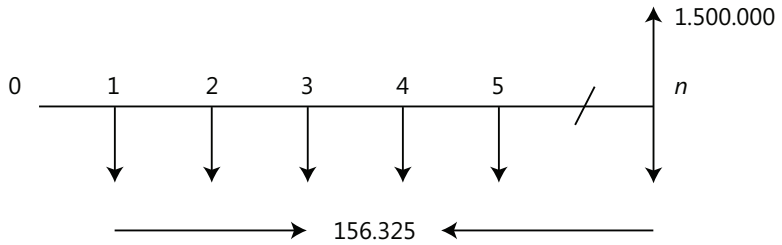


	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1.000.000,00	3,00%						
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO			
3	0				1.000.000,00			
4	1	100.000,00	30.000,00	70.000,00	930.000,00			
5	2	100.000,00	27.900,00	72.100,00	857.900,00			
6	3	100.000,00	25.737,00	74.263,00	783.637,00			
7	4	100.000,00	23.509,11	76.490,89	707.146,11			
8	5	100.000,00	21.214,38	78.785,62	628.360,49			
9	6	100.000,00	18.850,81	81.149,19	547.211,31			
10	7	100.000,00	16.416,34	83.583,66	463.627,65			
11	8	100.000,00	13.908,83	86.091,17	377.536,48			
12	9	100.000,00	11.326,09	88.673,91	288.862,57			
13	10	100.000,00	8.665,88	91.334,12	197.528,45			
14	11	100.000,00	5.925,85	94.074,15	103.454,30			
15	12	100.000,00	3.103,63	96.896,37	6.557,93	NO SE HA TERMINADO DE PAGAR LA DEUDA		
16	13	100.000,00	196,74	99.803,26	- 93.245,33	SE HA PAGADO MAS DE LO ADEUDADO		
17	14	100.000,00	- 2.797,36	102.797,36	- 196.042,69			
18	15	100.000,00	- 5.881,28	105.881,28	- 301.923,97			
19	16	100.000,00	- 9.057,72	109.057,72	- 410.981,69			
20	17	100.000,00	- 12.329,45	112.329,45	- 523.311,14			
21	18	100.000,00	- 15.699,33	115.699,33	- 639.010,48			

Observa el lector lo aproximado de este procedimiento de cálculo cuando se trata de conocer el número de cuotas que amortizan una obligación. Su importancia estriba en que por medio de la tabla de amortización se logra apreciar la evolución del crédito.

Ejemplo 5.14

¿Cuántos depósitos mensuales vencidos de $ 156.325 se deben hacer en una institución financiera que paga el 2% mensual, para tener un valor acumulado de $ 1.500.000?



$$n = \frac{\text{Log}\left(Fi + A\right) - \text{Log } A}{\text{Log}\left(1 + i\right)} \tag{5.6}$$

Si aplicamos la fórmula (5.6) para los datos del ejemplo, tenemos:

$$n = \frac{\text{Log}\left(186.325\right) - \text{Log}\left(156.325\right)}{\text{Log}\left(1.02\right)}$$

$n = 8.8654$ pagos mensuales.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENU	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	1.500.000 FV EXE	VDT
1.500.000 FV	1.500.000 FV	SHIFT AC EXE AC	2 I % EXE	CLEAR DATA
2 i %	2 i %	1.500.000 F5	(-) 156.325 PMT EXE	1.500.000 PV
156.325 +/- PMT	(-) 156.325 PMT	2 F2	0 FV EXE	2 % IA
COMP n	COMP n EXE	(-) 156.325 F4	n SOLVE	156.325 +/- PAGO
		COMP F1		N

En Excel: = NPER (Tasa; pago; VA; VF; tipo)

= NPER (2%; −156.325; 0; 1.500.000)

Puesto que en las actividades financieras se acostumbra dar soluciones prácticas, optamos por redondear el número de depósitos.

El resultado obtenido se redondea a un entero y se ajusta el valor de los depósitos (A) de la anualidad.

F = 1.500.000

i = 2% mensual

n = 9 (valor redondeado)

A = ?

$$A = F\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$A = 1.500.000\left[\frac{0.02}{(1+0.02)^9 - 1}\right]$$

A = $ 153.773.16

Se deben realizar 9 depósitos mensuales de $ 153.773.16 cada uno, para acumular $ 1.500.000.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENU	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	1.500.000 FV EXE	VDT
1.500.000 FV	1.500.000 FV	SHIFT AC EXE AC	2 I % EXE	CLEAR DATA
2 i %	2 i %	1.500.000 F5	9 n EXE	1.500.000 FV
9 n	9 n	2 F2	0 FV EXE	2 % IA
COMP PMT	COMP PMT EXE	9 F1	PMT SOLVE	9 N
		COMP F4		PAGO

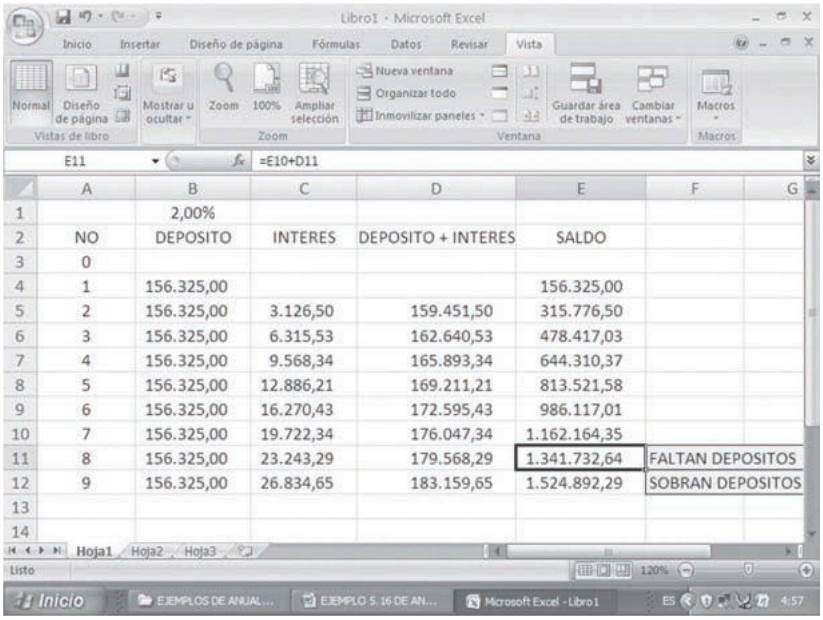
En Excel: = PAGO (tasa; nper; VA; VF; tipo)

= PAGO (2%; 9; 0; 1.500.000)

Solución con la hoja de cálculo Excel

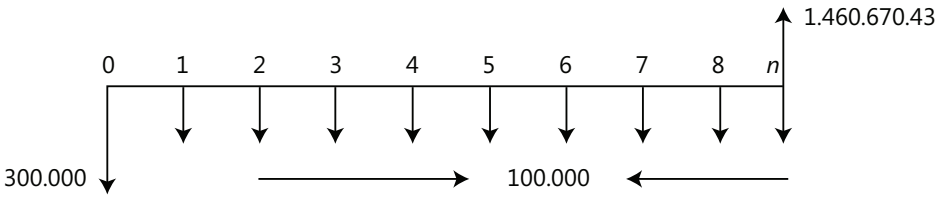
	A	B	C	D	E
1	1.000.000	2.0%			
2	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO+ INTERÉS	SALDO
3	0				
4	1	156.325			=B4
5	2	156.325	=E4*$B$1	=B5+C5	=E4+D5
.....	.....	.....	.....	.....	.....
12	9	156.325			

En las celdas B4 hasta B12 (aunque pueden ser más períodos) registramos los depósitos de 156.325. En las celdas C5, D5 y E5 calculamos los intereses, depósito más interés y saldo al final del período. Rellenamos las celdas en blanco copiando las fórmulas de las celdas C5, D5 y E5 en el rango C6:E12. Al analizar la figura 5.19 se observa un saldo en E11 de $ 1.341.732.64 y un saldo en E12 de $ 1.524.892.29 lo que indica que el número de depósitos está entre 8 y 9 para alcanzar un saldo final de $ 1.500.000, más cerca de 9 que de 8 porque $ 1.524.892.29 está más cerca de $ 1.500.000 que $ 1.341.732.64. Podemos concluir que el número de depósitos está cercano a 9. Sí revisamos el resultado obtenido al hacer el cálculo matemático y con la calculadora financiera, efectivamente el resultado es igual a 8.86.



Ejemplo 5.15

Adriana inicia una cuenta en un banco con $ 300.000 y al mes comienza a hacer depósitos de $ 100.000 cada mes vencido. ¿Qué tiempo debe esperar para tener acumulados $ 1.460.670.43, si le pagan una tasa de interés del 2% mensual?



Con fecha focal en el mes *n* se plantea la ecuación de valor.

$$300.000\left(1+0.02\right)^{n}+100.000\left[\frac{\left(1.02\right)^{n}-1}{0.02}\right]=1.460.670.43$$

Desarrollando la ecuación para encontrar el valor de *n*, se tiene:

$$300.000\left(1.02\right)^{n}+\frac{100.000\left(1.02\right)^{n}-100.000}{0.02}=1.460.670.43$$

$$6.000(1.02)^{n}+100.000(1.02)^{n}-100.000=29.213.41$$

$$106.000(1.02)^{n}=129.213.43$$

$$(1.02)^{n}=1.2190$$

Resolvemos la ecuación exponencial aplicando logaritmos.

$$n\ \text{Log}\ 1.02=\text{Log}\ 1.2190$$

$$n=\frac{\text{Log}\ 1.2190}{\text{Log}\ 1.02}=\frac{0.0860}{0.0086}$$

$$n=10$$

Adriana debe esperar 10 meses para tener acumulados en su cuenta un valor de $1.460.670.43.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENU	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	(-) 300.000 PV EXE	VDT
300.000 +/- PV	(-) 300.000 PV	SHIFT AC EXE AC	2 I % EXE	CLEAR DATA
2 i %	2 i %	(-) 300.000 F3	(-) 100.000 PMT EXE	300.000 +/- PV
100.000 +/- PMT	(-) 100.000 PMT	2 F2	1.460.670.43 FV EXE	2 % IA
1.460.670.43 FV	1.460.670.43 FV	(-) 100.000 F4	n SOLVE	100.000 +/- PAGO
COMP n	COMP n EXE	1.460.670.43 F5		1.460.670.43 FV
		COMP F1		N

En Excel: = NPER (Tasa; pago; VA; VF; tipo)

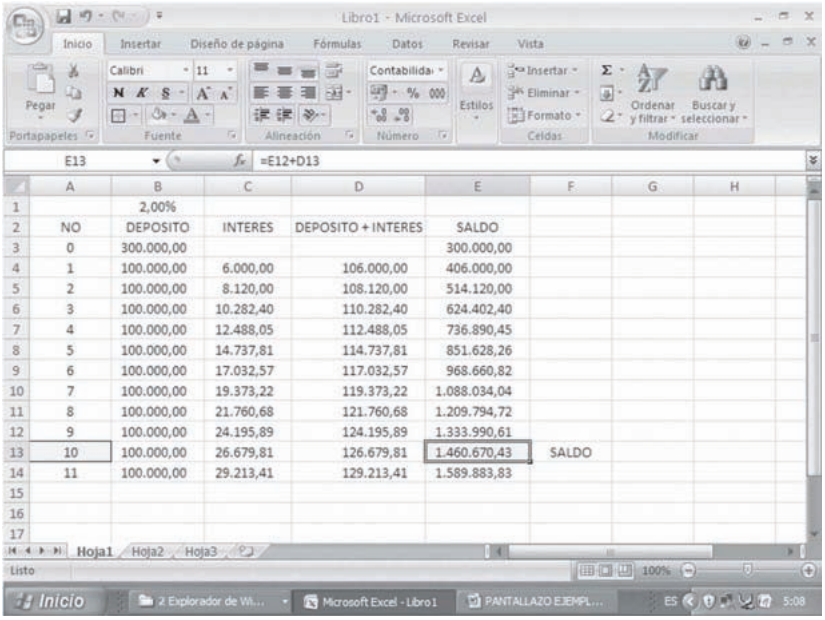
= NPER (2%; −100.000; −300.000; 1.460.670,43)

Solución con la hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1		2.0%			
2	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO+ INTERÉS	SALDO
3	0	300.000			=B3
4	1	100.000	=E3*$B$1	=B4+C4	=E3+D4
5	2	100.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
14	11	100.000			

En la celda B1 escribimos la tasa de interés del 2.00%. En la celda B3 escribimos 300.000 como valor del depósito inicial y copiamos la celda B3 en la celda E3 para indicar que el saldo al final del momento cero es igual al depósito inicial. En las celdas B4 hasta B14 (aunque pueden ser más períodos) registramos los depósitos de 100.000 En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, depósito más interés y saldo al final del período. Rellenamos las celdas en blanco copiando las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E14. Al analizar la figura 5.20 se observa un saldo en E13 de $ 1.460.670.43, lo que indica que el número de depósitos es igual a 10.

Figura 5.20



Ejemplo 5.16

(Un ejercicio similar a éste fue presentado por Héctor Vidaurri, en su texto Matemáticas Financieras). El señor García vendió una propiedad por $ 50.000.000. Piensa depositar este dinero en un banco que le paga el 2.5% mensual, e ir retirando $ 1.000.000 mensuales con el fin de vivir un tiempo sin trabajar, hasta que el dinero se agote. ¿Cuántos retiros podrá hacer?

El flujo de caja de este ejercicio corresponde a una anualidad vencida con los siguientes datos:

$P = \$\ 50.000.000$

$i = 2.5\%$ mensual

$A = 1.000.000$

$n = ?$

$$n = \frac{\text{Log } A - \text{Log}(A - Pi)}{\text{Log}(1 + i)}$$

$$n = \frac{\text{Log}(1.000.000) - \text{Log}(1.000.000 - 50.000.000 \times 0.025)}{\text{Log}(1.025)}$$

$$n = \frac{6 - \text{Log}(-250.000)}{\text{Log}(1.025)}$$

Al intentar obtener Log de -250.000, la calculadora marca error. El lector recordará que el logaritmo de un número negativo no existe, en consecuencia, el ejercicio no tiene solución.

¿Por qué no tiene solución el ejercicio? Los intereses que causan $ 50.000.000 a una tasa de interés del 2.5% mensual tienen un valor de:

$$I = P \times i = \$\ 50.000.000 \times 0.025 = \$\ 1.250.000$$

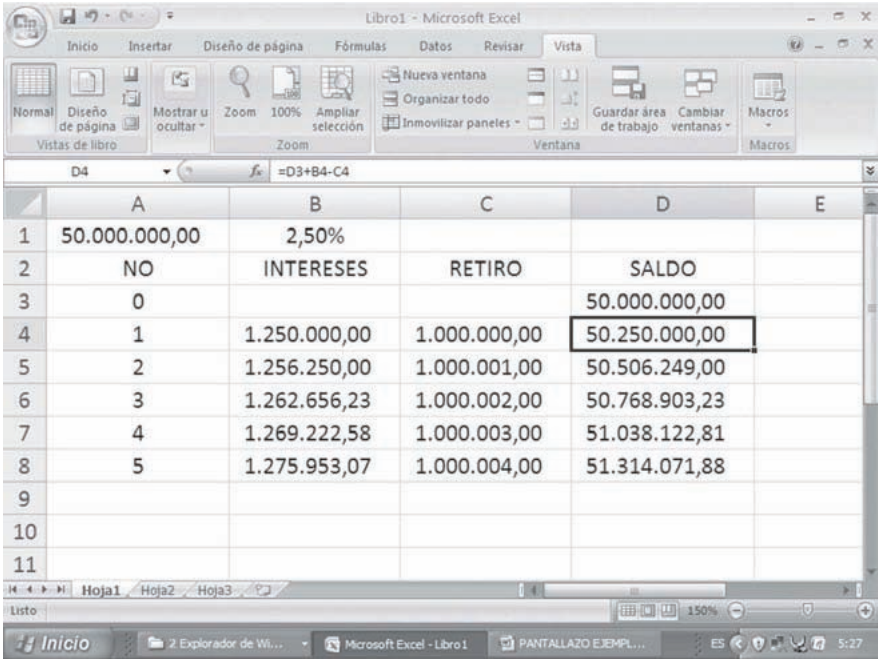
Al retirar $ 1.000.000 después de un mes, se está retirando una cantidad menor que el interés generado por el capital inicial. El capital nunca se agotará sino que, al contrario, irá creciendo, como lo aprecia el lector en la siguiente tabla.

Solución con la hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D
1	50.000.000	2.50%		
2	NO	INTERÉS	RETIRO	SALDO
3	0			=A1
4	1	=D3*$B$1	1.000.000	=D3+B4−C4
.....	.....	.....	.....	.....
8	5			

En la celda A1 registramos el valor de venta de la propiedad y en la B1 escribimos la tasa de interés del 2.50%. En la celda B4 calculamos los intereses y en la C4 registramos el valor del retiro mensual. En la celda D4 le sumamos al saldo anterior (D3) el valor de los intereses del primer mes (B4) y restamos el valor del retiro (C4). Se observa que el saldo al final del primer mes es mayor que el valor depositado (A1). Al rellenar las celdas en blanco, copiando las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango B5:D8 observamos en la columna D como el saldo va aumentando. (Ver figura 5.21).

Figura 5.21



	A	B	C	D	E
1	50.000.000,00	2,50%			
2	NO	INTERESES	RETIRO	SALDO	
3	0			50.000.000,00	
4	1	1.250.000,00	1.000.000,00	50.250.000,00	
5	2	1.256.250,00	1.000.001,00	50.506.249,00	
6	3	1.262.656,23	1.000.002,00	50.768.903,23	
7	4	1.269.222,58	1.000.003,00	51.038.122,81	
8	5	1.275.953,07	1.000.004,00	51.314.071,88	
9					
10					
11					

Si el señor García retirara $1.250.000 cada mes, el capital inicial permanecería constante todo el tiempo. Si el señor García desea agotar el dinero depositado, deberá retirar más de $ 1.250.000. Por ejemplo, si retira $ 1.600.000 cada mes, el dinero se agota en aproximadamente 5 años.

Del análisis de este ejercicio surge la siguiente regla práctica: *si el costo financiero (intereses) es mayor que la cuota que se paga, el capital inicial aumenta. Si el costo financiero es igual a la cuota, el capital permanece constante. Pero, si la cuota es mayor que el costo financiero, el saldo de la obligación disminuye hasta llegar un momento en que queda en cero.*

4.7 Cálculo de la tasa de interés

Cuando se acude a los créditos comerciales para la compra de electrodomésticos, vehículos y otros activos, por medio de cuotas fijas periódicas y uniformes, generalmente no se le informa al cliente su costo, que viene a ser la tasa de interés cobrada.

Ejemplo 5.17

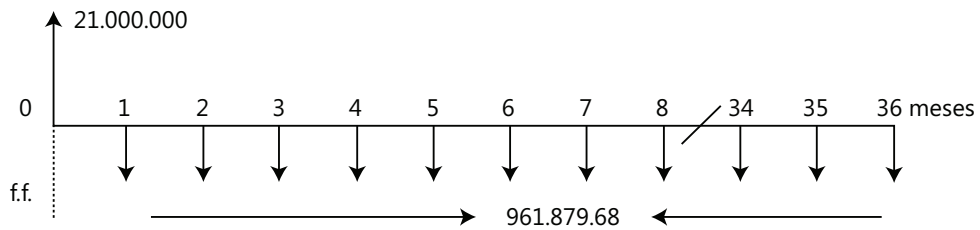
Un vehículo tiene un valor de contado de $ 30.000.000 y se va a financiar de la siguiente forma: una cuota inicial del 30% de su valor y 36 cuotas mensuales iguales por valor de $ 961.879.68. Calcular la tasa de interés cobrada.

Para calcular el costo del crédito es necesario determinar, en primer lugar, el valor exacto de la deuda, que resulta de descontarle al valor del vehículo la cuota inicial.

Cuota inicial $= \$\ 30.000.000 \times 0.30 = \$\ 9.000.000$

Valor de la deuda $= \$\ 30.000.000 - \$\ 9.000.000 = \$\ 21.000.000$

El flujo de caja es el siguiente:



La ecuación de valor se plantea con fecha focal en el momento cero.

$$21.000.000 = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$21.000.000 = 961.879.68\left[\frac{(1+i)^{36} - 1}{i(1+i)^{36}}\right]$$

Ordenando la ecuación:

$$21.000.000 - 961.879.68\left[\frac{(1+i)^{36} - 1}{i(1+i)^{36}}\right] = 0$$

La tasa de interés cobrada en la financiación del vehículo es la tasa de interés que hace la función igual a cero. Le damos valores a la tasa de interés al azar hasta encontrar una tasa de interés que haga la función mayor que cero, y otra que haga la función menor que cero, y se procede a hacer la interpolación lineal.

Se escoge una tasa del 3.5% al azar y se reemplaza en la ecuación de valor.

$$21.000.000 - 961.879.68\left[\frac{(1.035)^{36} - 1}{0.035(1+0.035)^{36}}\right] = 0$$

$$21.000.000 - 19.517.378.92 = 0$$

$$1.482.621.08 \quad 0$$

Elegimos ahora una tasa del 2.8%.

$$21.000.000 - 961.879.68\left[\frac{(1.028)^{36}-1}{0.028(1.028)^{36}}\right] = 0$$

$$21.000.000 - 21.640.942.10 = 0$$

$$-640.942.10 \quad 0$$

Ya se conocen las dos tasas de interés: una que hace la función mayor que cero (3.5%) y la otra que hace la función menor que cero (2.8%). Podemos concluir que la tasa que hace la función igual a cero está entre 3.5% y 2.8% y que está más cerca de 2.8% que de 3.5%.

Reducimos el margen de las tasas de interés para lograr que con una sola interpolación encontremos la tasa que hace la función igual a cero. Utilizando el mismo procedimiento, se encuentra para otras tasas de interés el valor de la función:

3.5% ⟶ 1.482.621.08
3.1% ⟶ 309.875.04
2.9% ⟶ −316.875.62
2.8% ⟶ 640.942.10

Se procede a hacer la interpolación con la tasa de interés del 3.1% y 2.9%.

Si 3.1% hace la función igual a 309.875.04.

¿Qué tasa hace la función igual a 0?

Si 2.9% hace la función igual a −316.875.62.

Desarrollando la ecuación se obtiene un valor del 3% mensual. Verificamos si esta es la tasa que hace la función igual a cero.

$$21.000.000 - 961.879.68\left[\frac{(1.03)^{36}-1}{0.03(1.03)^{36}}\right] = 0$$

$$21.000.000 - 21.000.000 = 0$$

Para calcular la tasa de interés de una anualidad vencida, utilizando la calculadora financiera se usan indistintamente el menú del interés compuesto o el menú F. CAJA.

Utilizando el menú del interés compuesto.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENU	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	21.000.000 PV EXE	VDT
21.000.000 PV	21.000.000 PV	SHIFT AC EXE AC	(-) 961.879.68 PMT EXE	CLEAR DATA
961.879.68 +/- PMT	(-)961.879.68 PMT	21.000.000 F3	36 n EXE	21.000.000 PV
36 n	36 n	(-)961.879.68 F4	0 FV EXE	961.879.68 +/- PAGO
COMP I %	COMP I % EXE	36 F1	I % SOLVE	36 N
		COMP F2		% IA

En Excel: = TASA (nper; pago; VA; VF; tipo)

= TASA (36; −961879,68; 21.000.000; 0)

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

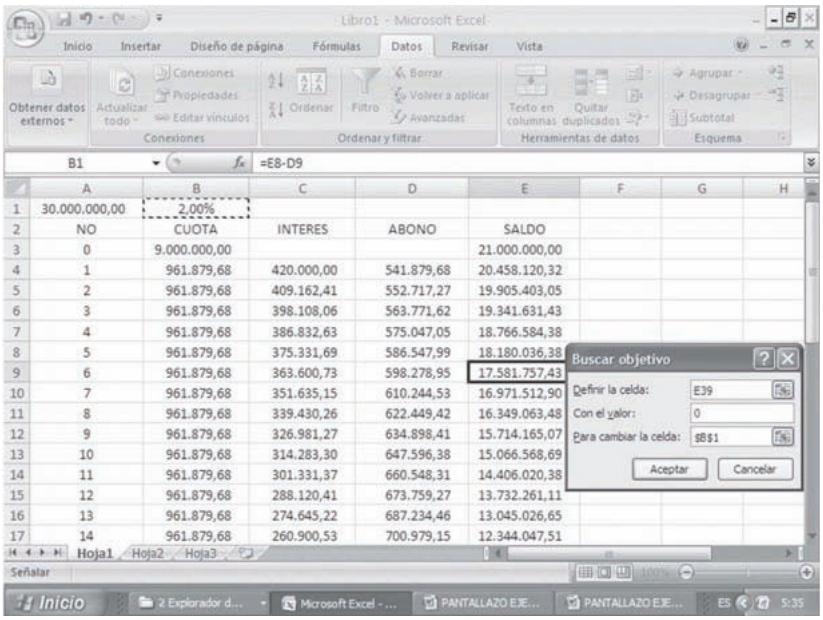
Figura 5.22

	A	B	C	D	E
1	30.000.000	2.0%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	=0.30*A1			=A1−B3
4	1	961.879.68	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
39	36				

En la celda A1 escribimos 30.000.000, que corresponde al valor del vehículo. En la celda B1 escribimos una tasa de interés arbitraria del 2.0% por ejemplo, que es la incógnita del ejercicio. En la celda B3 calculamos el valor de la cuota inicial y en la E3 escribimos =A1−B3 para indicar que el saldo en el momento cero es igual al valor del vehículo menos la cuota inicial. En las celdas B4 hasta B39 registramos las cuotas de $ 961.879.68. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, el abono a capital y el saldo al final del período. (Ver figura 5.22).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E39 y aplicando *Buscar objetivo* encontramos en la celda B1 un valor del 3.0%. (Ver figura 5.23).

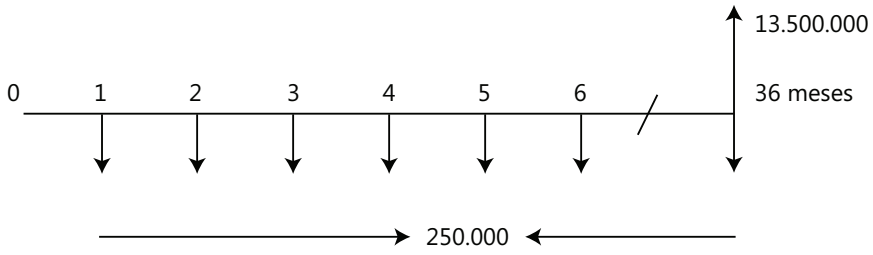
Figura 5.23



Ejemplo 5.18

Un empleado deposita en una entidad bancaria al final de cada mes, cuando recibe el pago de su salario, la suma de $ 250.000. Al cabo de 3 años tiene un saldo disponible de $ 13.500.000. ¿Qué tasa nominal capitalizable mensualmente ha ganado?

El flujo de caja es el siguiente:



Con fecha focal en el mes 36 se plantea la ecuación de valor.

$$13.500.000 = 250.000\left[\frac{(1+i)^{36}-1}{i}\right]$$

Resolviendo por interpolación lineal se encuentra un valor de $i = 2.20\%$ mensual.

Conocida la tasa efectiva mensual se aplica la ecuación de la tasa nominal.

$$J = i \times n$$

$$J = 0.022 \times 12 = 26.40\% \text{ mes vencido}$$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENU	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	13.500.000 FV EXE	VDT
13.500.000 FV	13.500.000 FV	SHIFT AC EXE AC	(-) 250.000 PMT EXE	CLEAR DATA
250.000 +/- PMT	(-) 250.000 PMT	13.500.000 F5	36 n EXE	13.500.000 FV
36 n	36 n	(-)250.000 F4	0 PV EXE	250.000 +/- PAGO
COMP I %	COMP I % EXE	36 F1	I % SOLVE	36 N
2.20 % X 12	2.20 % X 12	COMP F2	2.20 % X 12	% IA
		2.20 % X 12		2.20 % X 12

En Excel: = n*TASA (nper; pago; VA; VF; tipo)

= 12*TASA (36; −250000; 0; 13.500.000)

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

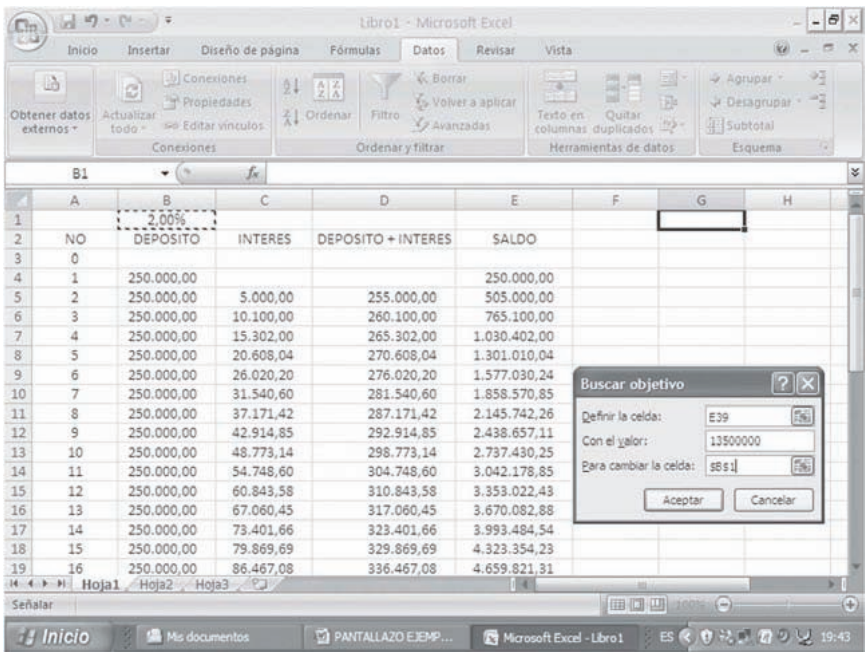
Figura 5.24

	A	B	C	D	E
1		2.00%			
2	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO+ INTERÉS	SALDO
3	0				
4	1	250.000			=B4
5	2	250.000	=E4*$B$1	=B5+C5	=E4+D5
.....	.....	.....	.....	.....	.....
39	36	250.000			

En la celda B1 escribimos una tasa de interés arbitraria del 2.00%. Desde la celda B4 hasta la celda B39 anotamos los depósitos de $ 250.000. En las celdas C5, D5 y E5 calculamos intereses, depósito más interés y saldo al final del período. (Ver figura 5.24).

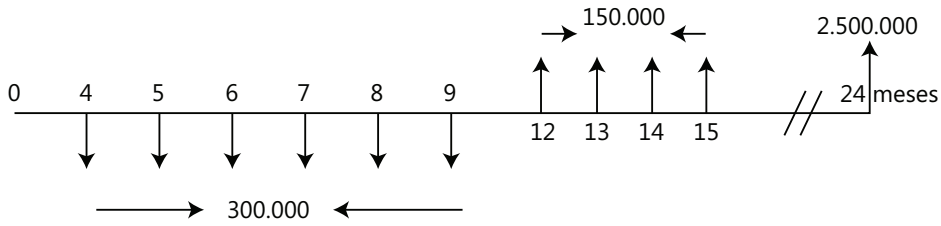
Copiamos las fórmulas de las celdas C5, D5 y E5 en el rango C5:E39 y aplicando *Buscar objetivo* encontramos en la celda B1 un valor del 2.20%. (Ver figura 5.25).

Figura 5.25



Ejemplo 5.19

Un cliente del Banco Ganadero realiza 6 depósitos mensuales de $ 300.000, empezando en el mes 4. Posteriormente hace 4 retiros de $ 150.000 mensuales empezando en el mes 12. Si dispone en su cuenta de $ 2.500.000 después de 2 años, ¿qué tasa de interés le reconocieron?



Se plantea una ecuación de valor con fecha focal en el mes 24.

$$300.000\left[\frac{(1+i)^6-1}{i}\right](1+i)^{15}=150.000\left[\frac{(1+i)^4-1}{i}\right](1+i)^9+2.500.000$$

Resolviendo por interpolación lineal se obtiene una tasa de interés de 3.65% mensual.

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

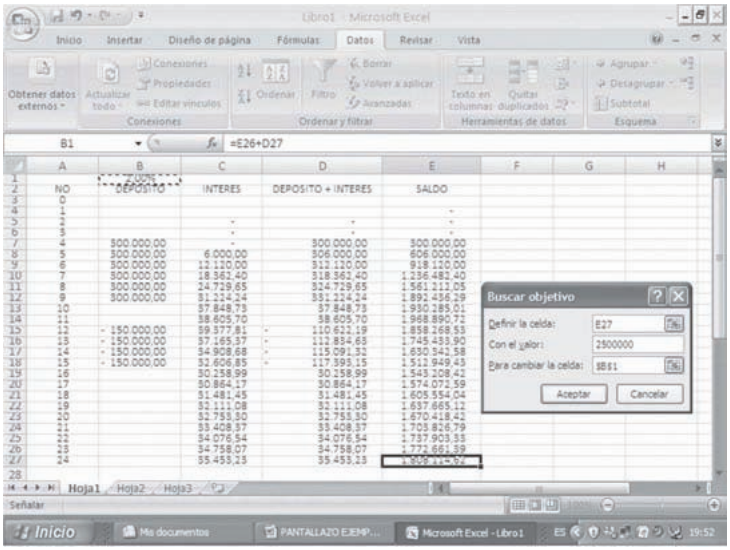
Figura 5.26

	A	B	C	D	E
1		2.00%			
2	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO+INTERÉS	SALDO
3	0				
.....	.....	.....	.....	.....	
7	4	300.000			=B7
8	5	300.000	=E7*$B$1	=B8+C8	=E7+D8
.....	.....	.....	.....	.....	.....
12	9	300.000			
13	10				
.....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12	−150.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
18	15	−150.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
27	24				SALDO FINAL

En la celda B1 escribimos una tasa de interés arbitraria del 2.00%. Desde la celda B7 hasta la celda B12 anotamos los depósitos de $ 300.000 (con signo positivo). Desde la celda B15 hasta la celda B18 registramos los retiros de $ 150.000 (con signo negativo). En las celdas C8, D8 y E8 calculamos intereses, depósito más interés y saldo al final del período. (Ver figura 5.26).

Copiamos las fórmulas de las celdas C8, D8 y E8 en el rango C9:E27 y aplicando *Buscar objetivo* encontramos en la celda B1 un valor del 3.65%. (Ver figura 5.27).

Figura 5.27



5. Anualidad con interés global

Las personas que prestan dinero al interés y las casas comerciales que financian electrodomésticos diseñan, en forma permanente, sistemas de amortización de créditos que en últimas persiguen crear sobrecostos invisibles en las negociaciones que realizan con sus clientes, al plantearles una tasa de interés y cobrarles en realidad una tasa mayor. Es el caso del sistema de amortización de créditos con *interés global*, que supone el pago de cuotas periódicas iguales, pero en el que los intereses se calculan sobre el capital prestado inicialmente, desconociendo el abono que se le hace a la deuda cada período. El valor de la cuota periódica (A) tiene dos componentes: el abono al capital y el pago de intereses, pero en este caso los intereses no disminuyen al ir bajando el saldo insoluto por efecto del abono periódico, sino que permanecen constantes todos los períodos, lo que conlleva al cobro de una tasa de interés mayor. El siguiente ejercicio muestra la forma de cálculo de la cuota (A) y como cada período, a pesar de darse el abono al capital, los intereses no disminuyen.

Ejemplo 5.20

Al comprar una lavadora queda debiendo $ 5.000.000 que se los financian a una tasa de interés del 4% mensual por medio de 4 pagos mensuales iguales. Se desea calcular el valor de cada pago con interés global.

La cuota mensual, con interés global, resulta de sumarle a la deuda inicial el valor de los 4 meses de intereses, a interés simple, y este valor total dividirlo por el número de cuotas.

$$\text{Valor de los intereses de 4 meses} = 4 \times \$\ 200.000 = \$\ 800.000$$

$$\text{Valor de la cuota} \qquad (\text{A}) = \frac{5.000.000 + 800.000}{4}$$

$$\text{A} = \$\ 1.450.000$$

Con el mismo razonamiento se logra una expresión para el cálculo de A en una forma directa.

$$\text{A} = \frac{n(\text{P} \times i) + \text{P}}{n} \qquad \text{A} = \frac{\text{P}}{n} + \text{P}i \tag{5.7}$$

Donde: A = valor de cuota; n = número de pagos; P = valor de la obligación; i = tasa efectiva

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

Este sistema de pagos tiene la característica que no obstante el abono a capital que se hace cada vez que se paga la cuota, los intereses se siguen calculando sobre el capital inicial, de tal forma que su valor para cada período es igual.

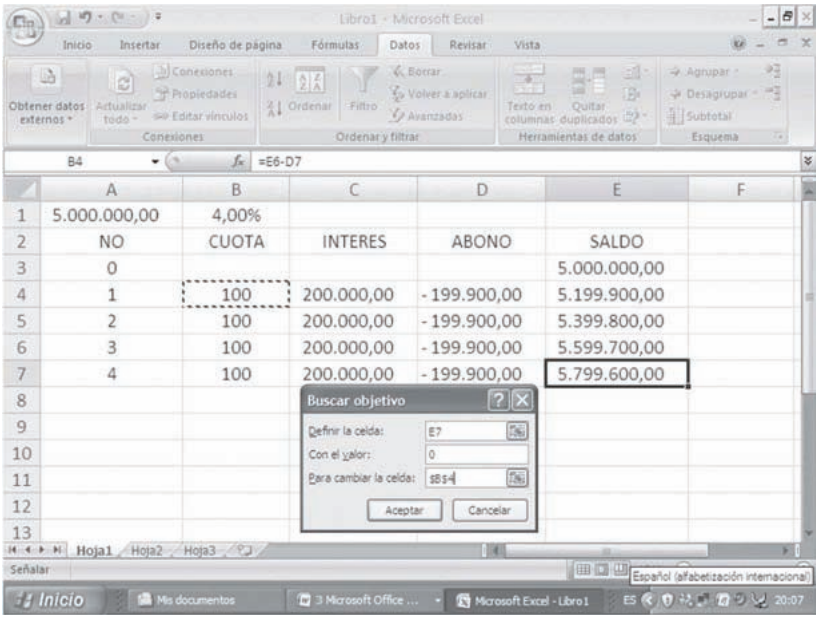
Figura 5.28

	A	B	C	D	E
1	5.000.000	4.0%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	100.00	=$A$1*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4			
6	3	=B5			
7	4	=B6			

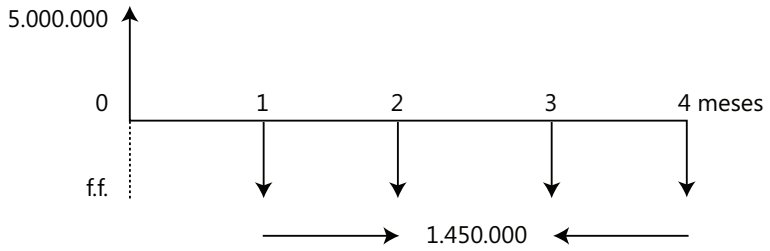
En la celda A1 escribimos 5.000.000, que corresponde al valor de la lavadora y en la B1 la tasa de interés del 4,00%. En la celda B4 escribimos un valor arbitrario de 100, que es la incógnita del ejercicio y en la celda B5 escribimos =B4 para indicar que la segunda cuota es igual a la primera, y copiamos B5 hasta B7. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, el abono a capital y el saldo al final del período. Se observa en el cálculo de los intereses que tanto la tasa de interés como el valor que los genera se escriben con referencias absolutas para que el valor de los intereses sea constante. (Ver figura 5.28).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E7 y aplicando *Buscar objetivo* encontramos en la celda B4 un valor de $ 1.450.000 (Ver figura 5.29).

Figura 5.29



Al pagar la primera cuota de $ 1.450.000 (y cuotas subsecuentes), la deuda se reduce en $ 1.250.000, pero el deudor sigue pagando los mismos intereses por valor de $ 200.000, lo que hace que la tasa de interés del crédito aumente cada mes. Por definición, el interés es el arriendo que se paga por el uso del dinero tomado en préstamo. Si se hacen abonos al capital, la tasa de interés del crédito se debe aplicar sobre el saldo insoluto. En el cuadro de amortización del crédito se observa que se desconoce el abono al capital cada vez que se cancela la cuota, y los intereses siempre se calculan sobre el capital inicial. Solamente en el pago de la primera cuota se paga la tasa de interés pactada en el crédito.



Calculemos la tasa de interés con intereses sobre saldos.

$$5.000.000 = 1.450.000\left[\frac{(1+i)^4 - 1}{i(1+i)^4}\right]$$

$$5.000.000 - 1.450.000\left[\frac{(1+i)^4 - 1}{i(1+i)^4}\right] = 0$$

La tasa de interés que hace la función igual a cero es 6.21% mensual, que es la tasa del crédito.

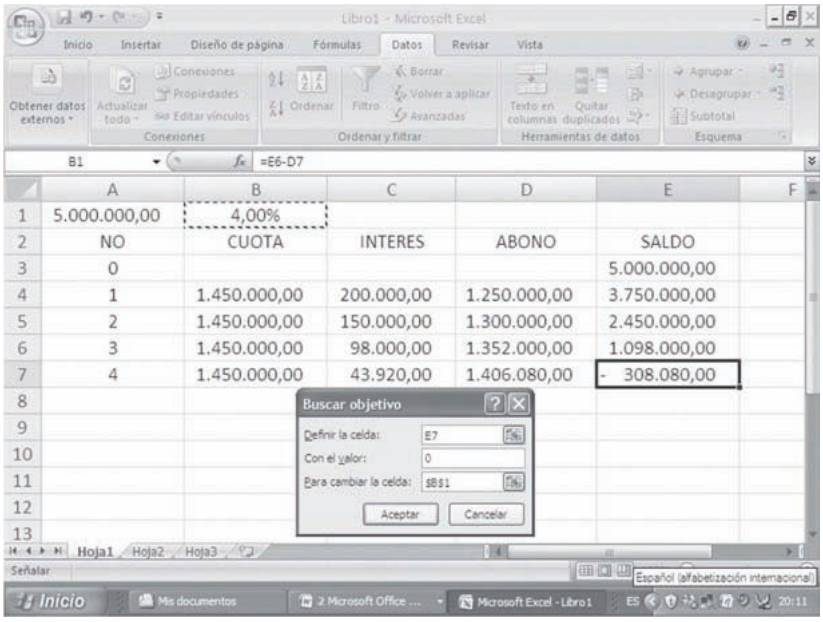
Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENU	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	5.000.000 PV EXE	VDT
5.000.000 PV	5.000.000 PV	SHIFT AC EXE AC	(-) 1.450.000 PMT EXE	CLEAR DATA
1.450.000 +/- PMT	(-) 1.450.000 PMT	5.000.000 F3	4 n EXE	5.000.000 PV
4 n	4 n	(-)1.450.000 F4	0 FV EXE	1.450.000 +/- PAGO
COMP I %	COMP I % EXE	4 F1	I % SOLVE	4 N
		COMP F2		% IA

En Excel: = TASA (nper; pago; VA; VF; tipo)
= TASA (4; −1.450.000; 5.000.000; 0)

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

Conocidos el valor de la lavadora (A1), la tasa de interés (B1) y el valor de las cuotas mensuales, podemos calcular la verdadera tasa de interés cobrada sobre saldos, utilizando *Buscar objetivo* de Excel. (Ver figura 5.30).

Figura 5.30



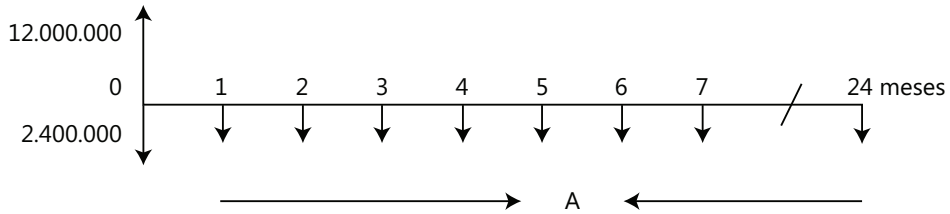
	A	B	C	D	E
1	5.000.000,00	4,00%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				5.000.000,00
4	1	1.450.000,00	200.000,00	1.250.000,00	3.750.000,00
5	2	1.450.000,00	150.000,00	1.300.000,00	2.450.000,00
6	3	1.450.000,00	98.000,00	1.352.000,00	1.098.000,00
7	4	1.450.000,00	43.920,00	1.406.080,00	- 308.080,00

Ejemplo 5.21

Una lavadora que tiene un valor de $ 12.000.000, se financia a una tasa de interés del 2.5% mensual por medio de una cuota inicial del 20% y 24 pagos mensuales vencidos. Calcular el valor de los pagos:

1. Con interés global
2. Con intereses sobre saldos
3. Explicar la diferencia de resultados.

Se construye el flujo de caja.



El valor a financiar es de $ 9.600.000 que corresponde a la diferencia entre $ 12.000.000 menos el valor de la cuota inicial de $ 2.400.000.

1. *Con interés global.* La cuota (A) es igual a la cuota de amortización a capital más los intereses sobre el capital inicial.

$$A = \frac{P}{n} + Pi$$

$$A = \frac{9.600.000}{24} + 9.600.000 \times 0.025$$

$$A = \$\ 640.000$$

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

Figura 5.31

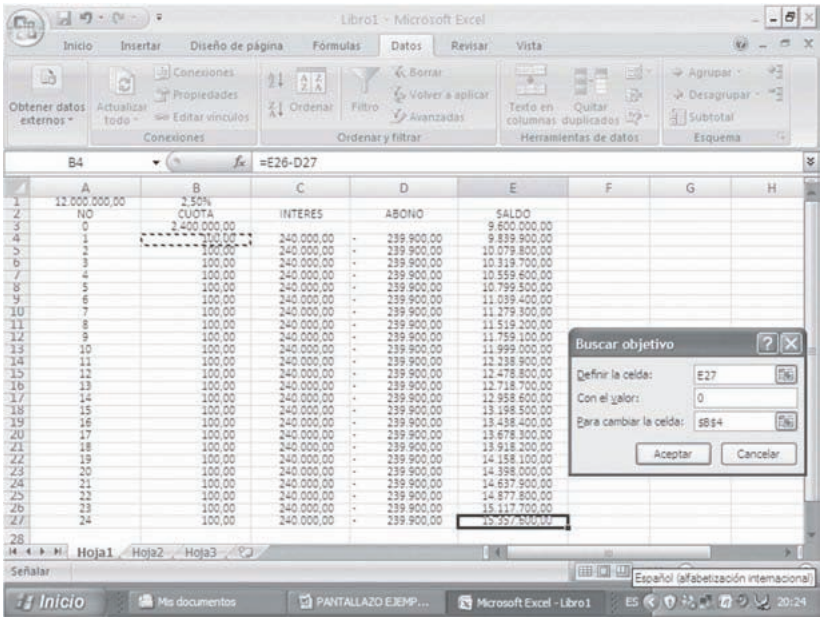
	A	B	C	D	E
1	12.000.000	2.50%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	=0.20*A1			=A1−B3
4	1	100.00	=$E$3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
27	24				

En la celda A1 escribimos 12.000.000, que corresponde al valor de la lavadora y en la B1 la tasa de interés del 2,50%. En la celda B3 calculamos el valor de la cuota inicial y en la E3 el valor del saldo insoluto. En la celda B4 escribimos un valor arbitrario de 100, que es la incógnita del ejercicio y en la B5 escribimos =B4 para indicar que la segunda cuota es igual a la primera, y copiamos B5 hasta B24. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, el abono a capital y el saldo al final del período. Se observa en el cálculo

de los intereses que tanto la tasa de interés como el valor que los genera se escriben con referencias absolutas para que el valor de los intereses sea constante, es decir, los intereses para cada período se calculan sobre el saldo inicial (E3). (Ver figura 5.31).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E27 y aplicando *Buscar objetivo* encontramos en la celda B4 un valor de $ 640.000. (Ver figura 5.32).

Figura 5.32



2. *Con interés sobre saldos*. Esto equivale a calcular el valor de la cuota (A) de una anualidad vencida.

$$A = 9.600.000\left[\frac{0.025(1.025)^{24}}{(1.025)^{24}-1}\right]$$

$$A = \$\ 536.763.07$$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENU	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	9.600.000 PV EXE	VDT
9.600.000 PV	9.600.000 PV	SHIFT AC EXE AC	2.5 I % EXE	CLEAR DATA
2.5 I %	2.5 I %	9.600.000 F3	24 n EXE	9.600.000 PV
24 n	24 n	2.5 F2	0 FV EXE	2.5 % IA
COMP PMT	COMP PMT EXE	24 F1	PMT SOLVE	24 N
		COMP F4		PAGO

En Excel: = PAGO (tasa; nper; VA; VF; tipo)

= PAGO (2,5%; 24; 9.600.000; 0)

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

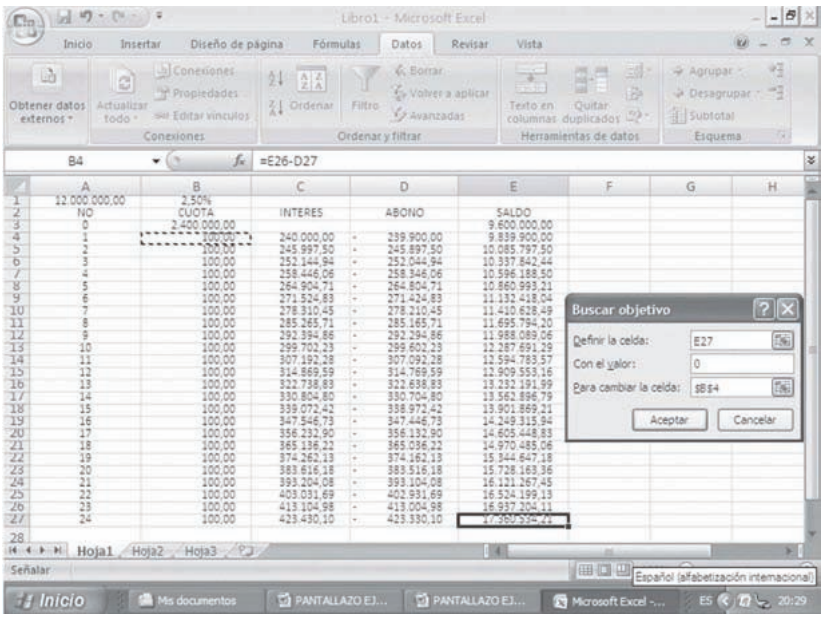
Figura 5.33

	A	B	C	D	E
1	12.000.000	2.50%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	=0.20*A1			=A1−B3
4	1	100.00	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
27	24				

En la celda A1 escribimos 12.000.000, que corresponde al valor de la lavadora y en la B1 la tasa de interés del 2,50%. En la celda B3 calculamos el valor de la cuota inicial y en la E3 calculamos el saldo insoluto. En la celda B4 escribimos un valor arbitrario de 100, que es la incógnita del ejercicio y en la B5 escribimos =B4 para indicar que la segunda cuota es igual a la primera, y copiamos B5 hasta B24. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, el abono a capital y el saldo al final del período. Se observa en el cálculo de los intereses que sólo la tasa de interés se escribe con referencia absoluta para indicar que los intereses para los períodos subsiguientes se calcularán sobre saldos. (Ver figura 5.33).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E27 y aplicando *Buscar objetivo* encontramos en la celda B4 un valor de $ 536.763.08. (Ver figura 5.34).

Figura 5.34



Se observa la diferencia en el valor de los pagos mensuales comparando las dos modalidades de crédito. Con interés global se pagan cuotas de $ 640.000 y con intereses sobre saldos cuotas de $ 536.763.07.

3. El cálculo de la cuota con interés global ignora la amortización a capital que se produce cada vez que se hace un pago. A pesar de ir haciendo abonos al capital cada período, el deudor habrá de continuar pagando intereses sobre el capital inicial. En la anualidad con intereses sobre saldos, los intereses disminuyen en cada período, pues la tasa de interés se aplica sobre el saldo insoluto. En el capítulo primero se analizó en una forma extensa el concepto de interés y se definió como el arriendo que se paga por el uso del dinero tomado en préstamo. Esto indica que lo justo es pagar intereses sobre el dinero que se usa en un período determinado. Se llega a la conclusión que el procedimiento correcto para calcular el valor de pagos periódicos, en el proceso de amortización de una deuda, es el de intereses sobre saldos.

En adelante, si no se expresa lo contrario, todos los cálculos suponen intereses sobre saldos insolutos.

6. Cálculo del saldo insoluto

El saldo es lo que se debe de una obligación en cualquier momento dentro de su plazo. Conocer su monto, es importante para efectos de control financiero y para realizar el prepago de una deuda.

Para determinar el valor del saldo insoluto de una obligación en cualquier momento, proponemos dos procedimientos:

a. El valor del saldo insoluto es igual al valor presente de las cuotas por pagar, calculado a la tasa de interés de la obligación. Puesto que la deuda inicial es el valor presente de todos los pagos necesarios para amortizar la cantidad total a deber, entonces, en cualquier momento, la deuda residual (el saldo insoluto) es el valor presente del flujo residual de pagos.

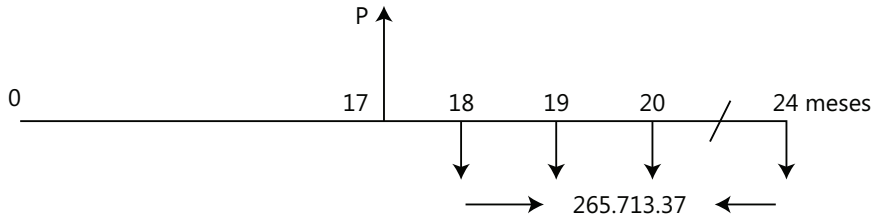
b. El saldo insoluto es igual a la diferencia entre el valor futuro de la deuda inicial, menos el valor futuro de las cuotas pagadas hasta ese momento. Consiste en calcular, cuánto se deberá si los pagos no se realizan y restarle a este valor el valor futuro de los pagos efectuados.

Podemos resumir que en el primer procedimiento, el saldo se calcula en función de las cuotas por pagar, y en el segundo procedimiento, el saldo se calcula en función de las cuotas pagadas.

Ejemplo 5.22

Un electrodoméstico que tiene un valor de contado de $ 4.500.000, se financia con 24 pagos mensuales de $ 265.713.37, cobrando una tasa de interés de financiación del 3% mensual. Calcular el saldo de la deuda después de cancelada la cuota 17.

Primer procedimiento. Construimos el flujo de caja después de pagada la cuota 17.



El saldo de la deuda es igual al valor presente de una anualidad vencida conformada por 7 pagos mensuales iguales de $ 265.713.37, a una tasa de interés del 3% mensual. Los 7 pagos corresponden al número de cuotas que faltan por pagar.

$$S17 = P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$S17 = P = 265.713.37\left[\frac{(1.03)^7 - 1}{0.03(1.03)^7}\right]$$

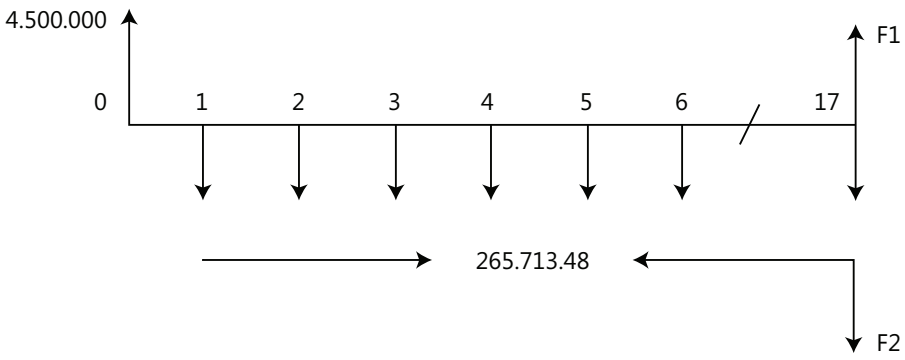
$$S17 = P = \$\ 1.655.469.53$$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENU	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	(-) 265.713.37 PMT EXE	VDT
265.713.37 +/- PMT	(-)265.713.37 PMT	SHIFT AC EXE AC	3 I % EXE	CLEAR DATA
3 i %	3 i %	(-) 265.713.37 F4	7 n EXE	265.713.37 +/- PAGO
7 n	7 n	3 F2	0 FV EXE	3 % IA
COMP PV	COMP PV EXE	7 F1	PV SOLVE	7 N
		COMP F3		VA

En Excel: = VA (tasa; nper; pago; VF; tipo)

= VA (3%; 7; −265713,37; 0)

Segundo procedimiento



El saldo de la deuda es igual a F1 menos F2, que corresponde al valor futuro de la deuda original (F1) menos el valor futuro de las cuotas pagadas (F2).

$$S17 = P(1+i)^{n} - A\left[\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}\right]$$

$$S17 = 4.500.000(1.03)^{17} - 265.713.48\left[\frac{(1.03)^{17} - 1}{0.03}\right]$$

$$S17 = \$\ 1.655.469.48$$

Este segundo procedimiento también lo ejecuta la calculadora financiera.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENU	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	(-) 265.713.37 PMT EXE	VDT
265.713.37 +/- PMT	(-)265.713.37 PMT	SHIFT AC EXE AC	3 I % EXE	CLEAR DATA
3 i %	3 i %	(-) 265.713.37 F4	17 n EXE	265.713.37 +/- PAGO
17 n	17 n	3 F2	4.500.000 PV EXE	3 % IA
4.500.000 PV	4.500.000 PV	17 F1	FV SOLVE	17 N
COMP FV	COMP FV EXE	4.500.000 F3		4.500.000 VA
		COMP F5		VF

En Excel: = VF (tasa; nper; pago; VA; tipo)

= VF (3%; 17; −265713,37; 4.500.000)

Utilizando el menú del interés compuesto, si solamente se ingresa el valor de la cuota de $ 265.713.48, la tasa de interés del 3% mensual y el número de cuotas, 17, la calculadora arroja el valor futuro equivalente a los 17 pagos = ($ 5.782.347.21). Pero al ingresar el valor inicial de la deuda de $ 4.500.000, en el mismo cálculo, como valor presente, la calculadora proyecta el valor presente a los 17 meses y el valor futuro que arroja es el valor neto, que corresponde al saldo de la deuda.

Solución con la hoja de cálculo Excel

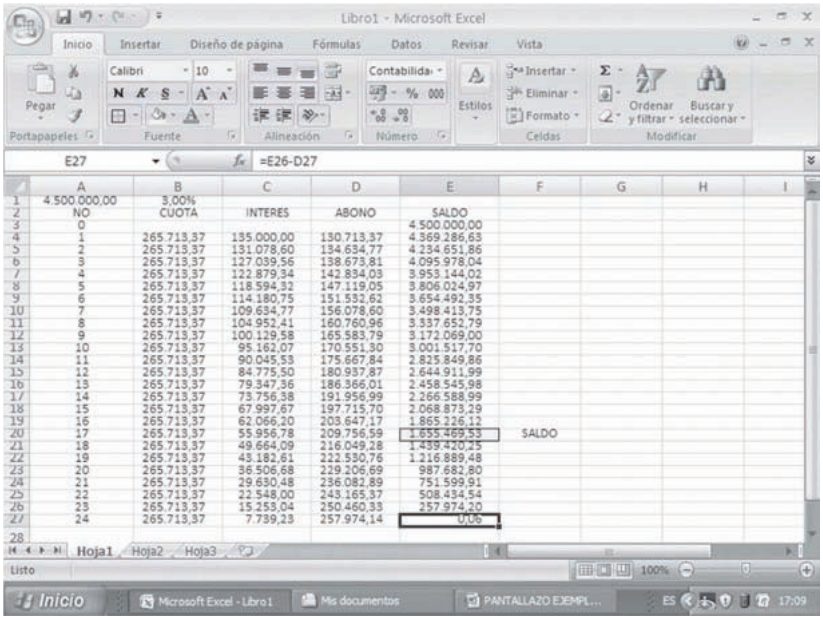
Figura 5.35

	A	B	C	D	E
1	4.500.000	3.00%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	265.713.37	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
27	24				

En la celda A1 escribimos 4.500.000, que corresponde al valor del electrodoméstico y en la B1 la tasa de interés del 3,00%. Desde la celda B4 hasta la celda B27 registramos el valor de la cuota mensual de $ 265.713.37. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, el abono a capital y el saldo al final del período. (Ver figura 5.35).

Las celdas en blanco (rango C5:E27) las rellenamos copiando las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4. Se observa un saldo de cero en la celda E27, lo que indica que la deuda fue amortizada, y en la celda E20 un saldo de $ 1.655.469.53. (Ver figura 5.36).

Figura 5.36



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	4.500.000,00	3,00%							
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO				
3	0				4.500.000,00				
4	1	265.713,37	135.000,00	130.713,37	4.369.286,63				
5	2	265.713,37	131.078,60	134.634,77	4.234.651,86				
6	3	265.713,37	127.039,56	138.673,81	4.095.978,04				
7	4	265.713,37	122.879,34	142.834,03	3.953.144,02				
8	5	265.713,37	118.594,32	147.119,05	3.806.024,97				
9	6	265.713,37	114.180,75	151.532,62	3.654.492,35				
10	7	265.713,37	109.634,77	156.078,60	3.498.413,75				
11	8	265.713,37	104.952,41	160.760,96	3.337.652,79				
12	9	265.713,37	100.129,58	165.583,79	3.172.069,00				
13	10	265.713,37	95.162,07	170.551,30	3.001.517,70				
14	11	265.713,37	90.045,53	175.667,84	2.825.849,86				
15	12	265.713,37	84.775,50	180.937,87	2.644.911,99				
16	13	265.713,37	79.347,36	186.366,01	2.458.545,98				
17	14	265.713,37	73.756,38	191.956,99	2.266.588,99				
18	15	265.713,37	67.997,67	197.715,70	2.068.873,29				
19	16	265.713,37	62.066,20	203.647,17	1.865.226,12				
20	17	265.713,37	55.956,78	209.756,59	1.655.469,53	SALDO			
21	18	265.713,37	49.664,09	216.049,28	1.439.420,25				
22	19	265.713,37	43.182,61	222.530,76	1.216.889,48				
23	20	265.713,37	36.506,68	229.206,69	987.682,80				
24	21	265.713,37	29.630,48	236.082,89	751.599,91				
25	22	265.713,37	22.548,00	243.165,37	508.434,54				
26	23	265.713,37	15.253,04	250.460,33	257.974,20				
27	24	265.713,37	7.739,23	257.974,14	0,06				
28									

Los dos procedimientos expuestos, no obstante ser equivalentes, no siempre se pueden aplicar indistintamente, debido a que existen situaciones financieras en las cuales no se conoce el número de pagos. El siguiente ejercicio aclara esta situación.

Ejemplo 5.23

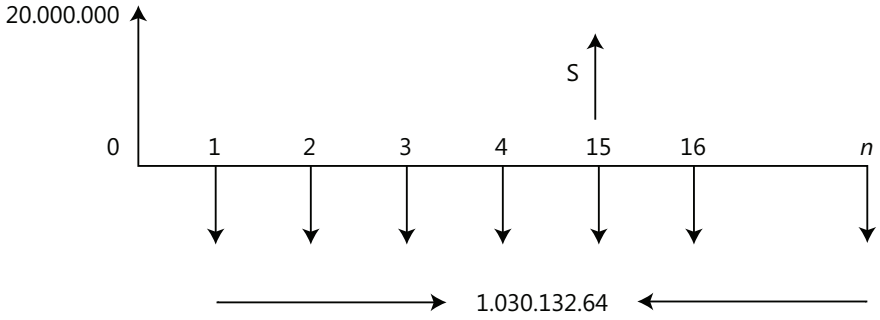
Un lote que tiene un valor de contado de $ 20.000.000 se está pagando con cuotas mensuales iguales de $ 1.030.132.64. Si la tasa de financiación que se cobra es del 3% mensual, ¿cuál es el saldo de la deuda después de pagada la cuota 15?

En este caso se desconoce el número de cuotas mensuales que se están pagando, por lo tanto, no es aplicable el primer procedimiento. Aplicando el segundo procedimiento, planteamos la ecuación de valor así:

$$S15 = P(1+i)^{n} - A\left[\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}\right]$$

$$S15 = 20.000.000(1.03)^{15} - 1.030.132.64\left[\frac{(1.03)^{15} - 1}{0.03}\right]$$

$$S15 = \$\ 12.000.000$$



Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENU	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	(-)1.030.132.64 PMT EXE	VDT
1.030.132.64 +/- PMT	(-)1.030.132.64 PMT	SHIFT AC EXE AC	3 I % EXE	CLEAR DATA
3 i %	3 i %	(-)1.030.132.64 F4	15 n EXE	1.030.132.64 +/- PAGO
15 n	15 n	3 F2	20.000.000 PV EXE	3 % IA
20.000.000 PV	20.000.000 PV	15 F1	FV SOLVE	15 N
COMP FV	COMP FV EXE	20.000.000 F3		20.000.000 VA
		COMP F5		VF

En Excel: = VF (tasa; nper; pago; VA; tipo)

= VF (3%; 15; −1030132,64; 20.000.000)

Solución con la hoja de cálculo Excel

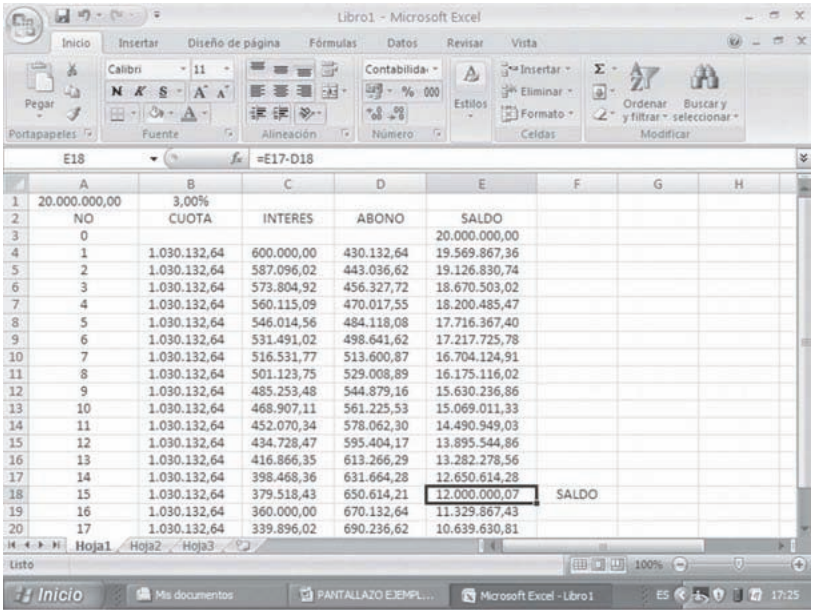
Figura 5.37

	A	B	C	D	E
1	20.000.000	3.00%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	1.030.132.64	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2				
.....	.....	.....	.....	.....	.....
20	17				

En la celda A1 escribimos 20.000.000, que corresponde al valor del lote y en la B1 la tasa de interés del 3,00%. Desde la celda B4 hasta la celda B17 (puede ser hasta la ceda B18) registramos el valor de la cuota mensual de $ 1.030.132.64. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, el abono a capital y el saldo al final del período. (Ver figura 5.37).

Las celdas en blanco (rango C5:E20) las rellenamos copiando las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4. Se observa un saldo de $ 12.000.000 en la celda E18. (Ver figura 5.38).

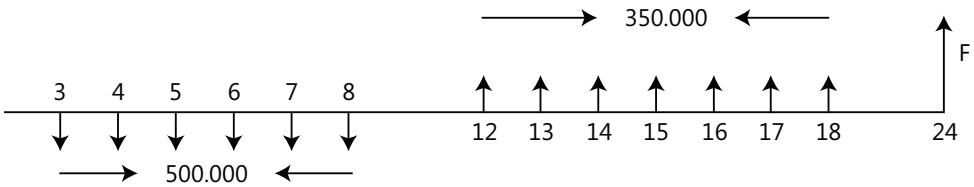
Figura 5.38



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	20.000.000,00	3,00%						
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO			
3	0				20.000.000,00			
4	1	1.030.132,64	600.000,00	430.132,64	19.569.867,36			
5	2	1.030.132,64	587.096,02	443.036,62	19.126.830,74			
6	3	1.030.132,64	573.804,92	456.327,72	18.670.503,02			
7	4	1.030.132,64	560.115,09	470.017,55	18.200.485,47			
8	5	1.030.132,64	546.014,56	484.118,08	17.716.367,40			
9	6	1.030.132,64	531.491,02	498.641,62	17.217.725,78			
10	7	1.030.132,64	516.531,77	513.600,87	16.704.124,91			
11	8	1.030.132,64	501.123,75	529.008,89	16.175.116,02			
12	9	1.030.132,64	485.253,48	544.879,16	15.630.236,86			
13	10	1.030.132,64	468.907,11	561.225,53	15.069.011,33			
14	11	1.030.132,64	452.070,34	578.062,30	14.490.949,03			
15	12	1.030.132,64	434.728,47	595.404,17	13.895.544,86			
16	13	1.030.132,64	416.866,35	613.266,29	13.282.278,56			
17	14	1.030.132,64	398.468,36	631.664,28	12.650.614,28			
18	15	1.030.132,64	379.518,43	650.614,21	12.000.000,07	SALDO		
19	16	1.030.132,64	360.000,00	670.132,64	11.329.867,43			
20	17	1.030.132,64	339.896,02	690.236,62	10.639.630,81			

Ejemplo 5.24

Se comienzan a hacer depósitos de $ 500.000 desde el mes 3 al mes 8, y retiros de $ 350.000 del mes 12 al mes 18. Si pagan un interés del 2% mensual, ¿qué saldo disponible se tendrá al final de 2 años?



El saldo disponible al final de los 2 años será igual al valor futuro acumulado en esa fecha. En este ejercicio se aprecia la importancia de conocer con precisión la fecha de ubicación del valor futuro de una anualidad vencida, calculado con la expresión (5.3). Para recordarle al lector, este se encuentra ubicado en la fecha del último pago (ingreso).

La solución más simple consiste en plantear una ecuación de valor con fecha focal en el mes 24.

$$F + 350.000\left[\frac{(1.02)^7 - 1}{0.02}\right](1.02)^6 = 500.000\left[\frac{(1.02)^6 - 1}{0.02}\right](1.02)^{16}$$

$$F + 2.930.273.69 = 4.329.862.69$$

$$F = \$\ 1.399.575.45$$

Al calcular el valor futuro de la primera anualidad, éste se ubica en el mes 8, por lo tanto, tenemos que trasladarlo al mes 24. El valor futuro de la segunda anualidad se ubica en el mes 18, el que se traslada al mes 24.

Solución con la hoja de cálculo Excel

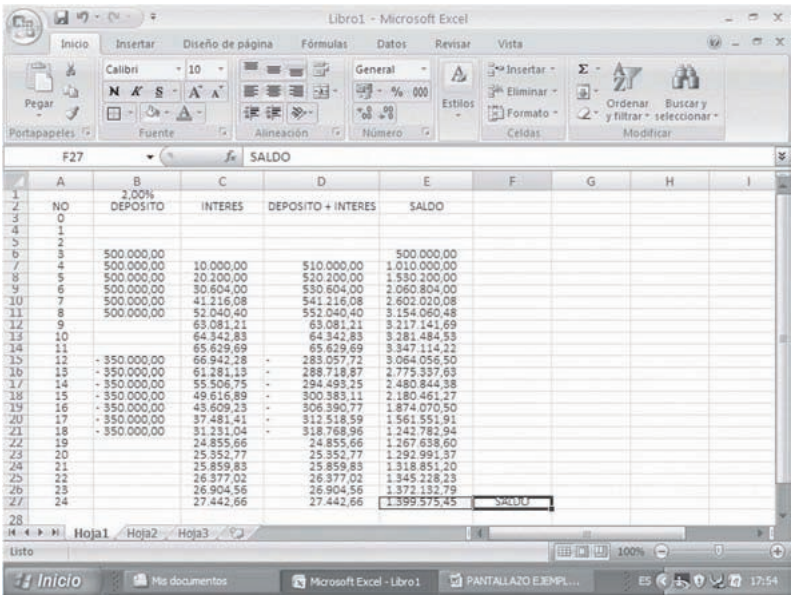
Figura 5.39

	A	B	C	D	E
1		2.00%			
2	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO+INTERÉS	SALDO
3	0				
.....	.....	.....	.....	.....	.....
6	3	500.000			=B6
7	4	500.000	=E6*$B$1	=B7+C7	=E6+D7
8	5	500.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
11	8	500.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12	- 350.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
21	18	- 350.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
27	24				SALDO

En la celda B1 escribimos la tasa de interés del 2,00%. Desde la celda B6 hasta B11 registramos el valor de los depósitos de $ 500.000 (con signo positivo). Desde la celda B15 hasta la celda B21 registramos los retiros de $ 350.000 (con signo negativo). En las celdas C7, D7 y E7 calculamos intereses, depósito más interés y saldo al final del período. (Ver figura 5.39).

Rellenamos las celdas en blanco copiando las fórmulas de las celdas C7, D7 y E7 en el rango C8:E27. En la celda E27 observamos un saldo de $ 1.399.575.45. (Ver figura 5.40).

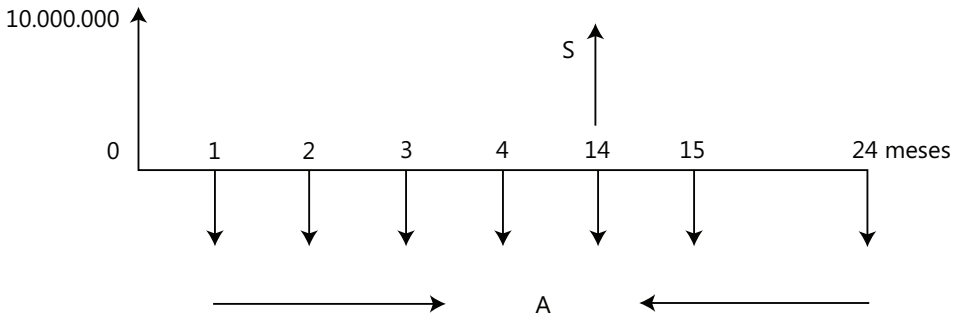
Figura 5.40



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		2,00%							
2	NO	DEPOSITO	INTERES	DEPOSITO + INTERES	SALDO				
3	0								
4	1								
5	2								
6	3	500.000,00			500.000,00				
7	4	500.000,00	10.000,00	510.000,00	1.010.000,00				
8	5	500.000,00	20.200,00	520.200,00	1.530.200,00				
9	6	500.000,00	30.604,00	530.604,00	2.060.804,00				
10	7	500.000,00	41.216,08	541.216,08	2.602.020,08				
11	8	500.000,00	52.040,40	552.040,40	3.154.060,48				
12	9		63.081,21	63.081,21	3.217.141,69				
13	10		64.342,83	64.342,83	3.281.484,53				
14	11		65.629,69	65.629,69	3.347.114,22				
15	12	- 350.000,00	66.942,28	- 283.057,72	3.064.056,50				
16	13	- 350.000,00	61.281,13	- 288.718,87	2.775.337,63				
17	14	- 350.000,00	55.506,75	- 294.493,25	2.480.844,38				
18	15	- 350.000,00	49.616,89	- 300.383,11	2.180.461,27				
19	16	- 350.000,00	43.609,23	- 306.390,77	1.874.070,50				
20	17	- 350.000,00	37.481,41	- 312.518,59	1.561.551,91				
21	18	- 350.000,00	31.231,04	- 318.768,96	1.242.782,94				
22	19		24.855,66	24.855,66	1.267.638,60				
23	20		25.352,77	25.352,77	1.292.991,37				
24	21		25.859,83	25.859,83	1.318.851,20				
25	22		26.377,02	26.377,02	1.345.228,23				
26	23		26.904,56	26.904,56	1.372.132,79				
27	24		27.442,66	27.442,66	1.399.575,45	SALDO			
28									

Ejemplo 5.25

Se consigue un préstamo bancario por $ 10.000.000 al 2% mensual para cancelarlo con 24 cuotas mensuales iguales. Si después de cancelada la cuota 14 se abonan $ 800.000 y el plazo sigue siendo igual, ¿en cuánto queda la cuota mensual, después de realizado el abono?



En primer lugar se necesita conocer el valor de la cuota mensual, que corresponde al valor de A de una anualidad vencida, que se calcula con la expresión (5.2)

$$A = 10.000.000\left[\frac{0.02(1.02)^{24}}{(1.02)^{24}-1}\right]$$

$$A = \$\ 528.710.97$$

Se calcula el valor del saldo del crédito después de pagada la cuota 14. Se utiliza indistintamente cualquiera de los dos procedimientos vistos en el apartado 6. Para este caso, en particular, aplicamos el primer procedimiento (saldo en función de las cuotas por pagar).

$$S_{14} = 528.710.97\left[\frac{(1.02)^{10}-1}{0.02(1.02)^{10}}\right]$$

$$S_{14} = \$\ 4.749.191.24$$

Este es el valor de la deuda una vez cancelada la cuota 14. El valor del saldo neto resulta de restarle a este valor el abono de $ 800.000.

$$\text{Saldo neto} = \$\ 4.749.191.24 - \$\ 800.000 = \$\ 3.949.191.24$$

Este valor se va a cancelar con 10 cuotas mensuales.

$$A = 3.949.191.25\left[\frac{0.02(1.02)^{10}}{(1.02)^{10}-1}\right]$$

$$A = \$\ 439.649.75$$

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

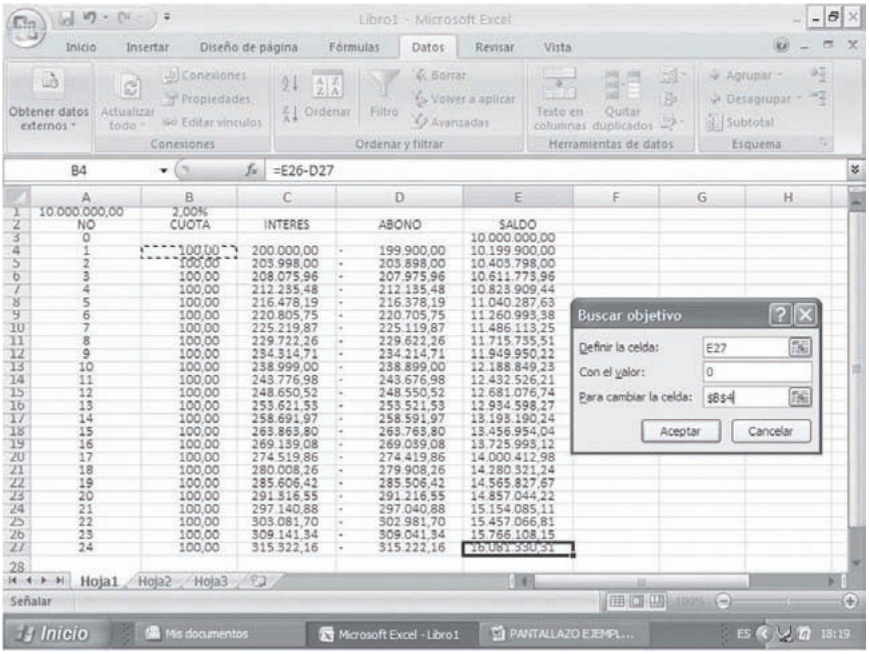
Figura 5.41

	A	B	C	D	E
1	10.000.000	2.0%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	100	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
27	24				

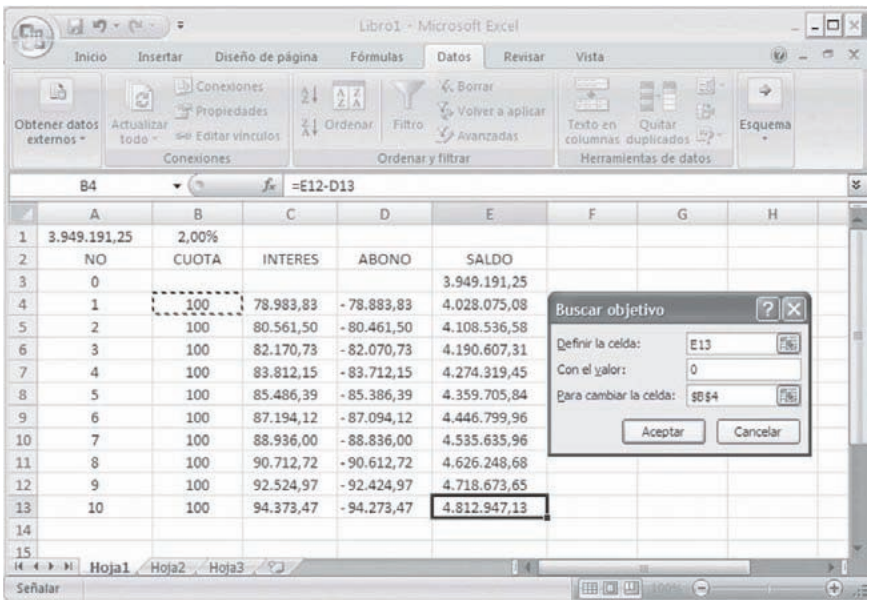
En la celda A1 escribimos 10.000.000, que corresponde al valor del préstamo bancario y en la celda B1 escribimos 2.0%, que es la tasa de interés. En la celda B4 escribimos un valor arbitrario, 100 en este caso, que es la incógnita del ejercicio y que corresponde a cada una de las 24 cuotas. En la celda B5 escribimos =B4 para indicar que la segunda cuota es igual a la primera y copiamos la celda B5 hasta la celda B27. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, abono a capital y saldo insoluto. (Ver figura 5.41).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E27 y con *Buscar objetivo* encontramos en la celda B4 un valor de $ 528.710.97 que corresponde al valor de la cuota mensual. (Ver figura 5.42).

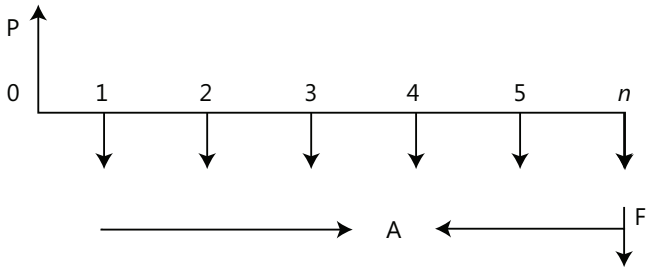
Figura 5.42



Con el saldo neto de $ 3.949.191.25, calculamos las cuotas restantes.



A continuación se presenta el flujo de caja general de las anualidades vencidas, en el que el lector podrá apreciar claramente el sitio de ubicación tanto del valor presente como del valor futuro.



Nótese en el flujo de caja, que el valor presente (P) está ubicado un período anterior a la fecha del primer pago. Puesto que el primer pago, para este caso, está ubicado al final del período uno, el valor presente está ubicado en el momento cero. El valor futuro (F) queda ubicado en la fecha del último pago. El flujo de caja también plantea tres soluciones de pago equivalentes desde el punto de vista financiero: es equivalente pagar hoy P, que pagar *n* cuotas de un valor de A, que pagar un valor futuro F después de *n* períodos.

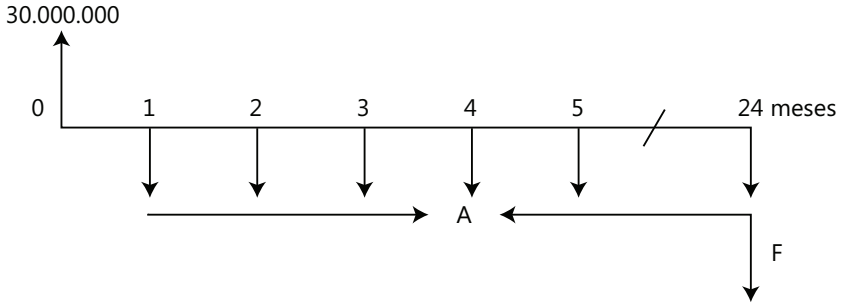
Con el ejercicio que desarrollamos a continuación, considerado por el autor como clave en el manejo de las anualidades vencidas, el lector comprenderá en una forma más clara la reflexión anterior.

Ejemplo 5.26

Un vehículo que tiene un valor de contado de $ 30.000.000, se va a financiar por medio de 24 cuotas mensuales con una tasa de interés del 2% mensual. Calcular:

1. Valor de las cuotas mensuales.
2. Valor futuro equivalente.

El flujo de caja de la operación financiera es el siguiente:



1. Para el cálculo del valor de las cuotas nos apoyamos en la expresión (5.2).

$$A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$A = 30.000.000\left[\frac{0.02(1.02)^{24}}{(1.02)^{24} - 1}\right]$$

$$A = \$\ 1.586.132.92$$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	30.000.000 PV EXE	VDT
30.000.000 PV	30.000.000 PV	SHIFT AC EXE AC	2 I % EXE	CLEAR DATA
2 i %	2 i %	30.000.000 F3	24 n EXE	30.000.000 VA
24 n	24 n	2 F2	0 FV EXE	2 % IA
COMP PMT	COMP PMT EXE	24 F1	PMT SOLVE	24 N
		COMP F4		PAGO

En Excel: = PAGO (tasa; nper; VA; VF; tipo)

= PAGO (2%; 24; 30.000.000; 0)

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

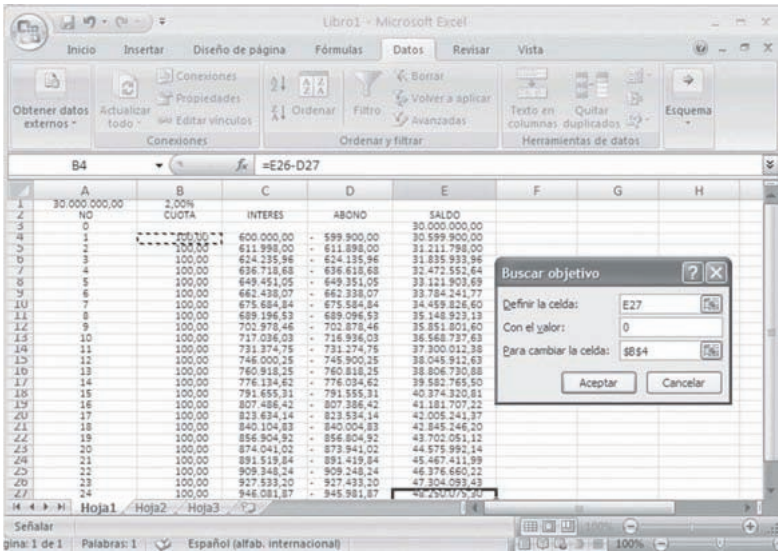
Figura 5.45

	A	B	C	D	E
1	30.000.000	2.0%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	100	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
27	24				

En la celda A1 escribimos 30.000.000, que corresponde al valor del vehículo y en la B1 2.0%, que es la tasa de interés. En la celda B4 escribimos un valor arbitrario, 100, que es la incógnita del ejercicio y que corresponde a cada una de las 24 cuotas. En la celda B5 escribimos = B4 para indicar que la segunda cuota es igual a la primera y copiamos la celda B5 hasta la celda B27. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, abono a capital y saldo insoluto. (Ver figura 5.45).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E27 y con *Buscar objetivo* encontramos en la celda B4 un valor de $ 1.586.132.92 que corresponde al valor de la cuota mensual. (Ver figura 5.46).

Figura 5.46



2. Calculamos el valor futuro equivalente. Este valor lo podemos calcular de dos formas equivalentes: en función de las cuotas mensuales, como un valor futuro equivalente a un número de cuotas iguales, es decir, el valor futuro de una anualidad vencida; o como el valor futuro equivalente a un valor presente.

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$F = 1.586.132.92\left[\frac{(1.02)^{24} - 1}{0.02}\right]$$

$$F = \$\ 48.253.117.56$$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	(-)1.586.132.92 PMT EXE	VDT
1.586.132.92 +/-PMT	(-)1.586.132.92PMT	SHIFT AC EXE AC	2 I % EXE	CLEAR DATA
2 i %	2 i %	(-)1.586.132.92 F4	24 n EXE	1.586.132.92 PAGO
24 n	24 n	2 F2	0 PV EXE	2 % IA
COMP FV	COMP FV EXE	24 F1	FV SOLVE	24 N
		COMP F5		VF

En Excel: = VF (tasa; nper; pago; VA; tipo)

= VF (2%; 24; −1586132,92; 0)

Este es el valor futuro equivalente a 24 pagos mensuales de $ 1.586.132.92.

Este valor futuro también lo podemos calcular aplicando la fórmula del interés compuesto, como el equivalente a un valor presente de $ 30.000.000 después de 24 meses a una tasa de interés del 2% mensual.

$$F = P\,(1 + i)^n$$

$$F = 30.000.000\,(1 + 0.02)^{24}$$

$$F = \$\ 48.253.117.56$$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	30.000.000 PV EXE	VDT
30.000.000 PV	30.000.000 PV	SHIFT AC EXE AC	2 I % EXE	CLEAR DATA
2 i %	2 i %	30.000.000 F3	24 n EXE	30.000.000 VA
24 n	24 n	2 F2	PMT 0 EXE	2 % IA
COMP FV	COMP FV EXE	24 F1	FV SOLVE	24 N
		COMP F5		VF

En Excel: = VF (tasa; nper; pago; VA; tipo)

= VF (2%; 24; 0; 30.000.000)

Solución con la hoja de cálculo Excel

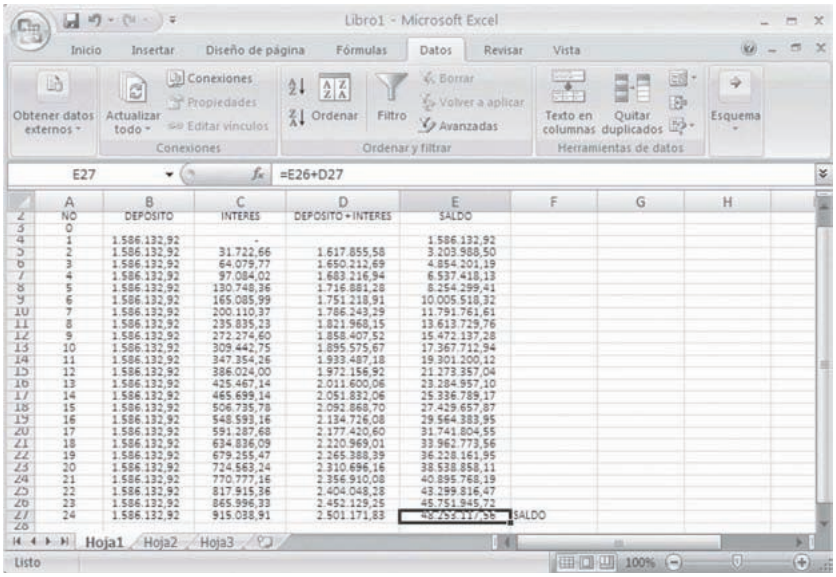
Figura 5.47

	A	B	C	D	E
1		2.00%			
2	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO+ INTERÉS	SALDO
3	0				
4	1	1.586.132.92			=B4
5	2	1.586.132.92	=E4*$B$1	=B5+C5	=E4+D5
.....	.....	.....	.....	.....	.....
26	23	1.586.132.92			
27	24	1.586.132.92			SALDO FINAL

En la celda B1 escribimos 2.0% como tasa de interés. En la celda B4 escribimos 1.586.132.92 como valor de la primera cuota (esta cuota producirá el efecto de un depósito, es decir, la primera cuota ganará intereses durante 23 meses, la segunda cuota ganará intereses durante 22 meses y así sucesivamente) y en la celda E4 escribimos =B4 para indicar que el saldo al final del mes 1 es igual al valor de la primera cuota. En las celdas B5 hasta la celda B27 escribimos el valor de las cuotas mensuales de $ 1.586.132.92. En las celdas C5, D5 y E5 calculamos los intereses, el abono a capital y el saldo insoluto. (Ver figura 5.47).

Rellenamos las celdas en blanco copiando las fórmulas de las celdas C5, D5 y E5 en el rango C6:E27 y obtenemos en E27 un saldo final de $ 48.253.117.56 que corresponde al valor futuro. (Ver figura 5.48).

Figura 5.48



	A	B	C	D	E	F	G	H
2	NO	DEPOSITO	INTERES	DEPOSITO + INTERES	SALDO			
3	0							
4	1	1.586.132,92	-		1.586.132,92			
5	2	1.586.132,92	31.722,66	1.617.855,58	3.203.988,50			
6	3	1.586.132,92	64.079,77	1.650.212,69	4.854.201,19			
7	4	1.586.132,92	97.084,02	1.683.216,94	6.537.418,13			
8	5	1.586.132,92	130.748,36	1.716.881,28	8.254.299,41			
9	6	1.586.132,92	165.085,99	1.751.218,91	10.005.518,32			
10	7	1.586.132,92	200.110,37	1.786.243,29	11.791.761,61			
11	8	1.586.132,92	235.835,23	1.821.968,15	13.613.729,76			
12	9	1.586.132,92	272.274,60	1.858.407,52	15.472.137,28			
13	10	1.586.132,92	309.442,75	1.895.575,67	17.367.712,94			
14	11	1.586.132,92	347.354,26	1.933.487,18	19.301.200,12			
15	12	1.586.132,92	386.024,00	1.972.156,92	21.273.357,04			
16	13	1.586.132,92	425.467,14	2.011.600,06	23.284.957,10			
17	14	1.586.132,92	465.699,14	2.051.832,06	25.336.789,17			
18	15	1.586.132,92	506.735,78	2.092.868,70	27.429.657,87			
19	16	1.586.132,92	548.593,16	2.134.726,08	29.564.383,95			
20	17	1.586.132,92	591.287,68	2.177.420,60	31.741.804,55			
21	18	1.586.132,92	634.836,09	2.220.969,01	33.962.773,56			
22	19	1.586.132,92	679.255,47	2.265.388,39	36.228.161,95			
23	20	1.586.132,92	724.563,24	2.310.696,16	38.538.858,11			
24	21	1.586.132,92	770.777,16	2.356.910,08	40.895.768,19			
25	22	1.586.132,92	817.915,36	2.404.048,28	43.299.816,47			
26	23	1.586.132,92	865.996,33	2.452.129,25	45.751.945,72			
27	24	1.586.132,92	915.038,91	2.501.171,83	48.253.117,56	SALDO		
28								

Como conclusión del ejercicio, podemos resumir lo siguiente:

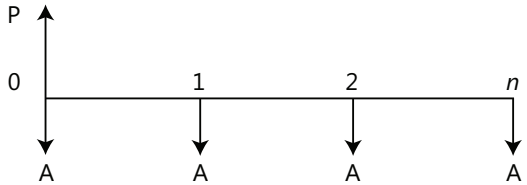
- Los cálculos que se realizan en las Matemáticas Financieras se apoyan en el concepto de equivalencia.
- La solución del ejercicio plantea tres formas equivalentes, aunque no iguales, de pago por el mismo vehículo:

Hoy	$ 30.000.000.00
24 cuotas mensuales de	$ 1.586.132.92
Después de 24 meses	$ 48.253.117.56

7. Anualidad anticipada

Es aquella en la cual los pagos se hacen al principio de cada período. Son ejemplos de anualidades anticipadas los pagos de arrendamientos anticipados, pagos de cuotas por el financiamiento de electrodomésticos. Un ejemplo real de esta clase de anualidades se presenta en algunos créditos comerciales en los que se le manifiesta al cliente que no le cobrarán cuota inicial, pero en el mismo momento en que se hace la negociación se le exige el pago de la primera cuota del conjunto de cuotas que tiene que pagar.

El siguiente flujo de caja representa una anualidad anticipada.



Se observa que las cuotas se pagan al principio del período. Se presenta alguna confusión entre las personas que se inician en el tema de las anualidades anticipadas, en lo que respecta al número de cuotas. Por ejemplo, al observar el flujo de caja se podría pensar que el valor de P se está pagando con dos cuotas, por aparecer la tercera cuota al final del período 2. En realidad, se paga con tres cuotas. En las anualidades anticipadas las cuotas se pagan al principio del período, y el principio del tercer período es el final del período 2.

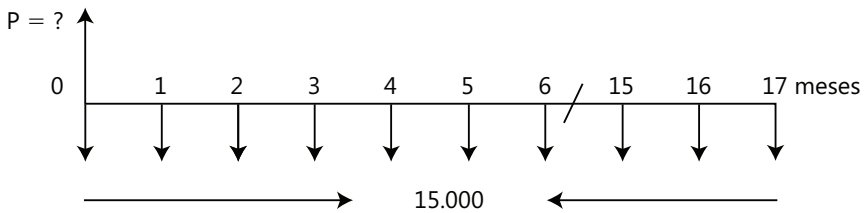
Para resolver problemas de anualidades anticipadas se pueden utilizar las mismas fórmulas empleadas en las anualidades vencidas, sólo que hay que tener cuidado en determinar en qué período se está calculando el valor presente o el valor futuro, y cuál es el número de pagos. Sin embargo, en este texto, utilizando artificios que convierten las anualidades anticipadas en vencidas, se desarrollan expresiones propias para resolverlas.

7.1 Valor presente de una anualidad anticipada

El valor presente de una serie de pagos iguales anticipados será el valor, que en el momento de realizada la operación financiera, sea equivalente a toda la serie. En el párrafo siguiente, a través de un ejercicio, se explicarán los procedimientos más sencillos para el cálculo del valor presente de una anualidad anticipada.

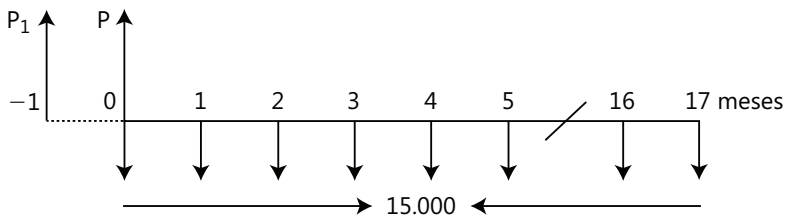
Ejemplo 5.27[2]

Se tiene una obligación que en un momento se había pactado cancelar con 18 cuotas iguales de $ 15.000 cada una por mes anticipado. Se decide, a última hora, cancelarla de contado. Si la tasa de interés acordada es del 3% mensual, hallar este valor.



Hasta este nivel del texto, sólo conocemos las fórmulas para realizar cálculos con las anualidades vencidas. Lo recomendable, inicialmente, para trabajar con anualidades anticipadas es convertir, utilizando algún artificio, la anualidad anticipada en una anualidad vencida. Para tal efecto, existen varios procedimientos, de los cuales se proporcionarán dos de ellos, considerados los más simples.

Procedimiento 1. Se añade, en el flujo de caja, un período a la izquierda.



[2] Este ejemplo fue formulado por Jaime García en su libro *Matemáticas Financieras* y desarrollado por el autor.

Si ignoramos P en el flujo de caja, observamos que se tiene una anualidad vencida en la que el presente es P_1 ubicado en -1.

Calculamos P_1 aplicando la fórmula del valor presente (5.1) en función de A.

$$P_1 = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$P_1 = 15.000\left[\frac{(1+0.03)^{18} - 1}{0.03(1+0.03)^{18}}\right]$$

$$P_1 = \$\ 206.302.67$$

Este es el valor presente equivalente a 18 pagos mensuales de $ 15.000, a una tasa de interés del 3% mensual, pero ubicado en el momento – 1. Como nos interesa conocer el valor presente equivalente en el momento cero, trasladamos a esta fecha el valor presente en 1. Para esto aplicamos la fórmula básica $F = P(1 + i)^n$, en la que $P = P_1$ y $F = P$.

$$F = P_1(1 + i)^n$$

$$P = 206.302.68(1 + 0.03)^1$$

$$P = \$\ 212.491.72$$

Con el procedimiento desarrollado podemos lograr una expresión que nos permita calcular el valor presente de la anualidad anticipada en una forma directa.

$$P = A(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] \tag{5.8a}$$

Con la fórmula desarrollada podemos plantear la siguiente regla general: *el valor presente de una anualidad anticipada, ubicado en el momento en que se paga la primera cuota, resulta de multiplicar el valor presente de una anualidad vencida por* $(1 + i)$.

Reemplazando en la fórmula los valores del ejercicio, se tiene:

$$P = 15.000(1.03)\left[\frac{(1.03)^{18} - 1}{0.03(1.03)^{18}}\right]$$

$$P = \$\ 212.491.78$$

Recordemos que las operaciones de las anualidades anticipadas, con la calculadora financiera, utilizando el menú del interés compuesto, se realizan en forma similar que en las anualidades vencidas, teniendo la precaución de cambiar el modo de pago. En las calculadoras Casio FC 100, FC 200, FC 100V y FC 200V, debe aparecer en la parte superior de la pantalla la palabra BGN, para lo cual se oprime la tecla BGN que en la FC 100 aparece de última en la segunda fila, y en la FC 200 aparece como segunda función de la tecla MODE, ubicada al final de la primera fila. En la FC 1.000 se oprime la tecla MODE y el número 4 y en el cuadro de diálogo debe aparecer PAYMENT: BGN. En caso

de que aparezca PAYMENT: END, oprima SHIFT MODE para cambiar a PAYMENT: BGN. En la calculadora Hewlett Packard debe aparecer en el menú VDT, en la parte superior de la pantalla 1 PGOS /AÑO: MODO INICIAL. El cambio de modo de pago en esta calculadora se realiza en el menú secundario OTRO, que se activa al oprimir la última tecla del menú VDT. Si se desea trabajar con anualidades anticipadas se oprime la tecla INIC y para anualidades vencidas la tecla FINAL; para salir nuevamente al menú VDT oprima la tecla EXIT.

En Excel, para el cálculo de las anualidades anticipadas se utilizan las mismas funciones de las anualidades vencidas, teniendo la precaución de colocar el número 1 en el parámetro *tipo*.

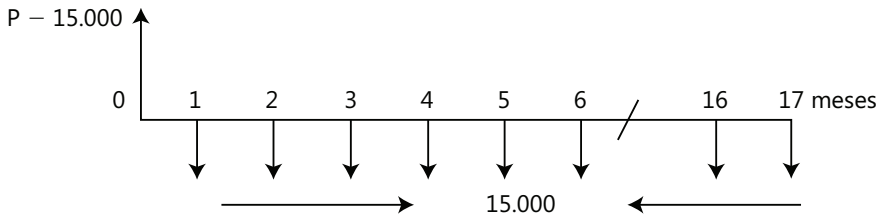
Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	BGN	VDT
BGN	BGN	BGN	(-) 15.000 PMT EXE	MODO INICIAL
15.000 +/- PMT	(-) 15.000 PMT	SHIFT AC EXE AC	3 I % EXE	CLEAR DATA
3 I %	3 i %	(-) 15.000 F4	18 n EXE	15.000 +/- PAGO
18 n	18 n	3 F2	0 FV EXE	3 % IA
COMP PV	COMP PV EXE	18 F1	PV SOLVE	18 N
		COMP F3		VA

En Excel: $= VA\ (tasa; nper; pago; VF; tipo)$

$= VA\ (3\%; 18; -15000; 0; 1)$

Se ingresa el valor de 1 en el parámetro tipo, para indicar que los pagos son anticipados.

Procedimiento 2. Le restamos al valor presente (P) el valor de la primera cuota.



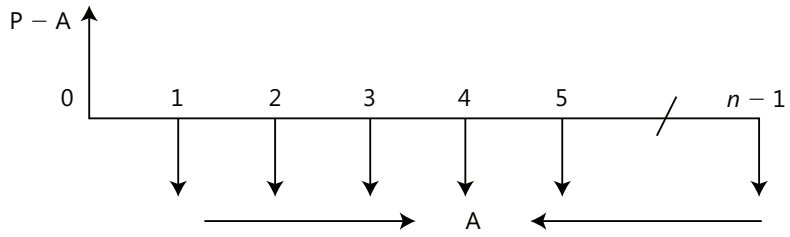
En Matemáticas Financieras, así como no son comparables valores ubicados en diferentes fechas porque son diferentes, si se pueden comparar valores de la misma fecha. Los valores de P y la primera cuota están en la misma fecha (momento cero), y se supone que P es mayor que $ 15.000, en consecuencia, es válido restarle a P el valor de $ 15.000, tal como aparece en el flujo de caja. Al eliminar la primera cuota quedan 17 pagos de una anualidad vencida.

$$P - 15.000 = 15.000\left[\frac{(1+0.03)^{17}-1}{0.03(1+0.03)^{17}}\right]$$

$$P - 15.000 = 197.491.78$$

$$P = \$\ 212.491.78$$

Utilizando este mismo procedimiento se puede deducir una fórmula para calcular directamente el valor presente (P) conocidos el valor de la cuota anticipada (A), la tasa de interés (*i*) y el número de pagos anticipados (*n*), apoyándonos en el flujo neto.



$$P - A = A\left[\frac{(1+i)^{n-1}-1}{i(1+i)^{n-1}}\right]$$

$$P = A + A\left[\frac{(1+i)^{n-1}-1}{i(1+i)^{n-1}}\right] \tag{5.8}$$

La expresión obtenida indica que: *el valor presente de una anualidad anticipada es igual al valor de la cuota (A) más el valor presente de la anualidad vencida, calculado con n − 1 cuotas.*

Reemplazando en la fórmula (5.8) los valores del ejercicio, tenemos:

$$P = 15.000 + 15.000\left[\frac{(1+0.03)^{17}-1}{0.03(1+0.03)^{17}}\right]$$

$$P = \$\ 212.491.78$$

Hemos expuesto dos procedimientos equivalentes para calcular el valor presente de una anualidad anticipada, de los que, al mismo tiempo, resultaron dos expresiones equivalentes, a saber:

- El valor presente de una anualidad anticipada es igual al valor presente de una anualidad vencida multiplicado por $(1 + i)$.

$$P = A(1+i)\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i(1+i)^{n}}\right]$$

- El valor presente de una anualidad anticipada es igual al valor de la cuota más el valor presente de la anualidad vencida con $n - 1$ cuotas.

$$P = A + A\left[\frac{(1+i)^{n-1}-1}{i(1+i)^{n-1}}\right]$$

Le queda al lector la opción de utilizar una u otra expresión, cuando se le planteen problemas de anualidades anticipadas.

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

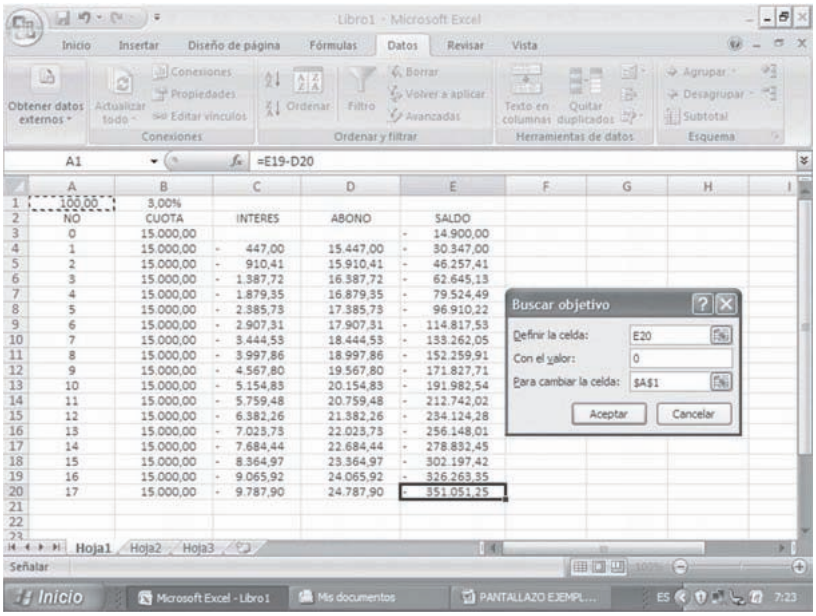
Figura 5.49

	A	B	C	D	E
1	100	3.00%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	15.000			=A1−B3
4	1	15.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	15.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
20	17	15.000			

En la celda A1 escribimos un valor arbitrario de 100, y en la celda B1 la tasa de interés del 3,00%. En la celda E3 calculamos el saldo insoluto. En las celdas B3 hasta B20 registramos $ 15.000 como valor de las cuotas mensuales. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, el abono a capital y el saldo al final del período. (Ver figura 5.49).

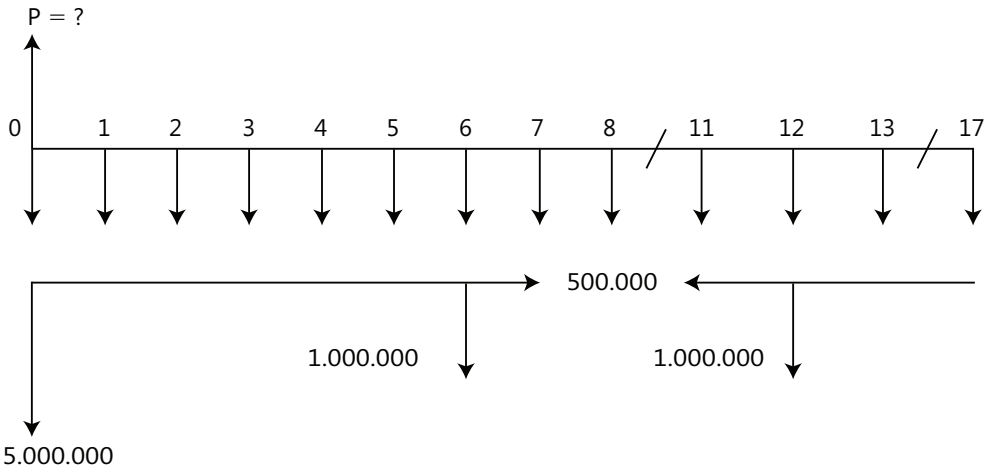
Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E20 y con *Buscar objetivo* encontramos en la celda A1 un valor de $ 212.491.78 que corresponde al valor de la obligación. (Ver figura 5.50).

Figura 5.50



Ejemplo 5.28

Al señor Pedro Picapiedra le financian un vehículo en Marautos Ltda, con las siguientes condiciones: una cuota inicial de $ 5.000.000, 18 cuotas mensuales iguales de $ 500.000 pagaderas en forma anticipada y dos cuotas extraordinarias de $ 1.000.000 cada una, en los meses 6 y 12. Si la tasa de financiación que le cargan es del 4% mensual, se pide calcular el valor de contado del vehículo.



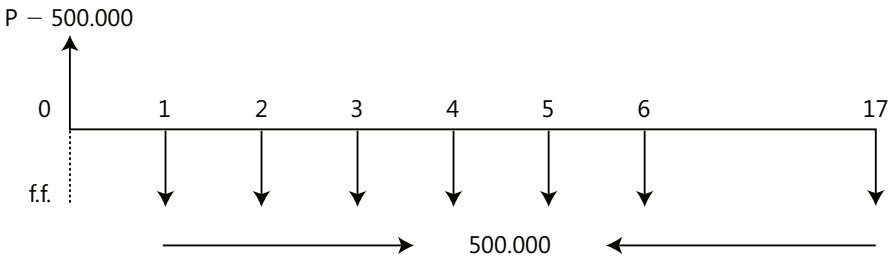
Se elige el momento cero como fecha focal para plantear la ecuación de valor.

El valor del vehículo (P) será igual a la cuota inicial, más el valor presente de la anualidad anticipada, más el valor presente de cada una de las cuotas extraordinarias.

$$P = C.I. + Vp_{anualidad} + Vp_{cuota\ 6} + Vp_{cuota\ 12}$$

Se calcula primero el valor presente de la anualidad anticipada. Utilizamos cualquiera de los dos procedimientos anteriormente descritos:

El siguiente flujo corresponde a una anualidad vencida.



Se plantea la ecuación de valor con fecha focal en el momento cero.

$$P - 500.000 = A\left[\frac{(1+i)^{n-1}-1}{i(1+i)^{n-1}}\right]$$

$$P - 500.000 = 500.000\left[\frac{(1+0.04)^{17}-1}{0.04(1+0.04)^{17}}\right]$$

$$P = \$\ 6.582.834.43$$

Conocido el valor presente de la anualidad anticipada, planteamos la ecuación de valor de la siguiente forma:

$$P = C.I. + VP_{anualidad} + Vp_{cuota\ 6} + Vp_{cuota\ 12}$$

$$P = 5.000.000 + 6.582.834.43 + \frac{1.000.000}{(1+0.04)^{6}} + \frac{1.000.000}{(1+0.04)^{12}}$$

$$P = \$\ 12.997.746$$

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

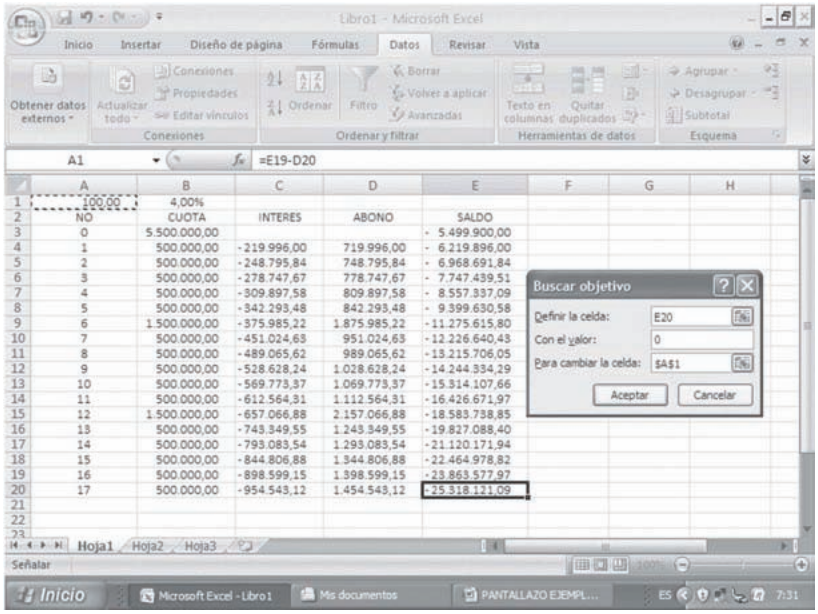
Figura 5.51

	A	B	C	D	E
1	100	4.00%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	5.500.000			=A1−B3
4	1	500.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	500.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
9	6	1.500.000			
10	7	500.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12	1.500.000			
16	13	500.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
20	17	500.000			

En la celda A1 escribimos un valor arbitrario de 100, que corresponde al valor del vehículo y en la B1 la tasa de interés del 4,00%. En la celda B3 (momento cero) registramos el valor de la cuota inicial más el valor de la primera cuota mensual. Desde la celda B4 hasta B8 escribimos el valor de las cuotas mensuales de $ 500.000 y en la celdas B9 y B15 registramos el valor de la cuota mensual más la cuota extraordinaria. En el resto de las celdas hasta B20 escribimos el valor de la cuota mensual. En la celda E3 calculamos el saldo insoluto. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, el abono a capital y el saldo al final del período. (Ver figura 5.51).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E20 y con *Buscar objetivo* encontramos en la celda A1 un valor de $ 12.997.746 que corresponde al valor del vehículo. (Ver figura 5.52).

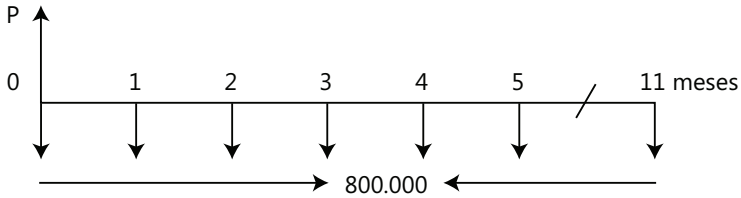
Figura 5.52



	A	B	C	D	E
1	100,00	4,00%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	5.500.000,00			- 5.499.900,00
4	1	500.000,00	-219.996,00	719.996,00	- 6.219.896,00
5	2	500.000,00	-248.795,84	748.795,84	- 6.968.691,84
6	3	500.000,00	-278.747,67	778.747,67	- 7.747.439,51
7	4	500.000,00	-309.897,58	809.897,58	- 8.557.337,09
8	5	500.000,00	-342.293,48	842.293,48	- 9.399.630,58
9	6	1.500.000,00	-375.985,22	1.875.985,22	-11.275.615,80
10	7	500.000,00	-451.024,63	951.024,63	-12.226.640,43
11	8	500.000,00	-489.065,62	989.065,62	-13.215.706,05
12	9	500.000,00	-528.628,24	1.028.628,24	-14.244.334,29
13	10	500.000,00	-569.773,37	1.069.773,37	-15.314.107,66
14	11	500.000,00	-612.564,31	1.112.564,31	-16.426.671,97
15	12	1.500.000,00	-657.066,88	2.157.066,88	-18.583.738,85
16	13	500.000,00	-743.349,55	1.243.349,55	-19.827.088,40
17	14	500.000,00	-793.083,54	1.293.083,54	-21.120.171,94
18	15	500.000,00	-844.806,88	1.344.806,88	-22.464.978,82
19	16	500.000,00	-898.599,15	1.398.599,15	-23.863.577,97
20	17	500.000,00	-954.543,12	1.454.543,12	-25.318.121,09
21					
22					
23					

Ejemplo 5.29

A un amigo le ofrecen arrendarle un negocio por un año pagándole un canon mensual anticipado de $ 800.000. Si solicita un solo pago en el momento de arrendarla, ¿cuánto debe recibir si su tasa de oportunidad es del 2% mensual?



Se trata de reemplazar por un solo pago el día que se arrienda el negocio, el valor de 12 mensualidades anticipadas de $ 800.000.

$$P = A + A\left[\frac{(1+i)^{n-1}-1}{i(1+i)^{n-1}}\right] \tag{5.8}$$

$$P = 800.000 + 800.000\left[\frac{(1.02)^{12-1}-1}{0.02(1.02)^{12-1}}\right]$$

$$P = \$\ 8.629.478.44$$

O también, aplicando la expresión (5.8a):

$$P = A(1+i)\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i(1+i)^{n}}\right]$$

$$P = 800.000(1.02)\left[\frac{(1.02)^{12}-1}{0.02(1.02)^{12}}\right]$$

$$P = \$\ 8.629.478.44$$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	BGN	VDT
BGN	BGN	BGN	(-) 800.000 PMT EXE	MODO INICIAL
800.000 +/- PMT	(-) 800.000 PMT	SHIFT AC EXE AC	2 I % EXE	CLEAR DATA
2 I %	2 i %	(-) 800.000 F4	12 n EXE	15.000 +/- PAGO
12 n	12 n	2 F2	0 FV EXE	3 % IA
COMP PV	COMP PV EXE	12 F1	PV SOLVE	18 N
		COMP F3		VA

En Excel: = VA (tasa; nper; pago; VF; tipo)

= VA (2%; 12; −800000; 0; 1)

Se ingresa el valor de 1 en el parámetro tipo, para indicar que los pagos son anticipados.

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

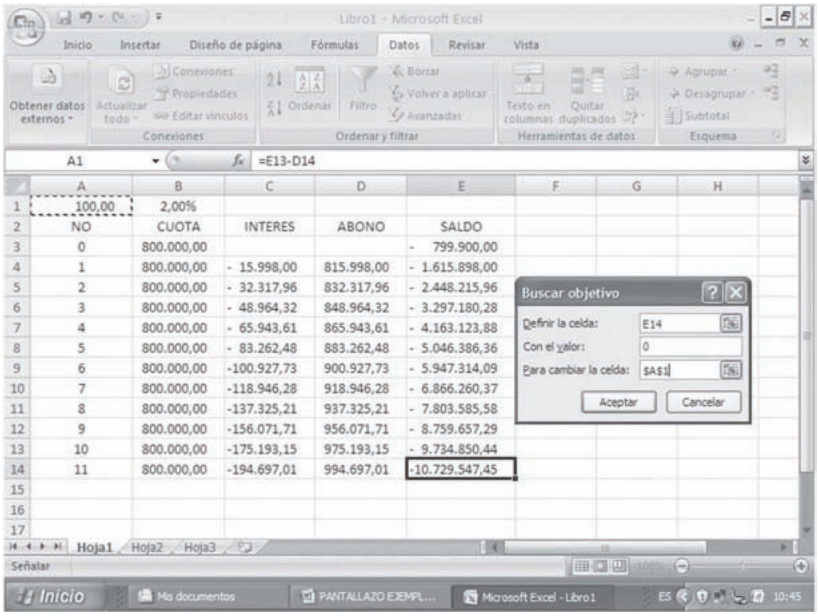
Figura 5.53

	A	B	C	D	E
1	100	2.00%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	800.000			=A1−B3
4	1	800.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	800.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
14	11	800.000			

En la celda A1 escribimos un valor arbitrario de 100, y en la B1 la tasa de interés del 2,00%. En la celda E3 calculamos el saldo insoluto. En las celdas B3 hasta B14 registramos $ 800.000 como valor del canon mensual. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, el abono a capital y el saldo al final del período. (Ver figura 5.53).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E14 y con *Buscar objetivo* encontramos en la celda A1 un valor de $ 8.629.478.44. (Ver figura 5.54).

Figura 5.54



	A	B	C	D	E
1	100,00	2,00%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	800.000,00			- 799.900,00
4	1	800.000,00	- 15.998,00	815.998,00	- 1.615.898,00
5	2	800.000,00	- 32.317,96	832.317,96	- 2.448.215,96
6	3	800.000,00	- 48.964,32	848.964,32	- 3.297.180,28
7	4	800.000,00	- 65.943,61	865.943,61	- 4.163.123,88
8	5	800.000,00	- 83.262,48	883.262,48	- 5.046.386,36
9	6	800.000,00	-100.927,73	900.927,73	- 5.947.314,09
10	7	800.000,00	-118.946,28	918.946,28	- 6.866.260,37
11	8	800.000,00	-137.325,21	937.325,21	- 7.803.585,58
12	9	800.000,00	-156.071,71	956.071,71	- 8.759.657,29
13	10	800.000,00	-175.193,15	975.193,15	- 9.734.850,44
14	11	800.000,00	-194.697,01	994.697,01	-10.729.547,45
15					
16					
17					

Ejemplo 5.30

El dueño de una propiedad recibe tres ofertas de compra.

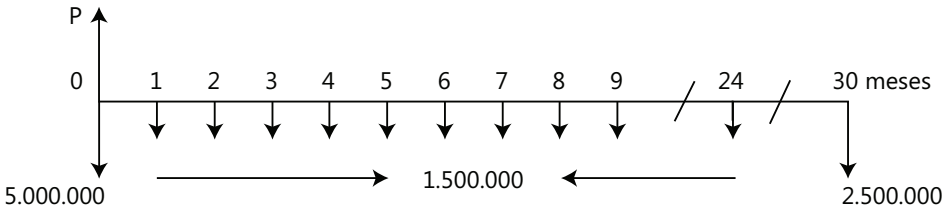
- Primera oferta: $ 32.000.000 de contado.
- Segunda oferta: cuota inicial de $ 5.000.000, 24 pagos mensuales vencidos de $ 1.500.000 y un pago único dentro de 30 meses por $ 2.500.000.
- Tercera oferta: 12 pagos mensuales anticipados de $ 2.500.000 y un pago único de $ 5.000.000 en el mes 18.

Si la tasa de interés de oportunidad es del 2% mensual, ¿qué opción se debe aceptar?

Las tres ofertas se deben analizar en forma independiente utilizando una misma fecha de comparación. Es indiferente compararlas en la fecha focal natural (momento cero), o en cualquiera otra fecha focal, porque la decisión será siempre la misma.

Como ya la primera oferta está en el momento cero (precio de contado), para simplificar la solución del ejercicio, elegimos esta fecha focal para las otras ofertas.

Análisis de la segunda oferta



La ecuación de valor se plantea de la siguiente forma:

$$P = 5.000.000 + 1.500.000\left[\frac{(1.02)^{24} - 1}{0.02(1.02)^{24}}\right] + \frac{2.500.000}{(1.02)^{30}}$$

$$P = \$\ 34.751.065.63$$

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

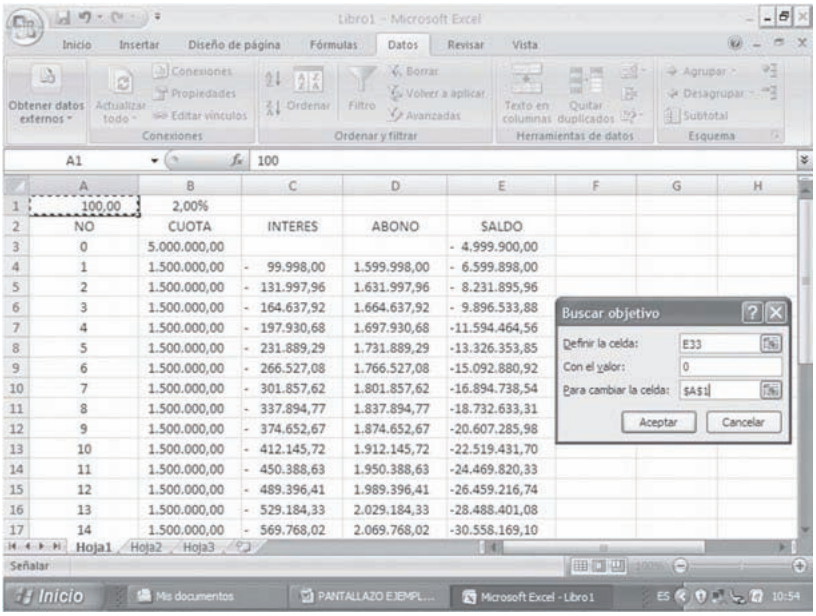
Figura 5.55

	A	B	C	D	E
1	100	2.0%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	5.000.000			=A1−B3
4	1	1.500.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
.....	.....	.....	.....	.....	.....
27	24	1.500.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
33	30	2.500.000			

En la celda A1 escribimos un valor arbitrario de 100, que es la incógnita del ejercicio y en la celda B1 escribimos la tasa de interés del 2,0%. En la celda B3 registramos la cuota inicial de $ 5.000.000 y en la E3 calculamos el saldo insoluto. Desde la celda B4 hasta la B27 registramos los pagos mensuales de $ 1.500.000 y en la celda B33 escribimos el pago único de $ 2.500.000. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, el abono a capital y el saldo insoluto. (Ver figura 5.55).

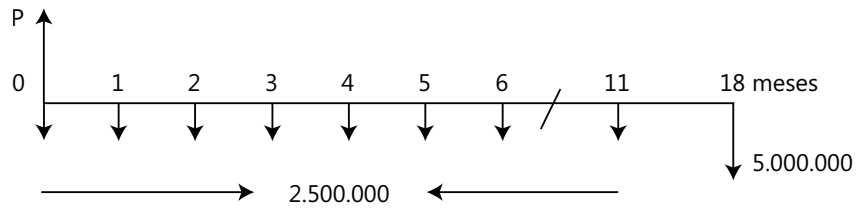
Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E33 para rellenar las celdas en blanco y aplicando *Buscar objetivo*, obtenemos en A1 un valor de $ 34.751.065.63. (Ver figura 5.56).

Figura 5.56



	A	B	C	D	E
1	100,00	2,00%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	5.000.000,00			- 4.999.900,00
4	1	1.500.000,00	- 99.998,00	1.599.998,00	- 6.599.898,00
5	2	1.500.000,00	- 131.997,96	1.631.997,96	- 8.231.895,96
6	3	1.500.000,00	- 164.637,92	1.664.637,92	- 9.896.533,88
7	4	1.500.000,00	- 197.930,68	1.697.930,68	-11.594.464,56
8	5	1.500.000,00	- 231.889,29	1.731.889,29	-13.326.353,85
9	6	1.500.000,00	- 266.527,08	1.766.527,08	-15.092.880,92
10	7	1.500.000,00	- 301.857,62	1.801.857,62	-16.894.738,54
11	8	1.500.000,00	- 337.894,77	1.837.894,77	-18.732.633,31
12	9	1.500.000,00	- 374.652,67	1.874.652,67	-20.607.285,98
13	10	1.500.000,00	- 412.145,72	1.912.145,72	-22.519.431,70
14	11	1.500.000,00	- 450.388,63	1.950.388,63	-24.469.820,33
15	12	1.500.000,00	- 489.396,41	1.989.396,41	-26.459.216,74
16	13	1.500.000,00	- 529.184,33	2.029.184,33	-28.488.401,08
17	14	1.500.000,00	- 569.768,02	2.069.768,02	-30.558.169,10

Análisis de la tercera oferta



Planteamos la ecuación de valor en el momento cero.

$$P = 2.500.000 + 2.500.000\left[\frac{(1.02)^{12-1} - 1}{0.02(1.02)^{12-1}}\right] + \frac{5.000.000}{(1.02)^{18}}$$

$$P = \$\ 30.467.917.00$$

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

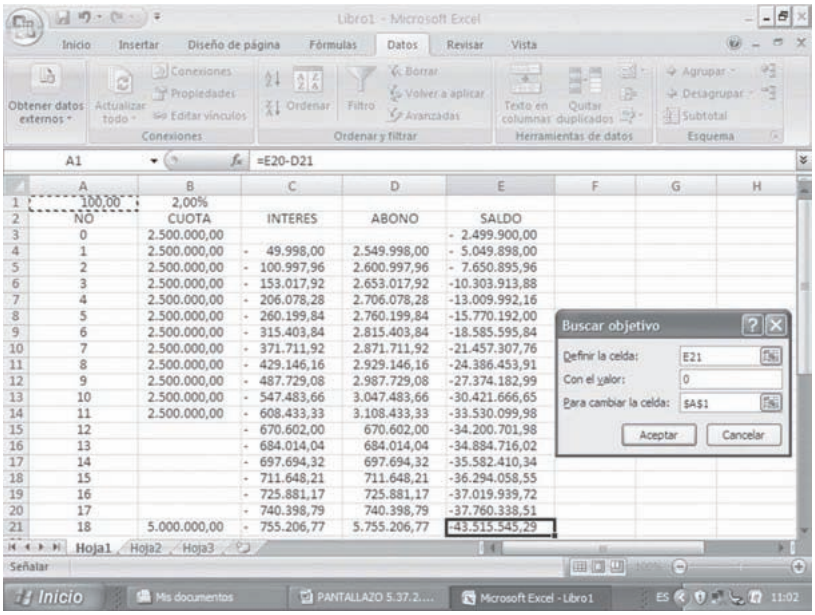
Figura 5.57

	A	B	C	D	E
1	100	2.0%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	2.500.000			=A1−B3
4	1	2.500.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	2.500.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
14	11	2.500.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
21	18	5.000.000			

En la celda A1 escribimos un valor arbitrario de 100, que es la incógnita del ejercicio y en la B1 la tasa de interés del 2.0%. Desde la celda B3 hasta la celda B14 registramos los pagos mensuales de $ 2.500.000 y en la celda B21 escribimos el pago único de $ 5.000.000. En la celda E3 calculamos el saldo insoluto. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, el abono a capital y el saldo al final del período. (Ver figura 5.57).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E21 para rellenar las celdas en blanco y aplicando *Buscar objetivo*, obtenemos en A1 un valor de $ 30.467.917. (Ver figura 5.58).

Figura 5.58



Resumen de ofertas:

Primera oferta:	$ 32.000.000.00
Segunda oferta:	$ 34.751.065.63
Tercera oferta:	$ 30.467.917.00

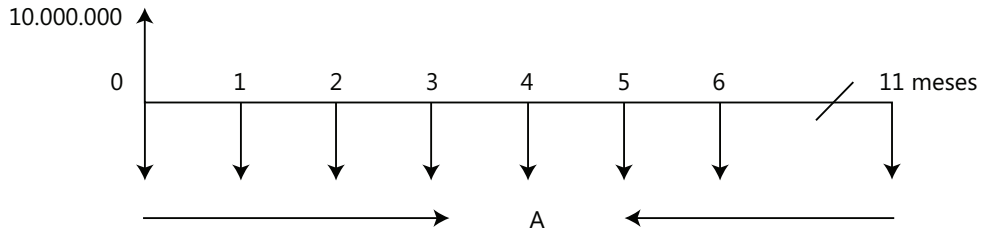
Se debe aceptar la segunda oferta por tener un valor presente mayor.

7.2 Valor de la cuota en una anualidad anticipada

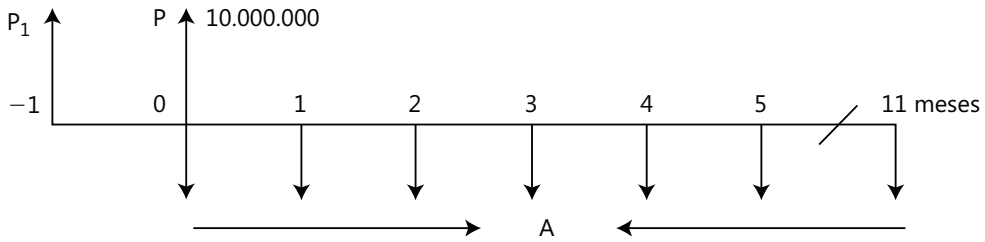
Corresponde al valor de la cuota, de una serie de cuotas, que se pagan al principio del período. Para lograr una expresión que nos permita calcular su valor desarrollaremos el siguiente ejercicio, en el que aplicaremos los mismos procedimientos que utilizamos en el cálculo del valor presente.

Ejemplo 5.31

Se recibe un préstamo de $ 10.000.000 para pagarlo en 12 cuotas mensuales iguales, pagaderas en forma anticipada. Si le cobran el 4% de interés, calcular el valor de las cuotas.



Procedimiento 1. Se convierte la anualidad anticipada en vencida agregando un período a la izquierda y calculando un valor equivalente a $ 10.000.000, ubicado en −1.



Ignorando el valor de P en el flujo de caja, se tiene una anualidad vencida compuesta por 12 pagos en la que el valor presente se encuentra ubicado en 1. Se calcula el valor de P_1, ubicado en el momento −1, equivalente a P en el momento 0.

$$P = \frac{F}{(1+i)^n} = \frac{10.000.000}{(1+0.04)^1}$$

$$P_1 = \$\ 9.615.384.61$$

Una vez convertida la anualidad anticipada en vencida y conocidos el valor presente (P_1), la tasa de interés (4%) y el número de pagos (12), podemos calcular el valor de la cuota (A), aplicando la fórmula (5.2):

$$A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] \tag{5.2}$$

$$A = 9.615.384.61\left[\frac{0.04(1+0.04)^{12}}{(1+0.04)^{12} - 1}\right]$$

$$A = \$\ 1.024.540.12$$

Todo este procedimiento se reduce a despejar el valor de A de la expresión (5.8 a).

$$P = A(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

Despejando A, se tiene:

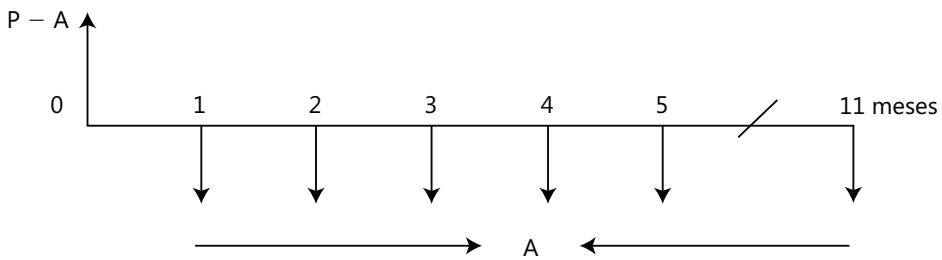
$$A = \frac{P}{(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]} \tag{5.9 a}$$

Reemplazando en la fórmula los valores del ejercicio, se tiene:

$$A = \frac{10.000.000}{(1.04)\left[\frac{(1.04)^{12} - 1}{0.04(1.04)^{12}}\right]}$$

$$A = \$\ 1.024.540.12$$

Procedimiento 2. Partiendo del flujo de caja inicial del préstamo, se elimina una cuota, quedando el nuevo flujo de la siguiente forma:



Apoyándonos en este flujo de caja podemos plantear la siguiente ecuación de valor, con fecha focal en el momento cero.

$$P - A = A\left[\frac{(1+i)^{n-1}-1}{i(1+i)^{n-1}}\right]$$

$$P = A + A\left[\frac{(1+i)^{n-1}-1}{i(1+i)^{n-1}}\right]$$

que corresponde a una de las expresiones diseñadas en acápite 7.1 para calcular el valor presente de la anualidad anticipada. Despejando A, se tiene:

$$P = A\left[1+\left[\frac{(1+i)^{n-1}-1}{i(1+i)^{n-1}}\right]\right]$$

$$A = \frac{P}{\left[1+\left[\frac{(1+i)^{n-1}-1}{i(1+i)^{n-1}}\right]\right]} \qquad (5.9)$$

En la expresión (5.9), A es el valor de la cuota anticipada, P es el valor inicial de la obligación, *i* es la tasa de interés efectiva por período y *n* es el número de cuotas.

Reemplazando los valores del ejercicio en la expresión (5.9), se tiene:

$$A = \frac{10.000.000}{\left[1+\left[\frac{(1.04)^{12-1}-1}{0.04(1.04)^{12-1}}\right]\right]}$$

$$A = \$\ 1.024.540.12$$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	BGN	VDT
BGN	BGN	BGN	(-) 10.000.000 PV EXE	MODO INICIAL
10.000.000 PV	(-)10.000.000 PV	SHIFT AC EXE AC	4 I % EXE	CLEAR DATA
4 I %	4 i %	(-)10.000.000 F3	12 n EXE	10.000.000 PV
12 n	12 n	4 F2	0 FV EXE	4 % IA
COMP PMT	COMP PMT EXE	12 F1	PMT SOLVE	12 N
		COMP F4		PAGO

En Excel: = PAGO (tasa; nper; VA; VF; tipo)

= PAGO (4%; 12; 10.000.000; 0; 1)

Se ingresa el valor de 1 en el parámetro tipo, para indicar que los pagos son anticipados.

De los dos procedimientos desarrollados arriba resultaron dos expresiones equivalentes que permiten calcular el valor de la cuota de una anualidad anticipada, que el lector podrá utilizar indistintamente, a saber:

- La cuota de una anualidad anticipada es igual a:

$$A = \frac{P}{(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]}$$

- La cuota de una anualidad anticipada es igual a:

$$A = \frac{P}{\left[1 + \left[\frac{(1+i)^{n-1} - 1}{i(1+i)^{n-1}}\right]\right]}$$

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

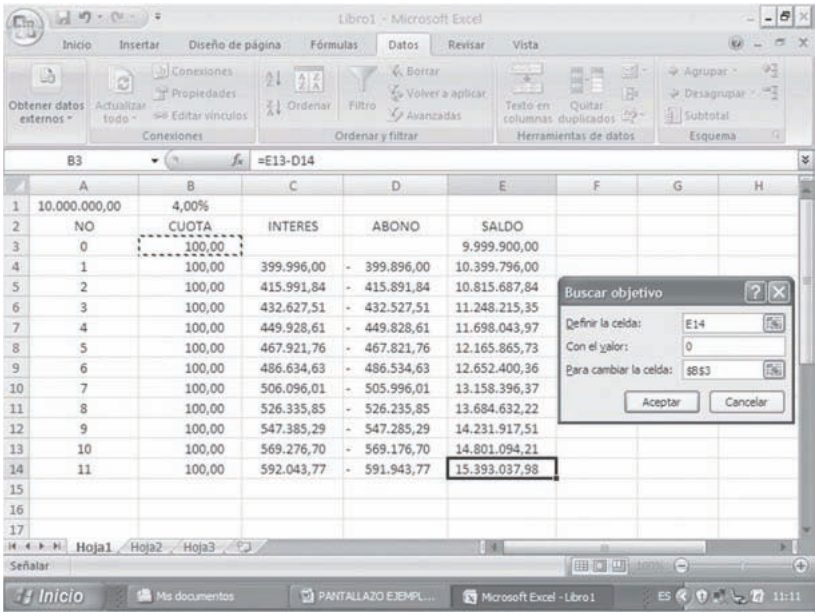
Figura 5.59

	A	B	C	D	E
1	10.000.000	4.00%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	100			=A1−B3
4	1	=B3	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2				
.....	.....	.....	.....	.....	.....
14	11				

En la celda A1 registramos el valor del préstamo y en la B1 la tasa de interés del 4,00%. En la celda B3 escribimos un valor arbitrario, 100, que pasa a ser la incógnita del ejercicio y en la celda E3 calculamos el saldo insoluto. En la celda B4 escribimos = B3 para indicar que la segunda cuota es igual a la primera, y copiamos la celda B4 hasta B14. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, el abono a capital y el saldo al final del período. (Ver figura 5.59).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E14 y con *Buscar objetivo* encontramos en la celda B3 un valor de $ 1.024.540.12 que corresponde al valor de las cuotas mensuales. (Ver figura 5.60).

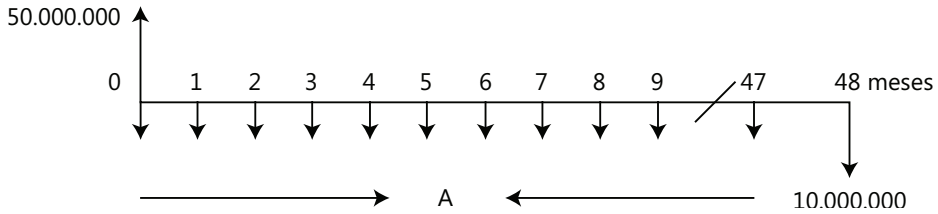
Figura 5.60



	A	B	C	D	E
1	10.000.000,00	4,00%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	100,00			9.999.900,00
4	1	100,00	399.996,00	- 399.896,00	10.399.796,00
5	2	100,00	415.991,84	- 415.891,84	10.815.687,84
6	3	100,00	432.627,51	- 432.527,51	11.248.215,35
7	4	100,00	449.928,61	- 449.828,61	11.698.043,97
8	5	100,00	467.921,76	- 467.821,76	12.165.865,73
9	6	100,00	486.634,63	- 486.534,63	12.652.400,36
10	7	100,00	506.096,01	- 505.996,01	13.158.396,37
11	8	100,00	526.335,85	- 526.235,85	13.684.632,22
12	9	100,00	547.385,29	- 547.285,29	14.231.917,51
13	10	100,00	569.276,70	- 569.176,70	14.801.094,21
14	11	100,00	592.043,77	- 591.943,77	15.393.037,98

Ejemplo 5.32

Al comprar una vivienda se quedan debiendo $ 50.000.000 para pagarlos en 4 años, con cuotas mensuales anticipadas y una cuota única al final del plazo de $ 10.000.000. Si la tasa de financiación es del 3% mensual, calcular el valor de cada una de las cuotas.



Se elige el momento cero para plantear la ecuación de valor.

$$50.000.000 = A + A\left[\frac{(1.03)^{48-1} - 1}{0.03(1.03)^{48-1}}\right] + \frac{10.000.000}{(1.03)^{48}}$$

$$A = \$\ 1.828.263.06$$

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

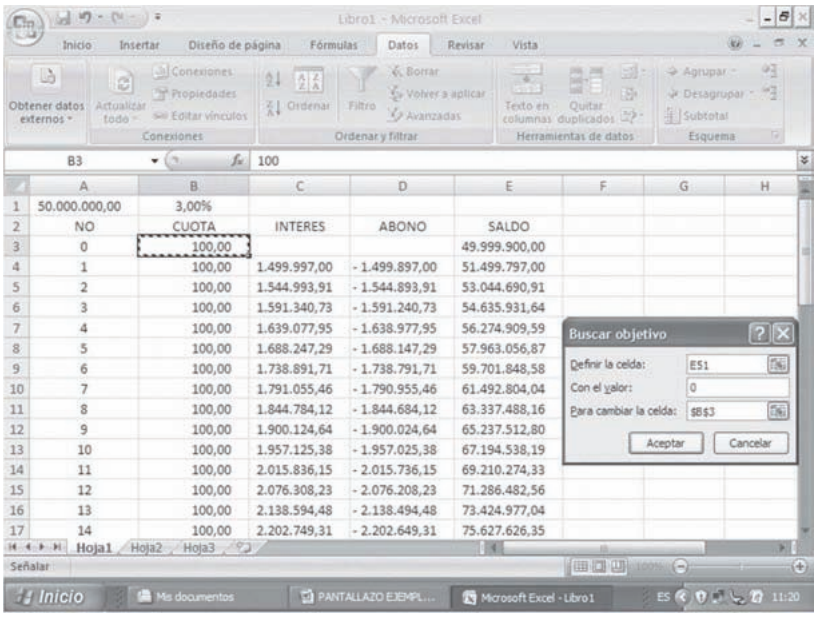
Figura 5.61

	A	B	C	D	E
1	50.000.000	3.00%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	100			=A1−B3
4	1	=B3	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
50	47	=B49			
51	48	10.000.000			

En la celda A1 registramos el valor de la vivienda y en la B1 la tasa de interés del 4,00%. En la celda B3 escribimos un valor arbitrario, 100, que pasa a ser la incógnita del ejercicio y en la celda E3 calculamos el saldo insoluto. En la celda B4 escribimos =B3 para indicar que la segunda cuota es igual a la primera, y copiamos la celda B4 hasta B50. En la celda B51 registramos $ 10.000.000 como valor de la cuota única. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, el abono a capital y el saldo al final del período. (Ver figura 5.61).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E51 y con *Buscar objetivo* encontramos en la celda B3 un valor de $ 1.828.263.06 que corresponde al valor de las cuotas mensuales. (Ver figura 5.62).

Figura 5.62



	A	B	C	D	E
1	50.000.000,00	3,00%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	100,00			49.999.900,00
4	1	100,00	1.499.997,00	- 1.499.897,00	51.499.797,00
5	2	100,00	1.544.993,91	- 1.544.893,91	53.044.690,91
6	3	100,00	1.591.340,73	- 1.591.240,73	54.635.931,64
7	4	100,00	1.639.077,95	- 1.638.977,95	56.274.909,59
8	5	100,00	1.688.247,29	- 1.688.147,29	57.963.056,87
9	6	100,00	1.738.891,71	- 1.738.791,71	59.701.848,58
10	7	100,00	1.791.055,46	- 1.790.955,46	61.492.804,04
11	8	100,00	1.844.784,12	- 1.844.684,12	63.337.488,16
12	9	100,00	1.900.124,64	- 1.900.024,64	65.237.512,80
13	10	100,00	1.957.125,38	- 1.957.025,38	67.194.538,19
14	11	100,00	2.015.836,15	- 2.015.736,15	69.210.274,33
15	12	100,00	2.076.308,23	- 2.076.208,23	71.286.482,56
16	13	100,00	2.138.594,48	- 2.138.494,48	73.424.977,04
17	14	100,00	2.202.749,31	- 2.202.649,31	75.627.626,35

7.3 Cálculo del tiempo de negociación

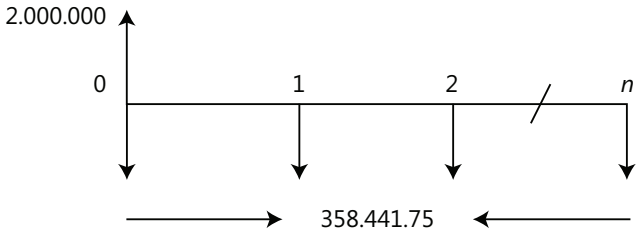
Es el número de pagos, pagaderos al principio del período, necesarios para amortizar una obligación. Se puede calcular en función del valor presente o del valor futuro.

En esta sección, inicialmente, se analizarán situaciones financieras que requerirán el cálculo del número de cuotas en función del valor de la obligación (P), el valor de la cuota anticipada (A) y la tasa de interés efectiva periódica (*i*). Posteriormente se analizarán las concernientes al cálculo del número de cuotas, conocido el valor futuro.

Ejemplo 5.33

Una obligación de $ 2.000.000 se va a cancelar con pagos mensuales iguales anticipados de $358.441.75. Si se cobra una tasa de interés del 3% mensual, calcular el número de pagos necesarios para cancelarla.

El flujo de caja es el siguiente:



$$n = \frac{\text{Log A} - \text{Log}\left[\text{A} - i\left(\text{P} - \text{A}\right)\right]}{\text{Log}\left(1 + i\right)} + 1 \qquad (5.10)$$

Reemplazando los valores del ejercicio en la fórmula, (5.10) se tiene:

$$n = \frac{\text{Log}\left(358.441.75\right) - \text{Log}\left[358.441.75 - 0.03\left(2.000.000 - 358.441.75\right)\right]}{\text{Log}\left(1.03\right)} + 1$$

$$n = \frac{5.55442 - 5.49023}{0.01284} + 1$$

$n = 6$ pagos

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	BGN	VDT
BGN	BGN	BGN	2.000.000 PV EXE	MODO INICIAL
2.000.000 PV	2.000.000 PV	SHIFT AC EXE AC	3 I % EXE	CLEAR DATA
3 I %	3 i %	2.000.000 F3	(-) 358.441.75 PMT EXE	2.000.000 PV
358.441.75 +/- PMT	(-) 358.441.75 PMT	3 F2	0 FV EXE	3 % IA
COMP n	COMP n EXE	(-) 358.441.75 F4	n SOLVE	358.441.75 +/- PMT
		COMP F1		N

En Excel: = NPER (Tasa; pago; VA; VF; tipo)
= NPER (3%; −358441,75; 2.000.000; 0; 1)

Solución con la hoja de cálculo Excel

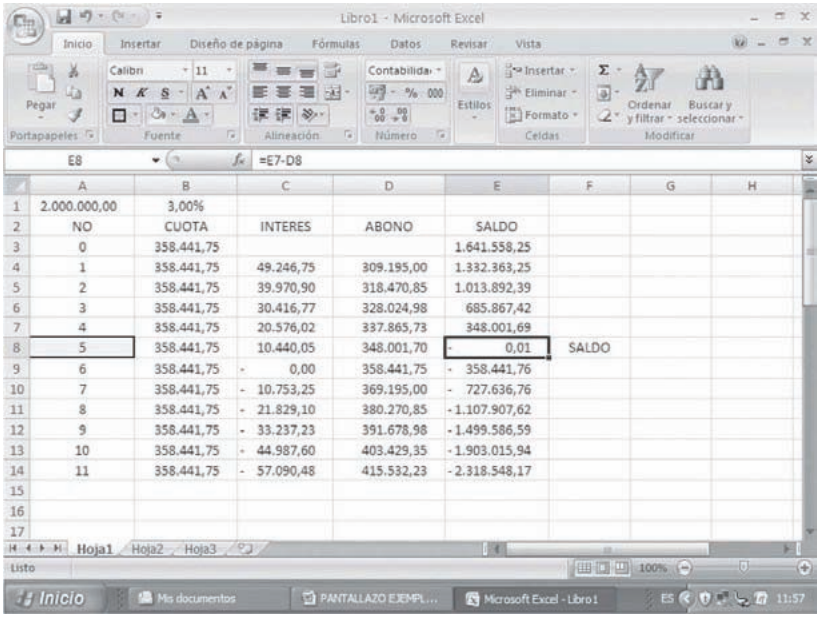
Figura 5.63

	A	B	C	D	E
1	2.000.000	3.00%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	358.441.75			=A1−B3
4	1	358.441.75	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	358.441.75			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
11	8	358.441.75			

En la celda A1 registramos el valor de la obligación y en la B1 la tasa de interés del 3,00%. Desde la celda B3 hasta la B11 registramos los pagos mensuales de $ 358.441.75 (aunque podrían ser más períodos). En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, el abono a capital y el saldo al final del período. (Ver figura 5.63).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E11 y observamos que en la celda E8 el saldo es igual a cero, lo que indica que la obligación se amortiza con 6 pagos. (Ver figura 5.64).

Figura 5.64



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	2.000.000,00	3,00%						
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO			
3	0	358.441,75			1.641.558,25			
4	1	358.441,75	49.246,75	309.195,00	1.332.363,25			
5	2	358.441,75	39.970,90	318.470,85	1.013.892,39			
6	3	358.441,75	30.416,77	328.024,98	685.867,42			
7	4	358.441,75	20.576,02	337.865,73	348.001,69			
8	5	358.441,75	10.440,05	348.001,70	- 0,01	SALDO		
9	6	358.441,75	- 0,00	358.441,75	- 358.441,76			
10	7	358.441,75	- 10.753,25	369.195,00	- 727.636,76			
11	8	358.441,75	- 21.829,10	380.270,85	- 1.107.907,62			
12	9	358.441,75	- 33.237,23	391.678,98	- 1.499.586,59			
13	10	358.441,75	- 44.987,60	403.429,35	- 1.903.015,94			
14	11	358.441,75	- 57.090,48	415.532,23	- 2.318.548,17			
15								
16								
17								

7.4 Cálculo de la tasa de interés en una anualidad anticipada

Generalmente, se adquieren activos por medio de cuotas periódicas anticipadas, desconociendo el costo del crédito, que viene a ser la tasa de interés cobrada. En el acápite 6, cap. 4 se explicó en detalle el efecto que produce cobrar en un crédito una tasa de interés anticipada en lugar de una vencida. Se dijo que, cuando se financia un artículo a una tasa de interés del 2.0% mensual anticipada, realmente se cobra una tasa del 2.04% mensual. Ahora nos interesa conocer el efecto análogo que produce pagar por un mismo crédito cuotas anticipadas en lugar de vencidas. Este es el propósito de este párrafo. Para ello se ilustrará un ejercicio en el que se hará el cálculo de la tasa de interés cuando las cuotas son vencidas y cuando son anticipadas, con el ánimo de que el lector aprecie la diferencia sustantiva entre las dos tasas de interés. Algunas veces se presenta la confusión de creer que al pagar cuotas anticipadas en un crédito, al mismo tiempo se está pagando una tasa anticipada[3]. Esto, por supuesto, es un error craso. Al aplicar las fórmulas de las anualidades, tanto vencidas como anticipadas, aparece el factor $(1 + i)^n$, en el que la tasa de interés i es una tasa vencida, por deducción. En las anualidades anticipadas, al pagar la primera cuota en el momento en que se recibe el préstamo se aumenta el costo del crédito, debido a que se presta una cantidad menor.

[3] Al hacer la deducción de la fórmula básica $F = P(1 + i)n$ resulta de capitalizar la tasa vencida (i) durante n períodos. Véase valor futuro a interés compuesto, acápite 3.2.

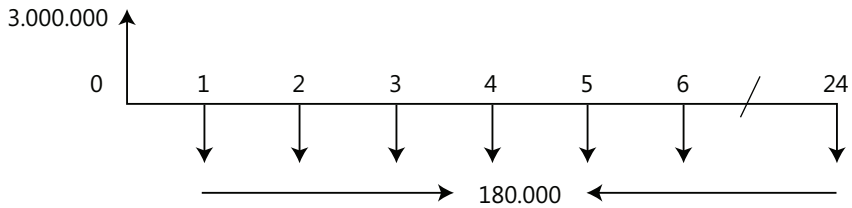
Ejemplo 5.34

Un artículo que cuesta $ 3.000.000 se va a financiar por medio de 24 cuotas mensuales de $ 180.000. Calcular la tasa de interés de financiación:

a. Las cuotas son vencidas

Para el cálculo de la tasa de interés es necesario plantear una ecuación de valor, que para este caso corresponde a la aplicación de la expresión (5.2).

$$A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] \tag{5.2}$$



$$180.000 = 3.000.000\left[\frac{i(1+i)^{24}}{(1+i)^{24} - 1}\right]$$

Resolviendo por interpolación lineal se obtiene un valor de $i = 3.15\%$ mensual.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)		VDT
			3.000.000 PV EXE	MODO FINAL
3.000.000 PV	3.000.000 PV	SHIFT AC EXE AC	24 n EXE	CLEAR DATA
24 n	24 n	3.000.000 F3	(-) 180.000 PMT EXE	3.000.000 PV
180.000 +/- PMT	(-) 180.000 PMT	24 F1	0 FV EXE	24 N
COMP I %	COMP i% EXE	(-) 180.000 F4	I % SOLVE	180.000 +/- PMT
		COMP F2		I %

En Excel: = TASA (nper; pago;VA; VF; tipo)

= TASA (24; −180000; 3000000; 0)

Se omite el parámetro tipo, porque las cuotas son vencidas.

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

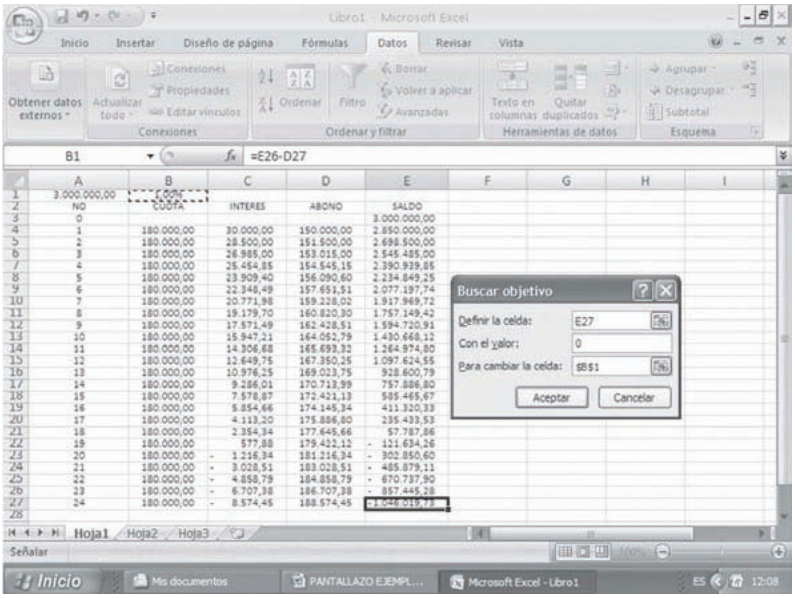
Figura 5.65

	A	B	C	D	E
1	3.000.000	1.0%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	180.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	180.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
27	24	180.000			

En la celda A1 escribimos 3.000.000, que corresponde al valor del artículo. En la celda B1 escribimos una tasa arbitraria, 1.0% en este caso. Desde la celda B4 hasta la B27 registramos el valor de las cuotas mensuales. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, abono a capital y saldo insoluto. (Ver figura 5.65).

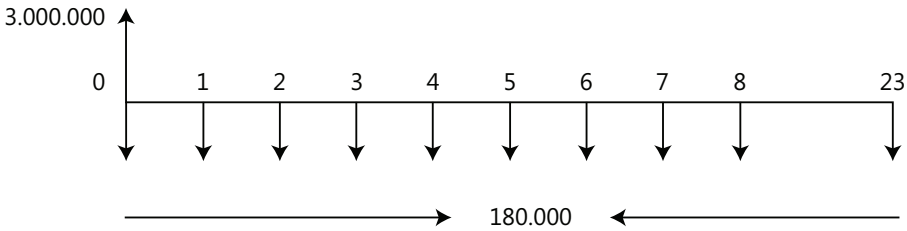
Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E27 y aplicando *Buscar objetivo* encontramos en la celda B1 un valor de 3.15% que corresponde al valor de la tasa de interés. (Ver figura 5.66).

Figura 5.66



b. Las cuotas son anticipadas.

Para calcular la tasa de interés cuando las cuotas son anticipadas se plantea una ecuación de valor apoyándonos en la expresión (5.7).



$$3.000.000 = 180.000 + 180.000\left[\frac{i(1+i)^{24-1}-1}{i(1+i)^{24-1}}\right]$$

Resolviendo por interpolación lineal se obtiene una tasa de interés de 3.47% mensual.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	BGN	VDT
BGN	BGN	BGN	3.000.000 PV EXE	MODO INICIAL
3.000.000 PV	3.000.000 PV	SHIFT AC EXE AC	24 n EXE	CLEAR DATA
24 n	24 n	3.000.000 F3	(-) 180.000 PMT EXE	3.000.000 PV
180.000 +/- PMT	(-) 180.000 PMT	24 F1	0 FV EXE	24 N
COMP I %	COMP i% EXE	(-) 180.000 F4	I % SOLVE	180.000 +/- PMT
		COMP F2		I %

En Excel: = TASA (nper; pago; VA; VF; tipo)

= TASA (24; −180.000; 3.000.000; 0; 1)

Se ingresa el valor de 1 en el parámetro tipo, para indicar que los pagos son anticipados.

Se observa que, por el sólo hecho de cancelar las cuotas anticipadas, la tasa de interés de la negociación pasa del 3,15% mensual a una tasa de 3.47% mensual.

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

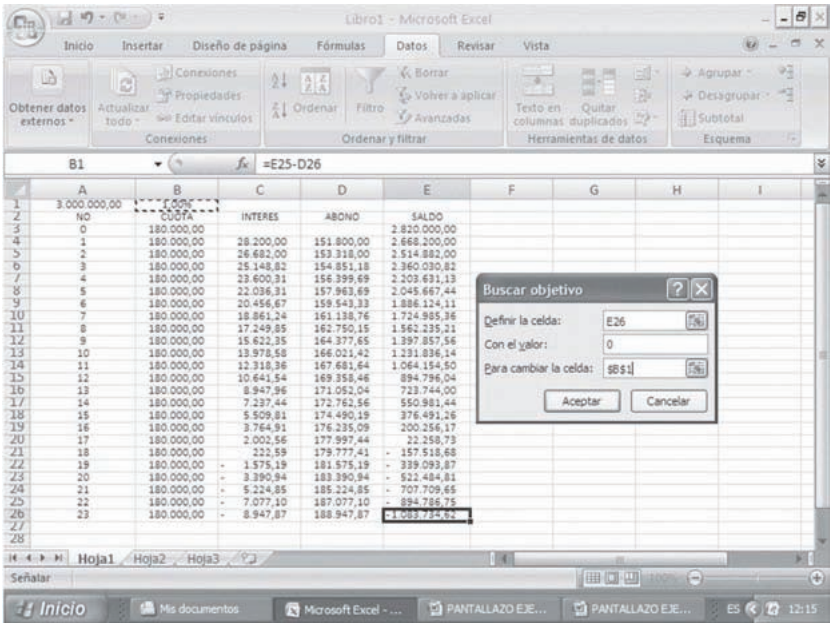
Figura 5.67

	A	B	C	D	E
1	3.000.000	1.0%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	180.000			=A1−B3
4	1	180.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	180.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
26	23	180.000			

En la celda A1 escribimos 3.000.000, que corresponde al valor del artículo, en B1 una tasa arbitraria de 1.0%. Desde la celda B3 hasta la B26 registramos el valor de las cuotas mensuales. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, abono a capital y saldo insoluto. (Ver figura 5.67).

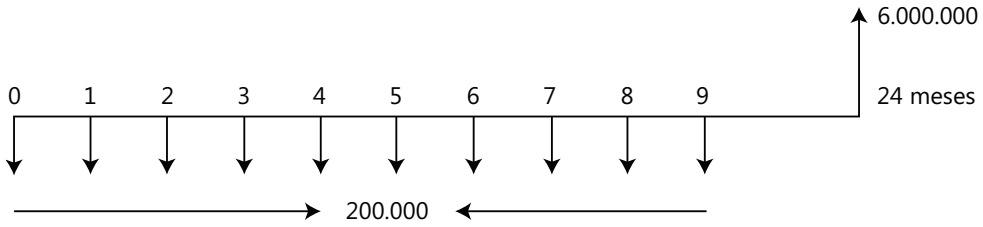
Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E26 y aplicando *Buscar objetivo* encontramos en la celda B1 un valor de 3.47% que corresponde al valor de la tasa de interés. (Ver figura 5.68).

Figura 5.68



Ejemplo 5.35

Un cliente hace 10 depósitos mensuales de $ 200.000 al principio de cada mes, iniciando hoy, y después de 2 años tiene disponible en su cuenta $ 6.000.000. ¿Qué tasa de interés le pagaron?



Se plantea la ecuación de valor con fecha focal en el mes 24.

$$200.000\left[\frac{(1+i)^{10}-1}{i}\right](1+i)^{15}=6.000.000$$

Por interpolación lineal se obtiene una tasa de 5.73% mensual.

CASIO FC 100	CASIO FC 200	CASIO FC 1.000	H. P. 19 B II
MODE 4 (CF)	MODE 4	MENU F5 (D.C.F.)	F. CAJA
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	SHIFT AC EXE AC	CLEAR DATA
200.000 +/- CFj	(-) 200.000 CFj	(-) 200.000 F2	200.000 +/- IMPUT
200.000 +/- CFj	(-) 200.000 CFj	(-) 200.000 F2	200.000 +/- IMPUT 9 IMPUT
9 Nj	9 Nj	9 F3	0 IMPUT 14 IMPUT
0 CFj	0 CFj	0 F2	6.000.000 IMPUT IMPUT
14 Nj	14 Nj	14 F3	CALC
6.000.000 CFj	6.000.000 CFj	6.000.000 F2	% TIR
COMP IRR	COMP IRR EXE	F5, F2	

En este ejercicio no se puede utilizar el menú del interés compuesto de la calculadora financiera, porque a pesar de que los depósitos son iguales y periódicos, el valor del ingreso (valor futuro) aparece períodos después del último depósito, rompiendo el concepto de la anualidad. Para que se conforme una anualidad vencida, el ingreso debería estar en el mes 9, y para que sea una anualidad anticipada el valor futuro debería estar ubicado en el mes 10.

Al ubicar la fecha focal en el momento cero, la ecuación de valor puede plantearse de la siguiente forma y el resultado que se obtendría sería exactamente igual:

$$200.000+200.000\left[\frac{(1+i)^{10-1}-1}{i(1+i)^{10-1}}\right]=\frac{6.000.000}{(1+i)^{24}}$$

Por la misma razón explicada en el párrafo anterior, aquí no aplica la función de Excel TASA.

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

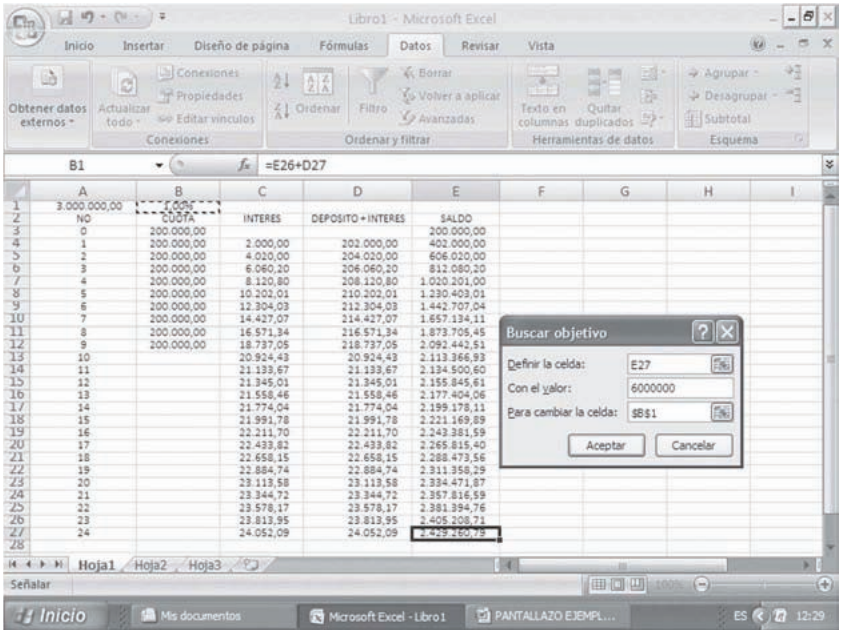
Figura 5.69

	A	B	C	D	E
1		2.00%			
2	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO+ INTERÉS	SALDO
3	0	200.000			=B3
4	1	200.000	=E3*$B$1	=B4+C4	=E3+D4
5	2	200.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
27	24				

En la celda B1 escribimos una tasa arbitraria del 2%, que es la incógnita del ejercicio. Desde la celda B3 hasta la B12 escribimos 200.000 como valor de los depósitos mensuales. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, el abono a capital y el saldo insoluto. (Ver figura 5.69).

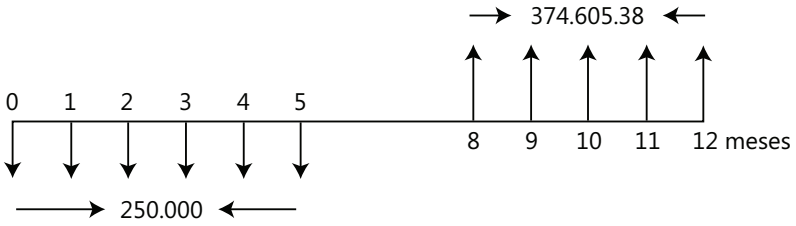
Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E27 y aplicando *Buscar objetivo* encontramos en la celda B1 un valor de 5.73%. (Ver figura 5.70).

Figura 5.70



Ejemplo 5.36

Pedro ahorra, a partir de hoy y durante 6 meses, $ 250.000 cada mes. Desde el mes 8 hasta el mes 12 retira $374.605.38 quedando en la cuenta un saldo de cero al final del año. ¿Qué tasa de interés le pagaron?



Colocando la fecha focal en el momento cero se plantea la ecuación de valor.

$$250.000 + 250.000\left[\frac{(1+i)^{6-1}-1}{i(1+i)^{6-1}}\right] = \frac{374.605.38\dfrac{\left[(1+i)^{5}-1\right]}{i(1+i)^{5}}}{(1+i)^{7}}$$

Resolviendo por interpolación lineal se obtiene una tasa de interés del 3% mensual.

CASIO FC 100	CASIO FC 200	CASIO FC 1.000	H. P. 19 B II
MODE 4 (CF)	MODE 4	MENU F5 (D.C.F.)	F. CAJA
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	SHIFT AC EXE AC	CLEAR DATA
250.000 +/- CFj	(-) 250.000 CFj	(-) 250.000 F2	250.000 +/- IMPUT
250.000 +/- CFj	(-) 250.000 CFj	(-) 250.000 F2	250.000 +/- IMPUT 5 IMPUT
5 Nj	5 Nj	5 F3	0 IMPUT 2 IMPUT
0 CFj	0 CFj	0 F2	374.605.38 IMPUT 5 IMPUT
2 Nj	2 Nj	2 F3	CALC
374.605.38 CFj	374.605.38 CFj	374.605.38 F2	% TIR
5 Nj	5 Nj	5 F3	
COMP IRR	COMP IRR EXE	F5, F2	

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

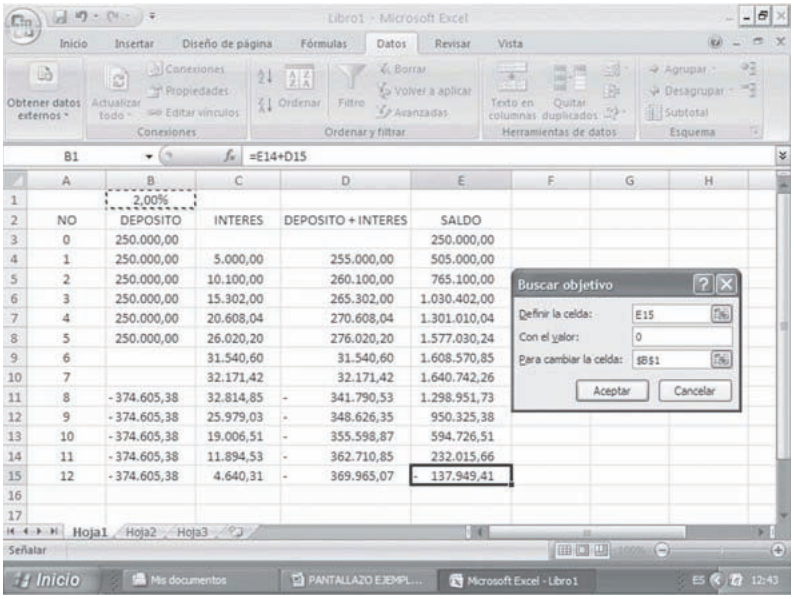
Figura 5.71

	A	B	C	D	E
1		2.00%			
2	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO+INTERÉS	SALDO
3	0	250.000			=B3
4	1	250.000	=E3*$B$1	=B4+C4	=E3+D4
.....	.....	.....	.....	.....	.....
11	8	−374.605.38			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12	−374.605.38			

En la celda B1 escribimos un valor arbitrario del 2,00%. Desde la celda B3 hasta B8 registramos el valor de los depósitos de $ 250.000 (con signo positivo). Desde la celda B11 hasta la celda B15 registramos los retiros de $ 374.605.38 (con signo negativo). En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, depósito más interés y saldo al final del período. (Ver figura 5.71).

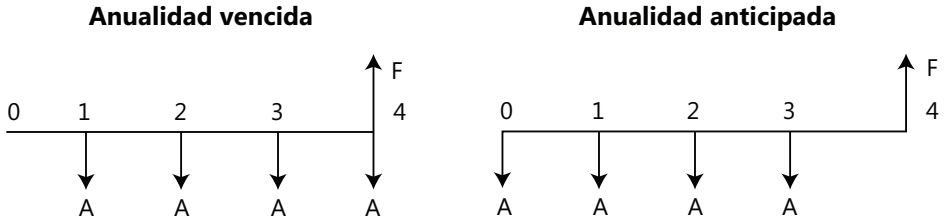
Rellenamos las celdas en blanco copiando las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y con *Buscar objetivo* encontramos un valor en B1 del 3.00%. (Ver figura 5.72).

Figura 5.72



7.5 Valor futuro de una anualidad anticipada

En el inciso 4.3 se determinó la forma de calcular el valor futuro de una anualidad vencida, llegando a una expresión que presupone que el valor futuro se encuentra en la fecha del último pago (ingreso), con la limitación de que el último pago no devenga intereses. Se trata ahora de calcular el valor futuro de una anualidad en la que los pagos (ingresos) se hacen al iniciarse el período. En el flujo de caja que se aprecia a continuación el lector observará que: *el valor futuro de la anualidad anticipada aparece un período después de realizado el último pago (ingreso), lo que indica que este pago sí devenga intereses.*



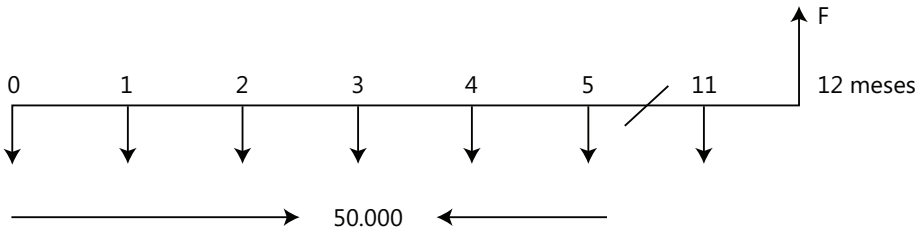
Se observa que la anualidad vencida comienza con período y termina con pago, y la anualidad anticipada comienza con pago y termina con período.

$$F = A\left[\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i}\right] \tag{5.11}$$

Ejemplo 5.37

Katya Elena recibe al principio de cada mes la suma de $ 100.000 por concepto del arriendo de una bodega de su propiedad. En el mismo momento en que recibe el pago del arriendo deposita la mitad en una cuenta de ahorros que le reconoce una tasa de interés del 3.0% mensual. Ella desea saber cuánto tendrá disponible en la cuenta al final del año.

El flujo de caja se muestra a continuación:



$$F = 50.000\left[\frac{(1.03)^{12+1} - (1.03)}{0.03}\right] \qquad (5.11)$$

$$F = \$\ 730.889.52$$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENUF2	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	(COMPOUND)	BGN	VDT
BGN	BGN	PAYMENT: BGN	(-) 50.000 PMT EXE	MODO INICIAL
50.000 +/- PMT	(-) 50.000 PMT	SHIFT AC EXE AC	12 n EXE	CLEAR DATA
12 n	12 n	(-) 50.000 F4	3 I %	50.000 +/- PAGO
3 I %	3 I %	12 F1	0 PV EXE	12 N
COMP FV	COMP FV EXE	3 F2	FV SOLVE	3 I %
		COMP F5		VF

En Excel: = VF (tasa; nper; pago; VA; tipo)

= VF (3%; 12; −50.000; 0; 1)

Se ingresa el valor de 1 en el parámetro tipo, para indicar que los pagos son anticipados.

Solución con la hoja de cálculo Excel

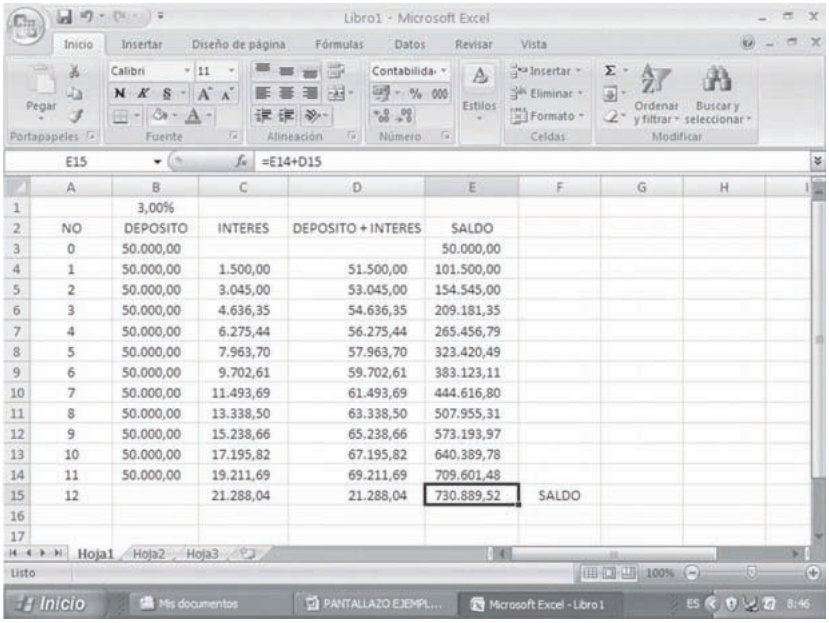
Figura 5.73

	A	B	C	D	E
1		3.00%			
2	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO+ INTERÉS	SALDO
3	0	50.000			=B3
4	1	50.000	=E3*$B$1	=B4+C4	=E3+D4
.....	.....	.....	.....	.....	.....
14	11	50.000			
15	12		.....	.....	SALDO

En la celda B1 escribimos la tasa de interés del 3.0%. Desde la celda B3 hasta B14 registramos el valor de los depósitos de $ 50.000. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, depósito más interés y saldo al final del período. (Ver figura 5.73).

Rellenamos las celdas en blanco copiando las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y encontramos un valor en E15 de $ 730.889.52. (Ver figura 5.74).

Figura 5.74



8. ANUALIDAD DIFERIDA

Es aquella en la que el primer pago se realiza unos períodos después de realizada la operación financiera. El momento en que queda formalizada la operación financiera se llama *momento de convenio*. Es un ejemplo de una anualidad diferida, un préstamo bancario en el que el pago de las cuotas se inicia un año después de recibir el desembolso del préstamo.

En las anualidades diferidas el tiempo que transcurre sin amortización de capital se llama *período de gracia o tiempo muerto*. No obstante, durante el período de gracia hay causación de intereses. Este sistema de pagos causa cierta confusión, porque se piensa que durante el tiempo muerto o período de gracia no hay pago de intereses. Por esto, es necesario diferenciar entre el pago de intereses y la causación de los mismos. Durante el tiempo muerto siempre habrá causación de intereses que se originan por el uso del dinero tomado en préstamo. Si los intereses no se pagan durante este período, se capitalizan y, en consecuencia, el capital inicial se verá incrementado al final de éste. En este caso podemos decir que los intereses se causaron pero no se pagaron. Si los intereses se pagan periódicamente durante el tiempo muerto, el capital inicial permanece constante. En este caso podemos decir que los intereses se causaron y se pagaron. En los casos que se analizarán a continuación el lector podrá entender claramente cómo funciona este sistema de pagos.

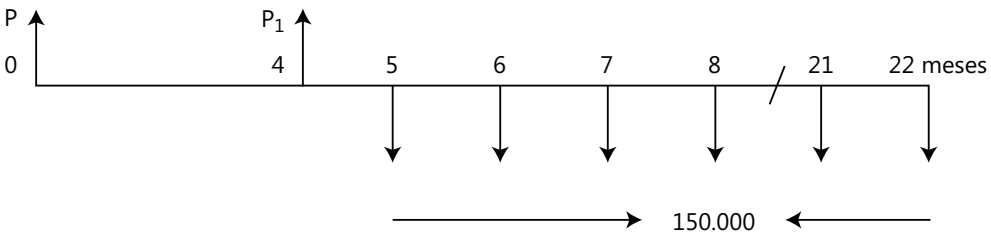
En las anualidades diferidas, se pueden presentar dos casos:

- Cuando durante el período de gracia los intereses causados no se cancelan periódicamente, sino que se van capitalizando. En este caso, al final del período de gracia el capital habrá aumentado y, por lo tanto, para calcular el valor de los pagos iguales se debe tener en cuenta este valor equivalente.
- Cuando durante el período de gracia los intereses causados se pagan periódicamente. En este caso, al final del período de gracia el capital inicial permanece constante.

Ejemplo del primer caso. Cuando los intereses causados no se pagan.

Ejemplo 5.38

Se adquiere hoy un electrodoméstico financiado con 18 cuotas mensuales iguales de $ 150.000 cada una, debiendo cancelar la primera cuota dentro de 5 meses. Si la operación financiera se realiza al 3% mensual, calcular el valor del electrodoméstico.



Se calcula el valor presente de la serie de pagos iguales, aplicando la fórmula (5.1); esto es, calcular P conocidos el pago igual (A), la tasa de interés (*i*) y el número de pagos (*n*).

$$P_1 = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] \tag{5.1}$$

$$P_1 = 150.000\left[\frac{(1+0.03)^{18} - 1}{0.03(1+0.03)^{18}}\right]$$

$$P_1 = \$\ 2.063.026.96$$

El valor presente de una anualidad vencida queda ubicado al principio del período en que se hace el primer pago, o sea, que el valor P_1 obtenido, está ubicado en el mes 4. Como se pide calcular el valor del electrodoméstico, tenemos que calcular el valor presente en el momento cero. Para calcularlo aplicamos la fórmula básica, $P = F/(1 + i)^n$, que nos permite traer el dinero del futuro al presente.

$$P = \frac{F}{(1+i)^n}$$

$$P = \frac{2.063.026.96}{(1+0.03)^4}$$

$$P = \$\ 1.832.972.73$$

En las anualidades diferidas, algunas veces, el interés que se cobra durante el tiempo muerto difiere del interés tomado para el cálculo de las cuotas. En estos casos es necesario hacer los ajustes correspondientes.

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

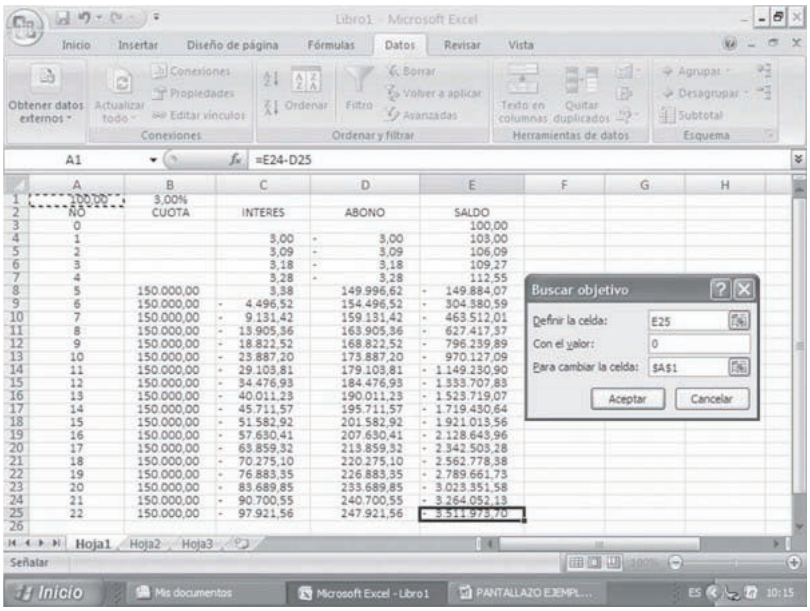
Figura 5.77

	A	B	C	D	E
1	3.000.000	3.0%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1		=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
.....	.....	.....	.....	.....	.....
8	5	150.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
25	22	150.000			

En la celda A1 escribimos 100 como valor arbitrario, que corresponde al valor del electrodoméstico que vamos a calcular. En la celda B1 escribimos la tasa de interés del 3%. Desde la celda B8 hasta la B25 registramos el valor de las cuotas mensuales de $ 150.000. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, abono a capital y saldo insoluto. (Ver figura 5.77).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E25 y *Buscar objetivo* encontramos en la celda A1 un valor de $ 1.832.972.73 que corresponde al valor del electrodoméstico. (Ver figura 5.78).

Figura 5.78

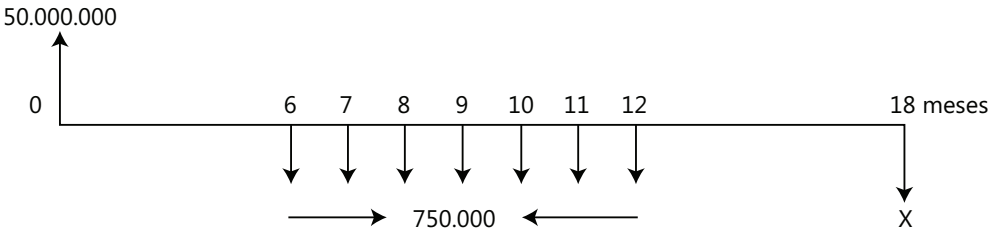


Ejemplo del segundo caso. Cuando los intereses causados se pagan.

Cuando los intereses se pagan, el valor de P_1 es igual a P, ya que lo único que hace diferente una unidad monetaria a otra es el valor de los intereses. Como los intereses se van pagando durante el período de gracia el valor del electrodoméstico no cambia. Es decir, para este caso, el valor del electrodoméstico es de $ 2.063.026.96.

Ejemplo 5.39

Una deuda de $ 50.000.000 se debe cancelar con pagos desde el mes 6 al mes 12 de $ 750.000 y un pago adicional en el mes 18. Si se cobra una tasa de interés del 3% mensual, ¿cuál es el valor del pago adicional?



Con fecha focal en el momento cero se plantea la ecuación de valor.

$$50.000.000 = \frac{750.000\left[\dfrac{(1.03)^7 - 1}{0.03(1.03)^7}\right]}{(1.03)^5} + \frac{X}{(1.03)^{18}}$$

$$X = \$\ 78.259.617.64$$

El valor presente de la anualidad formada por 7 pagos de $ 750.000 queda ubicado en el mes 5, pero como la fecha focal está en el momento cero, se hace necesario trasladar el valor presente obtenido en el mes 5 a la fecha focal. Por esta razón, en la ecuación de valor, el primer término del segundo miembro de la ecuación se divide entre $(1.03)^5$.

A simple vista, el resultado es exagerado, porque el valor del pago adicional resulta mayor que la misma deuda. ¿Cuál es la explicación? El valor de las cuotas no alcanza a cubrir el costo financiero, por lo tanto, cada vez que se paga una cuota el saldo aumenta y, además, durante el período de gracia, porque no se dijo lo contrario, los intereses no se pagaron sino que se capitalizaron.

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

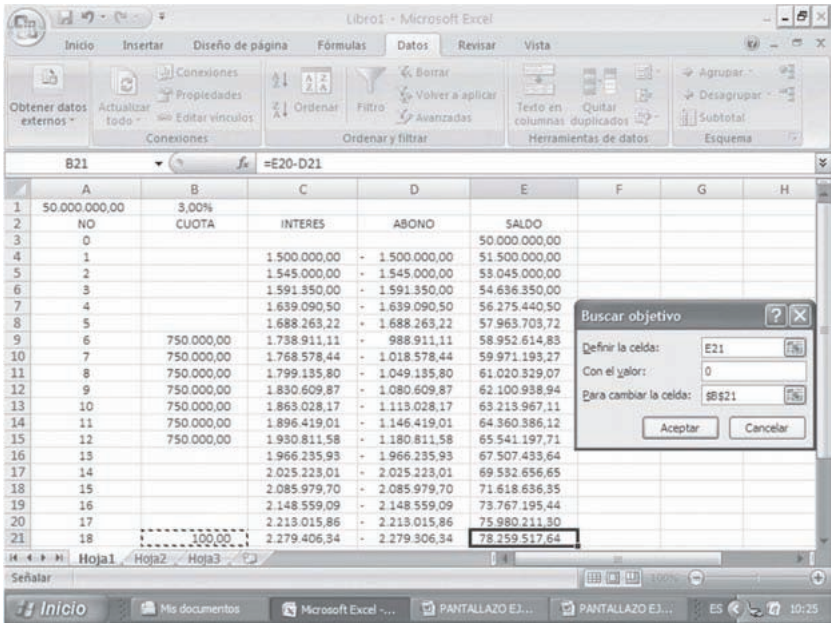
Figura 5.79

	A	B	C	D	E
1	50.000.000	3.0%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1		=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
.....	.....	.....	.....	.....	.....
9	6	750.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12	750.000			
.....	.....	.....	.....	.....	
21	18	100			

En la celda A1 escribimos $ 50.000.000 como valor de la deuda y en la B1 la tasa de interés del 3%. Desde la celda B9 hasta la B15 registramos el valor de $ 750.000 que corresponde a los pagos mensuales. En la celda B21 escribimos 100 como valor arbitrario que corresponde a la incógnita del ejercicio. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, abono a capital y saldo insoluto. (Ver figura 5.79).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E21 y aplicando *Buscar objetivo* encontramos en la celda B21 un valor de $ 78.259.617.64 que corresponde al valor del pago adicional. (Ver figura 5.80).

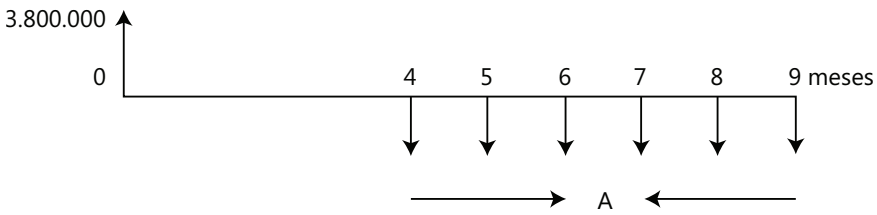
Figura 5.80



Ejemplo 5.40

Se están debiendo $ 3.800.000 a una tasa de interés del 2.0% mensual, para cancelarlos por medio de 6 cuotas mensuales iguales, pagándose la primera 4 meses después de adquirida la obligación. Calcular el valor de las cuotas.

Se construye el flujo de caja:



Para plantear la ecuación de valor se escoge como fecha focal el momento cero.

$$3.800.000 = \frac{A\left[\dfrac{(1.02)^6 - 1}{0.02(1.02)^6}\right]}{(1.02)^3}$$

$$A = \$\ 719.921.48$$

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

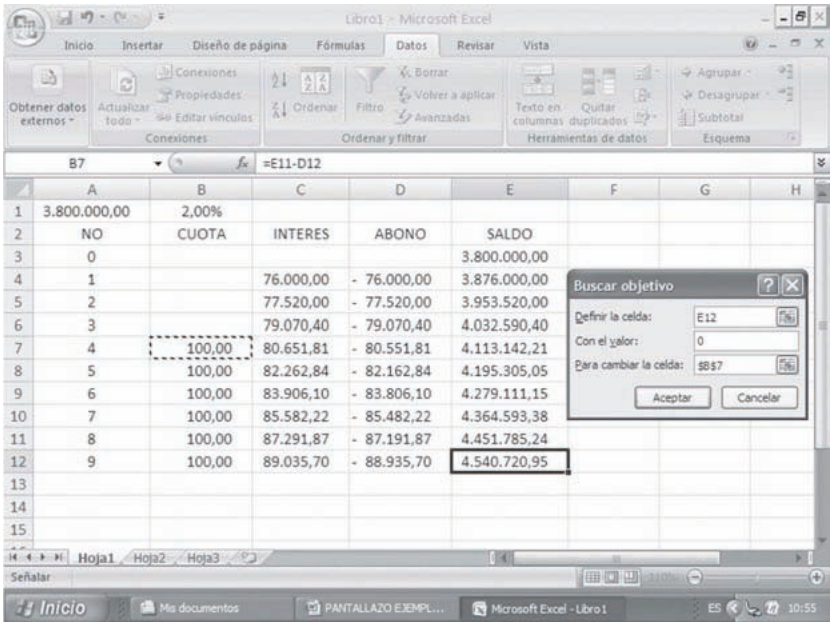
Figura 5.81

	A	B	C	D	E
1	3.800.000	2.0%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1		=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
.....	.....	.....	.....	.....	.....
7	4	100			
8	5	=B7	.....	.....	.....
12	9	100			

En la celda A1 escribimos $ 3.800.000 como valor de la deuda y en la B1 la tasa de interés del 2.0%. En la celda B7 escribimos 100 como valor arbitrario, que corresponde a la incógnita del ejercicio, y calculamos la cuota en B8 y copiamos hasta B12. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, abono a capital y saldo insoluto. (Ver figura 5.81).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E12 y aplicando *Buscar objetivo* encontramos en la celda B7 un valor de $ 719.921.48 que corresponde al valor de la cuota mensual. (Ver figura 5.82).

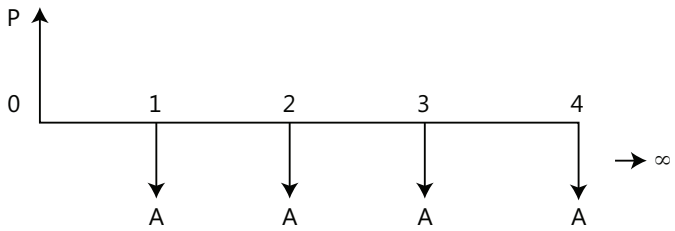
Figura 5.82



	A	B	C	D	E
1	3.800.000,00	2,00%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				3.800.000,00
4	1		76.000,00	- 76.000,00	3.876.000,00
5	2		77.520,00	- 77.520,00	3.953.520,00
6	3		79.070,40	- 79.070,40	4.032.590,40
7	4	100,00	80.651,81	- 80.551,81	4.113.142,21
8	5	100,00	82.262,84	- 82.162,84	4.195.305,05
9	6	100,00	83.906,10	- 83.806,10	4.279.111,15
10	7	100,00	85.582,22	- 85.482,22	4.364.593,38
11	8	100,00	87.291,87	- 87.191,87	4.451.785,24
12	9	100,00	89.035,70	- 88.935,70	4.540.720,95
13					
14					
15					

9. Anualidad perpetua

Es aquella en la que no existe el último pago, o aquella cuyo plazo no tiene fin. Como todo en la vida tiene su final, podemos decir que una anualidad es perpetua cuando está conformada por muchos pagos, como por ejemplo, un préstamo a largo plazo en el que solamente se pagan los intereses; cuotas de mantenimiento de una carretera; el pago de un arriendo para quien nunca podrá comprar la propiedad, etc. Como la anualidad perpetua supone que los pagos son indefinidos, no existirá valor futuro.



9.1 Valor presente de una anualidad perpetua

Es el valor ubicado en el presente equivalente a una serie infinita de pagos. Su valor se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$P = \frac{A}{i} \tag{5.15}$$

Donde: P = valor presente A = pago igual y periódico i = tasa de interés.

Ejemplo 5.41

El señor Pedro Picapiedra paga durante 2 años intereses por valor de $ 500.000 mensuales, a una tasa de interés del 4% mensual. Calcular el valor del préstamo.

$$P = \frac{500.000}{0.04} = \$12.500.000$$

Ejemplo 5.42

Un inversionista decide arrendar una propiedad por $ 450.000 mensuales anticipados, en forma indefinida. Recibe una oferta que consiste en recibir un solo pago en el día de hoy, equivalente a toda la serie de pagos. Si su tasa de oportunidad es del 3.50% mensual, ¿ qué pago único debe aceptar?

El ejercicio hace referencia a una anualidad perpetua anticipada. Para plantear la solución, nos apoyamos inicialmente en la expresión (5.15) que permite calcular el valor presente de una anualidad perpetua vencida. Para convertir la anualidad anticipada en vencida, utilicemos el procedimiento que consiste en eliminar la primera cuota:

$$P - A = \frac{A}{i}$$

De donde:

$$P = A + \frac{A}{i} \qquad (5.16)$$

Reemplazando los valores en la fórmula, se tiene:

$$P = 450.000 + \frac{450.000}{0.035}$$

$$P = \$\ 13.307.142.86$$

El resultado indica la equivalencia entre recibir hoy un pago único de $ 13.307.142.86, a recibir en forma indefinida un arriendo de $ 450.000, empezando en el día de hoy.

Ejemplo 5.43

Al morir, una persona deja un capital de $ 200.000.000 a favor de un ancianato, para que reciba el valor de los intereses únicamente, sin tocar el capital. Si una entidad financiera le reconoce una tasa de interés de 0.80% mensual, ¿cuánto recibirá el ancianato permanentemente?

$$P = \frac{A}{i}$$

Despejando A, se tiene:

$$A = P \times i$$

$$A = 200.000.000 \times 0.008 = \$\ 1.600.000$$

10. Anualidad general

En las anualidades estudiadas hasta el momento, el período de pago coincide con el período de capitalización de intereses. Todas ellas se llaman *anualidades simples*. Hablamos, entonces, de pagos mensuales y conocemos la tasa de interés mensual, o pagos trimestrales y conocemos la tasa efectiva trimestral. En el caso de las *anualidades generales*, los períodos de pago no coinciden con los períodos de interés, por ejemplo, pagos mensuales con una tasa efectiva anual, etc.

Antes de entrar a resolver esta clase de problemas, tenemos qué definir dos conceptos importantes:

10.1 Período de capitalización

Es el período convenido para convertir el interés en capital. Cuando en una operación financiera se expresa una tasa del 3% mensual, esto nos indica que el período de capitalización es el mes.

10.2 Período de pago

Es el período de pago o recibo de cuotas. En una operación financiera la tasa puede ser del 3% mensual, pero si las cuotas se reciben o pagan trimestralmente, el período de pago es un trimestre.

Para resolver ejercicios de anualidades generales el sistema más práctico consiste en ajustar la tasa:

- Ajustar la tasa de interés. Es decir, hacer que coincidan los períodos de interés con los períodos de pago.

Ejemplo 5.44

Hallar el valor acumulado de 20 pagos trimestrales vencidos de $ 50.000 cada uno suponiendo una tasa de interés del 36% capitalizable mensualmente.

Primera solución. Se ajusta la tasa de interés.

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.36}{12} = 0.03 = 3\% \text{ mensual}$$

Conocida la tasa efectiva mensual, calculamos la tasa efectiva trimestral equivalente.

$$TET = (1 + TEM)^3 - 1$$

$$TET = (1 + 0.03)^3 - 1$$

$$TET = 0.0927 = 9.27\% \text{ trimestral}$$

Aplicamos la fórmula para calcular el valor futuro equivalente a una serie de pagos iguales, o sea, calculamos F conocidos la tasa de interés efectiva (*i*), valor de la cuota (A) y el número de pagos (*n*).

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$F = 50.000\left[\frac{(1+0.0927)^{20} - 1}{0.0927}\right]$$

$$F = \$\ 2.636.835.11$$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENU	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	(-) 1 PV EXE	VDT
1 +/- PV	(-) 1 PV	SHIFT AC EXE AC	12 n EXE	CLEAR DATA
12 n	12 n	(-) 1 F3	3 I % EXE	1 +/- VA
3 I %	3 I %	12 F1	0 PMT EXE	3 % IA
COMP FV - 1	COMP FV – 1	3 F2	VF SOLVE – 1	12 N
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	COMP F5 – 1	(-) 50.000 PMT EXE	VF – 1
50.000 +/- PMT	(-) 50.000 PMT	SHIFT AC EZE AC	20 n EXE	50.000 +/- PAGO
20 n	20 n	(-) 50.000 F4	9.27 I % EXE	20 N
9.27 I %	9.27 I %	20 F1	0 PV EXE	9.27 % IA
COMP FV	COMP FV EXE	9.27 F2	FV EXE	VF
		COMP F5 EXE		

En Excel: = VF (Nom/n; nper; pago; VA; tipo) − 1

= VF (36%/12; 3; 0; −1) − 1

= VF (tasa; nper; pago; VA; tipo)

= VF (9,27%; 20; −50000; 0;)

Solución con la hoja de cálculo Excel

Figura 5.81

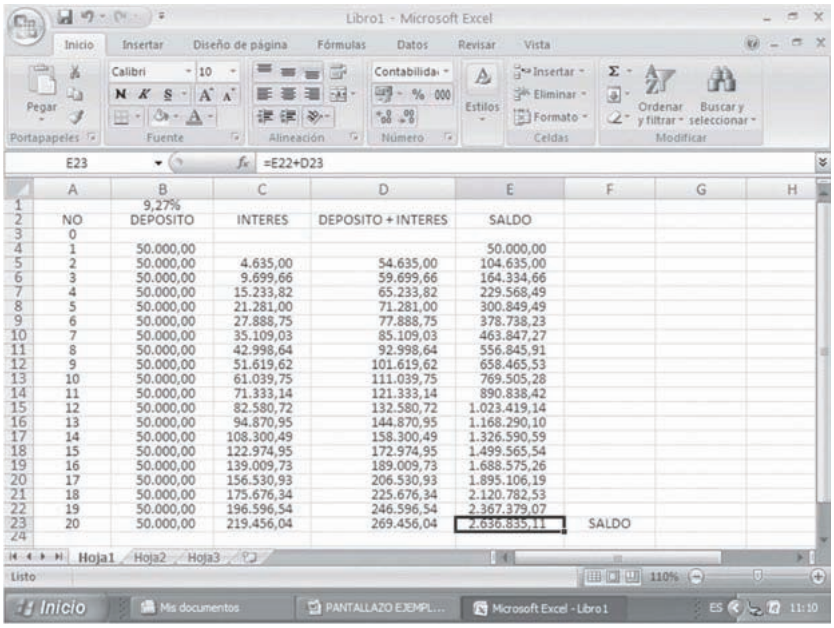
	A	B	C	D	E
1		=VF(36%/12; 3; 0; −1) −1			
2	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO+INTERÉS	SALDO
3	0				
4	1	50.000			=B4
5	2	50.000	=E4*$B$1	=B5+C5	=E4+D5
23	20	50.000			

En este ejercicio la tasa de interés no está expresada como tasa efectiva periódica, por lo tanto, tenemos que hacer la respectiva conversión, tal como aparece en la celda B1. Ver Capítulo 4, caso de efectiva periódica menor a efectiva periódica mayor. Desde la celda B4 hasta B23 registramos el valor de los depósitos de $ 50.000. En las celdas

C5, D5 y E5 calculamos intereses, depósito más interés y saldo al final del período. (Ver figura 5.81).

Rellenamos las celdas en blanco copiando las fórmulas de las celdas C5, D5 y E5 en el rango C6:E23 y obtenemos un saldo final en la celda E23 de $ 2.636.835.11. (Ver figura 5.82).

Figura 5.82



NO	DEPOSITO	INTERES	DEPOSITO + INTERES	SALDO
0				
1	50.000,00			50.000,00
2	50.000,00	4.635,00	54.635,00	104.635,00
3	50.000,00	9.699,66	59.699,66	164.334,66
4	50.000,00	15.233,82	65.233,82	229.568,49
5	50.000,00	21.281,00	71.281,00	300.849,49
6	50.000,00	27.888,75	77.888,75	378.738,23
7	50.000,00	35.109,03	85.109,03	463.847,27
8	50.000,00	42.998,64	92.998,64	556.845,91
9	50.000,00	51.619,62	101.619,62	658.465,53
10	50.000,00	61.039,75	111.039,75	769.505,28
11	50.000,00	71.333,14	121.333,14	890.838,42
12	50.000,00	82.580,72	132.580,72	1.023.419,14
13	50.000,00	94.870,95	144.870,95	1.168.290,10
14	50.000,00	108.300,49	158.300,49	1.326.590,59
15	50.000,00	122.974,95	172.974,95	1.499.565,54
16	50.000,00	139.009,73	189.009,73	1.688.575,26
17	50.000,00	156.530,93	206.530,93	1.895.106,19
18	50.000,00	175.676,34	225.676,34	2.120.782,53
19	50.000,00	196.596,54	246.596,54	2.367.379,07
20	50.000,00	219.456,04	269.456,04	2.636.835,11

Ejemplo 5.45

Una universidad, para facilitar el ingreso de estudiantes al postgrado en finanzas, financia parte de su valor así:

valor a financiar = $ 1.400.000

tasa de interés = 3% mensual

número de pagos = 4 pagos trimestrales.

Se pide calcular el valor de cada pago trimestral.

Se observa que el período de capitalización es diferente al período de pago. Utilizamos el primer sistema, que consiste en ajustar la tasa de interés.

Conocida la tasa efectiva mensual se calcula la tasa efectiva trimestral equivalente.

$$TET = (1 + TEM)^3 - 1$$

$$TET = (1 + 0.03)^3 - 1$$

$$TET = 0.0927 = 9.27\% \text{ trimestral}$$

Calculamos el valor de A, conocidos P, i, n.

$$A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$A = 1.400.000\left[\frac{0.0927(1+0.0927)^4}{(1+0.0927)^4 - 1}\right]$$

$$A = \$\ 434.699.89$$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENU	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	(-) 1 PV EXE	VDT
1 +/- PV	(-) 1 PV	SHIFT AC EXE AC	3 n EXE	CLEAR DATA
3 n	3 n	(-) 1 F3	3 I % EXE	1 +/- VA
3 I %	3 I %	3 F1	0 PMT EXE	3 % IA
COMP FV - 1	COMP FV – 1	3 F2	VF SOLVE – 1	3 N
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	COMP F5 – 1	1.400.000 PV EXE	VF – 1
1.400.000 PV	1.400.000 PV	SHIFT AC EZE AC	4 n EXE	1.400.000 VA
4 n	4 n	1.400.000 F3	9.27 I % EXE	4 N
9.27 I %	9.27 I %	4 F1	0 PMT EXE	9.27 % IA
COMP PMT	COMP PMT EXE	9.27 F2	PMT EXE	PAGO
		COMP F4 EXE		

En Excel: = VF (tasa; nper; pago; VA; tipo) −1

= VF (3%; 3; 0; −1) − 1

= PAGO (tasa; nper; VA; VF; tipo)

= PAGO (9,27%; 4; 1.400.000; 0)

Solución con *Buscar objetivo* de excel

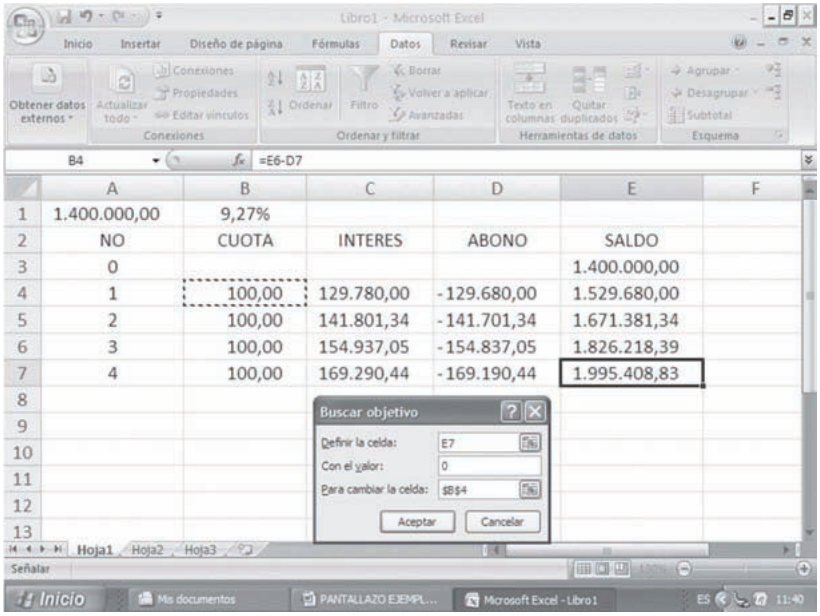
Figura 5.83

	A	B	C	D	E
1	1.400.000	=VF(3%; 3; 0; −1)−1			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	100	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4	.....	.....	.....
7	4	100			

En este ejercicio la tasa de interés está expresada en un período menor (mensual) al de las cuotas (trimestrales), por lo tanto, se requiere hacer el ajuste de la tasa de interés, tal como aparece en la celda B1. Ver Capítulo 4, caso de efectiva periódica menor a efectiva periódica mayor. En la celda A1 registramos el valor a financiar de $ 1.400.000. En la celda B4 escribimos 100 como valor arbitrario y calculamos el segundo pago en B5, y copiamos B5 hasta B7. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo al final del período. (Ver figura 5.83).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E7 y aplicando *Buscar objetivo* obtenemos en B4 un valor de $ 434.699.90, que corresponde al valor de las cuotas trimestrales. (Ver figura 5.84).

Figura 5.84

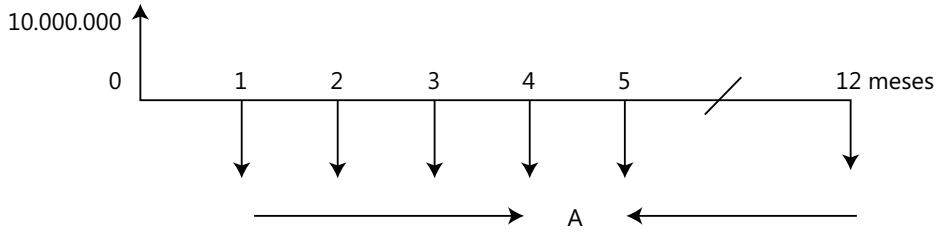


	A	B	C	D	E	F
1	1.400.000,00	9,27%				
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO	
3	0				1.400.000,00	
4	1	100,00	129.780,00	-129.680,00	1.529.680,00	
5	2	100,00	141.801,34	-141.701,34	1.671.381,34	
6	3	100,00	154.937,05	-154.837,05	1.826.218,39	
7	4	100,00	169.290,44	-169.190,44	1.995.408,83	

Ejemplo 5.46

El señor Pedro Picapiedra recibe un préstamo de $ 10.000.000 para pagarlo con 12 cuotas mensuales iguales. Si le cobran una tasa de interés del 38% efectivo anual, calcular el valor de las cuotas.

El siguiente es el flujo de caja:



Se observa que la tasa de interés está expresada como efectiva anual y que los pagos son mensuales, por lo tanto, es necesario ajustar la tasa de interés.

Aplicamos la ecuación de la tasa efectiva. $TEA = (1 + TEM)^n - 1$

$$0.38 = (1 + TEM)^{12} - 1$$

$$(1.38)^{(1/12)} - 1 = TEM$$

$$TEM = 2.72\% \text{ mensual}$$

Calculamos el valor de la cuota (A) aplicando la fórmula del valor presente, conocidos: la tasa de interés, el valor presente del préstamo y el número de pagos.

$$A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$A = 10.000.000\left[\frac{0.0272(1+0.0272)^{12}}{(1+0.0272)^{12} - 1}\right]$$

$$A = \$\ 987.925.25$$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENU	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	(-) 1 PV EXE	VDT
1 +/- PV	(-) 1 PV	SHIFT AC EXE AC	12 n EXE	CLEAR DATA
12 n	12 n	(-) 1 F3	1.38 FV EXE	1 +/- VA
1.38 FV	1.38 FV	12 F1	0 PMT EXE	12 N
COMP i %	COMP I % EXE	1.38 F5	I % EXE	1.38 VF
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	COMP F2	10.000.000 PV EXE	% IA
10.000.000 PV	10.000.000 PV	SHIFT AC EZE AC	12 n EXE	10.000.000 VA
12 n	12 n	10.000.000 F3	2.72 I % EXE	12 N
2.72 i %	2.72 i %	12 F1	0 FV EXE	2.72 % IA
COMP PMT	COMP PMT EXE	2.72 F2	PMT EXE	PAGO
		COMP F4 EXE		

En Excel: = TASA (nper; pago;VA; VF; tipo)

= TASA (12; 0; −1; 1,38)

= PAGO (tasa; nper; VA; VF; tipo)

= PAGO (2,72%; 12; 10.000.000; 0)

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

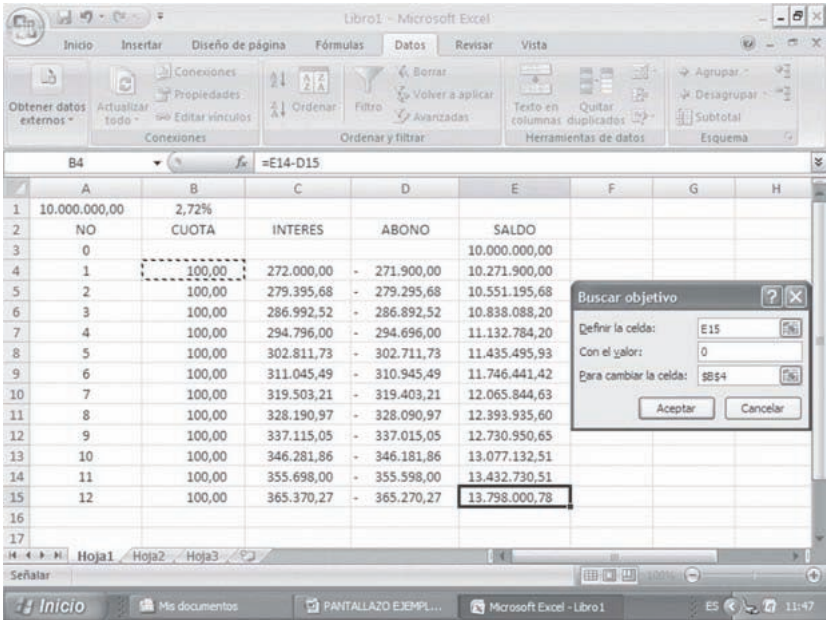
Figura 5.85

	A	B	C	D	E
1	10.000.000	=TASA(12; 0; −1; 1; 38)			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	100	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12				

En este ejercicio la tasa de interés está expresada como efectiva anual y las cuotas de pago son mensuales, por lo tanto, se requiere convertirla en una tasa efectiva mensual equivalente, tal como aparece en la celda B1. Ver Capítulo 4, caso de efectiva periódica mayor a efectiva periódica menor. En la celda A1 registramos el valor a financiar de $ 10.000.000. En la celda B4 escribimos 100, como valor arbitrario, y calculamos la segunda cuota en B5 y copiamos hasta B5. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo al final del período. (Ver figura 5.85).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicando *Buscar objetivo* obtenemos en B4 un valor de $ 987.925.17, que corresponde al valor de las cuotas mensuales. (Ver figura 5.86).

Figura 5.86



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	10.000.000,00	2,72%						
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO			
3	0				10.000.000,00			
4	1	100,00	272.000,00	- 271.900,00	10.271.900,00			
5	2	100,00	279.395,68	- 279.295,68	10.551.195,68			
6	3	100,00	286.992,52	- 286.892,52	10.838.088,20			
7	4	100,00	294.796,00	- 294.696,00	11.132.784,20			
8	5	100,00	302.811,73	- 302.711,73	11.435.495,93			
9	6	100,00	311.045,49	- 310.945,49	11.746.441,42			
10	7	100,00	319.503,21	- 319.403,21	12.065.844,63			
11	8	100,00	328.190,97	- 328.090,97	12.393.935,60			
12	9	100,00	337.115,05	- 337.015,05	12.730.950,65			
13	10	100,00	346.281,86	- 346.181,86	13.077.132,51			
14	11	100,00	355.698,00	- 355.598,00	13.432.730,51			
15	12	100,00	365.370,27	- 365.270,27	13.798.000,78			
16								
17								

APÉNDICE:

Arrendamiento financiero (Leasing)

Esta modalidad de financiamiento ha adquirido una gran importancia en los últimos años. El *Leasing* es un contrato mediante el cual el dueño de un activo (el arrendador) le otorga a otra parte (el arrendatario) el derecho exclusivo de utilizarlo, normalmente por un período de tiempo convenido, a cambio del pago de un alquiler (*Van Horne, 1988*).

Básicamente existen dos tipos de leasing: el *operativo* y el *financiero*. En el leasing operativo el arrendatario utiliza los servicios del activo durante el tiempo convenido, pero al final el activo es devuelto al arrendador; mientras que en el financiero, el arrendatario goza de una opción de compra del activo al final del plazo convenido, por un porcentaje de su costo inicial, cuyo valor generalmente es del 10%. Nuestro interés en este texto se centra en el arrendamiento financiero en contraste con el de operación.

Con el sistema de leasing se pueden adquirir toda clase de activos generadores de renta, ya sean muebles o inmuebles, por ejemplo: maquinaria para construcción, equipos de minería, oficinas y bodegas, equipos de cómputo, vehículos.

El leasing opera mediante un sencillo contrato de arrendamiento, en el que el cliente elige el activo que necesita y el proveedor del mismo. La compañía de leasing compra el activo y lo entrega al cliente en calidad de arrendamiento durante un plazo pactado; durante este plazo, el cliente paga un canon periódico de arrendamiento por el uso y goce del activo. Al final del contrato, el cliente adquiere el activo por un porcentaje de su costo inicial. Para el pago del canon periódico existen diferentes modalidades de pago, que pueden ser vencidos o anticipados: canon fijo mensual, canon variable ajustado a la DTF, cánones crecientes y decrecientes y cánones fijos con tasa variables (sólo varía el plazo o el último canon). En este apéndice sólo abordaremos la modalidad de pago constituida por el canon fijo mensual, por ser el más utilizado.

Algunas ventajas del leasing

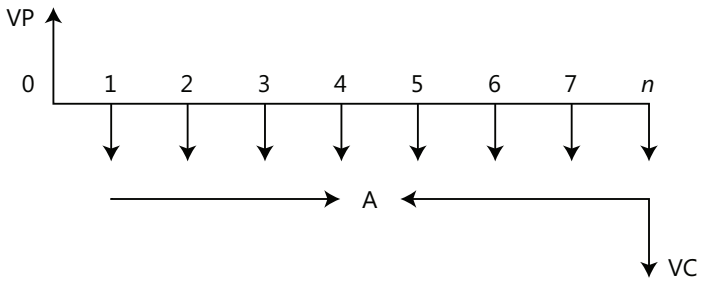
- Las tasas de interés cobradas por las compañías de leasing son competitivas en el mercado financiero, y, por las ventajas tributarias, el costo real del crédito resulta ser menor que el de otros sistemas tradicionales.
- El nivel de endeudamiento del cliente no se afecta al adquirir un activo, debido a que su valor no se constituye en pasivo.
- No se afecta la liquidez del cliente, porque el activo se adquiere sin necesidad de desembolsar ninguna cantidad inicial de dinero.
- A diferencia del crédito tradicional, que sólo contempla la deducción de los intereses como gastos financieros, el sistema de leasing permite la deducción de todo el canon de arrendamiento. La Legislación colombiana actual es selectiva, dependiendo del tamaño de la empresa. Para empresas pequeñas se mantiene el esquema de deducir todo el canon como gasto del período; para las demás, sólo la parte correspondiente a los intereses[4].

[4] Para las grandes empresas en Colombia (patrimonio bruto igual o superior a $ 8.012.300.000), sólo la parte del canon correspondiente a intereses se considera gasto financiero.

Cálculo del canon de arrendamiento vencido

El cálculo del canon periódico corresponde a la cuota de una anualidad vencida, con cuota global (opción de compra) al final del término del contrato.

El flujo de caja siguiente muestra que el pago del canon se hace vencido el período, y que al final del contrato se cancela la opción de compra.



Con fecha focal en el momento cero se plantea la ecuación de valor.

$$VP = \frac{VC}{(1+i)^n} + A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$VP - \frac{VC}{(1+i)^n} = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$VP(1+i)^n - VC = A(1+i)^n\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$i[VP(1+i)^n - VC] = A[(1+i)^n - 1]$$

$$A = \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right] \times \left[VP(1+i)^n - VC\right]$$

Siendo:

A = valor del canon de arrendamiento

n = número de cuotas

i = tasa de interés

VP = valor del activo

VC = valor de la opción de compra

Ejemplo 5.47

Una empresa decide adquirir un vehículo por medio de un leasing financiero, con las siguientes condiciones:

- Valor del vehículo: $ 25.000.000
- Plazo: 36 meses
- Modalidad de pago: cuota fija mensual vencida
- Tasa de interés: 2.0% mensual
- Opción de compra: 10%

Se pide calcular el valor del canon mensual.

Antes de entrar a aplicar la fórmula que realiza el cálculo directo del canon, procedemos a exponer el procedimiento que la genera:

- Se calcula el valor presente de la opción de compra (P).

$$P = \frac{2.500.000}{(1.02)^{36}} = \$\ 1.225.557.87$$

- Se calcula el valor base (VP) para determinar el canon mensual.

$$VP = \text{valor del activo valor presente opción de compra}$$
$$VP = \$\ 25.000.000 - \$\ 1.225.557.87$$
$$VP = \$\ 23.774.442.12$$

- Se calcula el canon de arrendamiento mensual.

$$A = VP\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$A = 23.774.442.12\left[\frac{0.02(1.02)^{36}}{(1.02)^{36} - 1}\right]$$

$$A = \$\ 932.739.18$$

Aplicando, ahora, la expresión diseñada para tal efecto, se tiene:

$$A = \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right] \times \left[VP(1+i)^n - VC\right]$$

$$A = \left[\frac{0.02}{(1+0.02)^{36} - 1}\right] \times \left[25.000.000(1+0.02)^{36} - 2.500.000\right]$$

$$A = \$\ 932.739.18$$

La empresa tiene que pagar durante 36 meses un canon mensual de $ 932.739.18 y al final del plazo, además del canon ordinario, tiene que pagar la opción de compra por $ 2.500.000.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENU	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	25.000.000 PV EXE	VDT
25.000.000 PV	25.000.000 PV	SHIFT AC EXE AC	2 I % EXE	CLEAR DATA
2 i %	2 i %	25.000.000 F3	36 n EXE	25.000.000 VA
36 n	36 n	2 F2	(-) 2.500.0000 FV EXE	2 % IA
2.500.000 +/- FV	(-) 2.500.000	36 F1	PMT SOLVE	36 N
COMP PMT	COMP PMT EXE	(-) 2.500.000 F5		2.500.000 +/- VF
		COMP F4		PAGO

En Excel: = PAGO (tasa; nper; VA; VF; tipo)

= PAGO (2%; 36; 25.000.000; −2.500.000)

Comparando la financiación del vehículo por el sistema de Leasing financiero con un crédito tradicional, se podría observar la diferencia en el valor de las cuotas mensuales.

En el crédito tradicional, el valor de las cuotas corresponde a la cuota de una anualidad vencida.

$$A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$A = 25.000.000\left[\frac{0.02(1+0.02)^{36}}{(1+0.02)^{36} - 1}\right]$$

$$A = \$\ 980.821.31$$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENU	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	25.000.000 PV EXE	VDT
25.000.000 PV	25.000.000 PV	SHIFT AC EXE AC	2 I % EXE	CLEAR DATA
2 i %	2 i %	25.000.000 F3	36 n EXE	25.000.000 VA
36 n	36 n	2 F2	0 FV EXE	2 % IA
COMP PMT	COMP PMT EXE	36 F1	PMT SOLVE	36 N
		COMP F4		PAGO

En Excel: = PAGO (tasa; nper; VA; VF; tipo)

= PAGO (2%; 36; 25.000.000; 0)

La cuota en un crédito tradicional resulta ser mayor debido a que en el sistema de Leasing parte del valor del vehículo (opción de compra) se paga al final del contrato, mientras que en el crédito tradicional el valor total del vehículo se difiere en el pago de las cuotas.

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

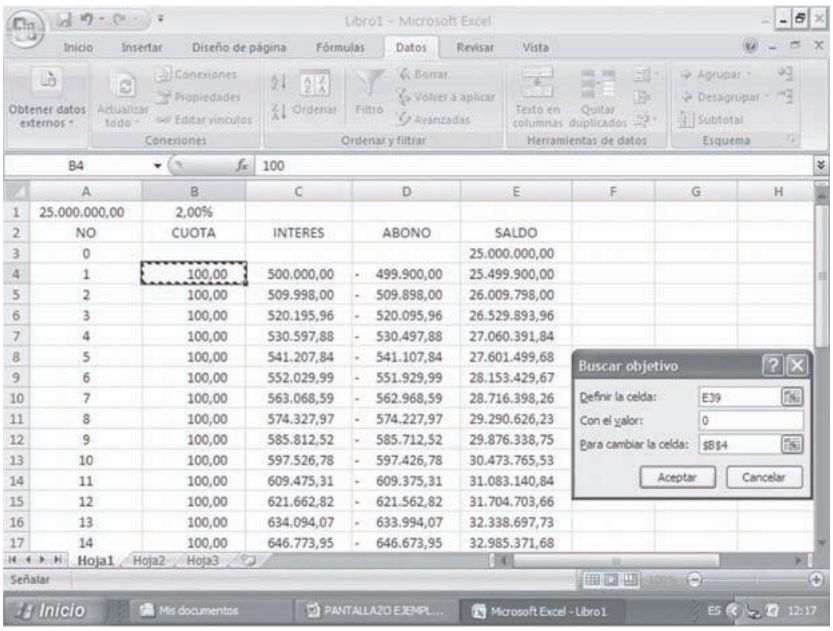
Figura 5.87

	A	B	C	D	E
1	25.000.000	2.00%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	100	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
39	36	=B38+2.500.000			

En la celda A1 escribimos $ 25.000.000 que corresponde al valor del vehículo y en la B1 la tasa de interés del 2.00%. En las celdas B4 hasta B38 escribimos un valor arbitrario de 100, y en la celda B39 escribimos =B38+2.500.000 (cuota+opción de compra). En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, abono a capital y saldo insoluto. (Ver figura 5.87).

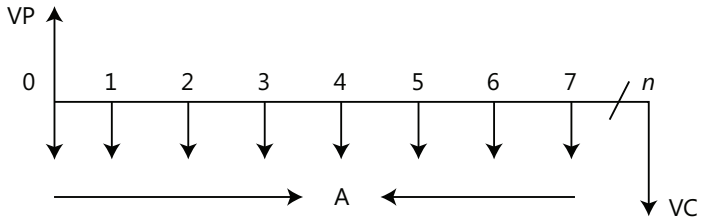
Copiamos las fórmulas en C4, D4 y E4 en el rango C5:E39 y aplicando *Buscar objetivo* de Excel encontramos un valor de $ 932.739.18 en la celda B4, que corresponde al canon de arrendamiento mensual. Al final de mes 36 se pagará este canon más la opción de compra. (Ver figura 5.88).

Figura 5.88



Cálculo del canon de arrendamiento anticipado

El primer canon de arrendamiento, pagado en el momento cero, se aplica en un 100% al capital.



Se plantea en el momento cero la ecuación de valor.

$$VP = A(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] + \frac{VC}{(1+i)^n}$$

La primera parte de la ecuación de valor corresponde a la expresión (5.8 a), que calcula el valor presente de una anualidad anticipada, y la segunda parte es el valor presente equivalente al VC ubicado *n* períodos después de la fecha focal.

$$VP - \frac{VC}{(1+i)^n} = A(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$VP(1+i)^n - VC = A(1+i)(1+i)^n\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$i[VP(1+i)^n - VC] = A(1+i)[(1+i)^n - 1]$$

$$A = \frac{\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]\left[VP(1+i)^n - VC\right]}{(1+i)}$$

Ejemplo 5.48

Con los mismos datos del ejemplo anterior, calcule el canon mensual anticipado.

Análogamente, desarrollemos, en primer lugar, el procedimiento para calcular el canon anticipado sin utilizar la fórmula.

- Se calcula el valor presente de la opción de compra (P).

$$P = \frac{2.500.000}{(1.02)^{36}} = \$\,1.225.557.87$$

- Se calcula el valor base (VP) para determinar el canon mensual.

  VP = valor del activo valor presente opción de compra

  VP = $ 25.000.000 − $ 1.225.557.87

  VP = $ 23.774.442.12

- Se calcula el canon de arrendamiento mensual. Como el primer canon se cancela en el momento cero, el problema se reduce a calcular el valor de la cuota de una anualidad anticipada, para lo cual utilizamos cualquiera de las dos expresiones diseñadas para tal efecto en el acápite 7.2.

$$A = \frac{VP}{\left[1 + \left[\frac{(1+i)^{n-1} - 1}{i(1+i)^{n-1}}\right]\right]}$$

$$A = \frac{23.774.442.12}{\left[1 + \left[\frac{(1+0.02)^{36-1} - 1}{0.02(1+0.02)^{36-1}}\right]\right]}$$

$$A = \$\ 914.450.18$$

Aplicando, ahora, la fórmula para calcular el canon, se tiene:

$$A = \frac{\left[\frac{0.02}{(1+0.02)^{36} - 1}\right]\left[25.000.000(1+0.02)^{36} - 2.500.000\right]}{(1+0.02)}$$

$$A = \$\ 914.450.18$$

La empresa debe cancelar 36 cuotas mensuales anticipadas de $ 914.450.18 y al final del plazo pagar la opción de compra por $ 2.500.000.

Se ingresa el valor de 1 en el parámetro tipo, para indicar que los pagos son anticipados.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENU	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	25.000.000 PV EXE	VDT
BEGIN	BEGIN	BEGIN	BEGIN	MODO INICIAL
25.000.000 PV	25.000.000 PV	SHIFT AC EXE AC	2 I % EXE	CLEAR DATA
2 i %	2 i %	25.000.000 F3	36 n EXE	25.000.000 VA
36 n	36 n	2 F2	(-) 2.500.0000 FV EXE	2 % IA
2.500.000 +/- FV	(-) 2.500.000	36 F1	PMT SOLVE	36 N
COMP PMT	COMP PMT EXE	(-) 2.500.000 F5		2.500.000 +/- VF
		COMP F4		PAGO

En Excel: = PAGO (tasa; nper; VA; VF; tipo)

= PAGO (2%; 36; 25.000.000; −2.500.000; 1)

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

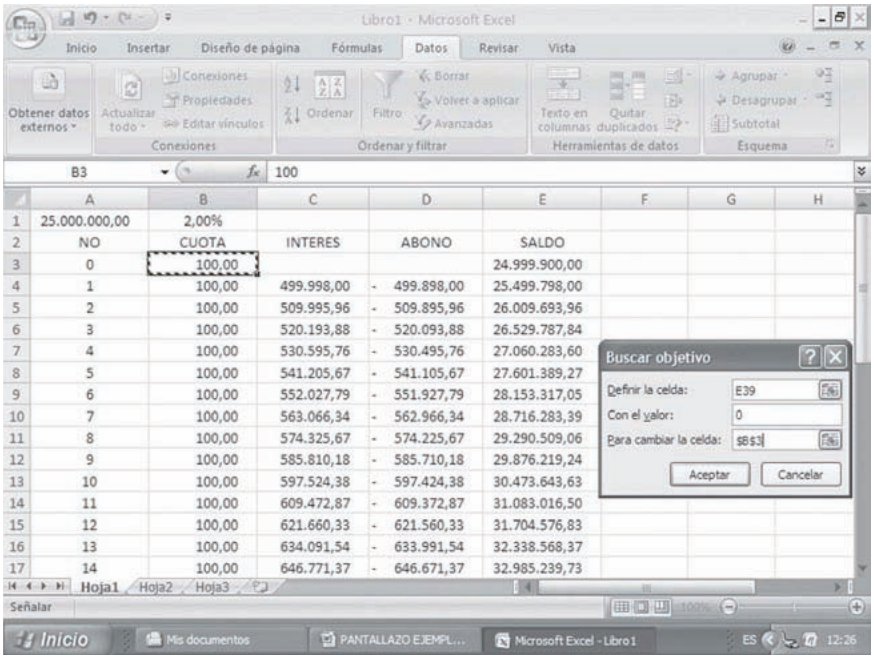
Figura 5.89

	A	B	C	D	E
1	25.000.000	2.00%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	100			=A1−B3
4	1	=B3	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2				
.....	.....	.....	.....	.....	.....
38	35				
39	36	2.500.000			

En la celda A1 escribimos $ 25.000.000 que corresponde al valor del vehículo y en la B1 la tasa de interés del 2.00%. En las celdas B3 escribimos un valor arbitrario de 100, y en la celda B4 colocamos la segunda cuota. En la celda B39 escribimos la opción de compra. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, abono a capital y saldo insoluto. (Ver figura 5.89).

Copiamos las fórmulas en C4, D4 y E4 en el rango C5:E39 y aplicando *Buscar objetivo* de Excel encontramos un valor de $ 914.450.18 en la celda B4, que corresponde al canon de arrendamiento mensual. En el mes 36 se pagará la opción de compra por valor de $ 2.500.000. (Ver figura 5.90).

Figura 5.90



EJERCICIO 1. Una empresa comercial vende equipos de sonido con una cuota inicial de $ 500.000 y 12 cuotas mensuales de $ 185.500. Si se carga el 30% con capitalización mensual, hallar el valor de contado.

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.30}{12} = 2.50\% \text{ mensual}$$

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

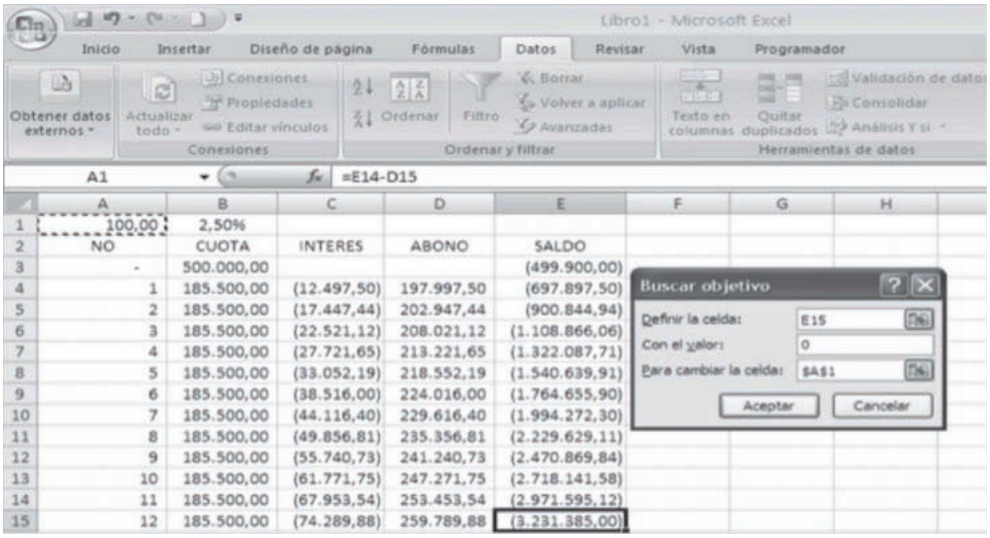
$$P(1+0.025)^{12} = 500.000(1+0.025)^{12} + 185.500\left[\frac{(1+0.025)^{12}-1}{0.025}\right]$$

$$P = \$\ 2.402.815.33$$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	100	2,50%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	500.000			=A1−B3
4	1	185.500	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12	185.500			

En la celda A1 escribimos un valor arbitrario y en la celda B1 la tasa de interés. En la celda B3 registramos el valor de la cuota inicial. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Desde la celda B4 hasta la B15 escribimos el valor de la cuota mensual. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicamos Buscar Objetivo.



	A	B	C	D	E
1	100,00	2,50%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	-	500.000,00			(499.900,00)
4	1	185.500,00	(12.497,50)	197.997,50	(697.897,50)
5	2	185.500,00	(17.447,44)	202.947,44	(900.844,94)
6	3	185.500,00	(22.521,12)	208.021,12	(1.108.866,06)
7	4	185.500,00	(27.721,65)	213.221,65	(1.322.087,71)
8	5	185.500,00	(33.052,19)	218.552,19	(1.540.639,91)
9	6	185.500,00	(38.516,00)	224.016,00	(1.764.655,90)
10	7	185.500,00	(44.116,40)	229.616,40	(1.994.272,30)
11	8	185.500,00	(49.856,81)	235.356,81	(2.229.629,11)
12	9	185.500,00	(55.740,73)	241.240,73	(2.470.869,84)
13	10	185.500,00	(61.771,75)	247.271,75	(2.718.141,58)
14	11	185.500,00	(67.953,54)	253.453,54	(2.971.595,12)
15	12	185.500,00	(74.289,88)	259.789,88	(3.231.385,00)

EJERCICIO 2. Calcular el valor de los depósitos semestrales necesarios, en una cuenta de ahorros que paga el 30% con capitalización semestral, para tener en 5 años un capital de $ 19.560.000.

Calculamos A en función del valor futuro.

$$A = F\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right] = 19.560.000\left[\frac{0.15}{(1+0.15)^{10} - 1}\right]$$

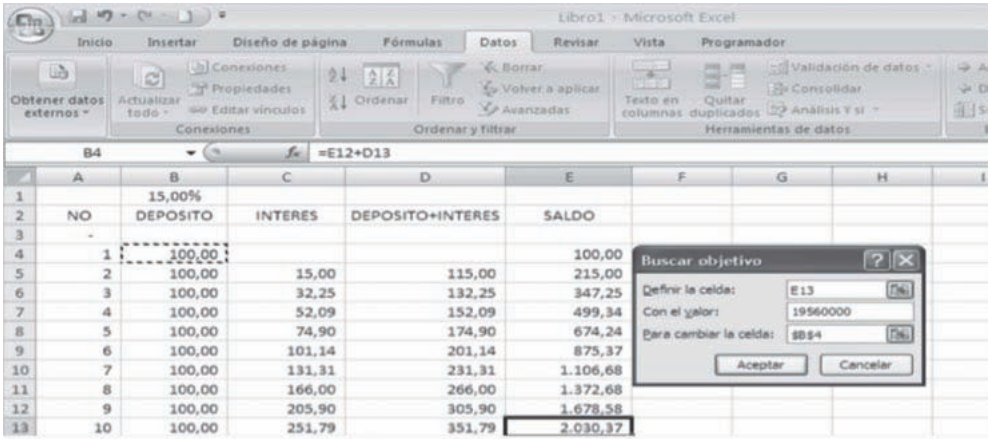
$$A = \$\ 963.370.34$$

En Excel: = PAGO (15%; 10; 0; −19.560.000)

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1		15%			
2	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO+INTERÉS	SALDO
3	0				
4	1	100			=B4
5	2	=B4	=E4*$B$1	=B5+C5	=E4+D5
....	.....	.....	.....	.....	.....
13	10				

En la celda B1 escribimos la tasa de interés del 15%. En la celda B4 escribimos como depósito un valor arbitrario y lo copiamos hasta la celda B13. En las celdas C5, D5 y E5 calculamos intereses, depósito más interés y saldo al final del período. Copiamos las fórmulas de las celdas C5, D5 y E5 en el rango C6:E13 y aplicamos *Buscar objetivo*.



EJERCICIO 3. El propietario de un activo tiene las siguientes alternativas:

a) Venderlo hoy de contado por $ 3.500.000.

b) Arrendarlo por $ 400.000 mensuales vencidos durante un año.

Si la tasa de interés es del 48% capitalizable mensualmente, ¿cuál decisión debe tomar?

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.48}{12} = 4.00\% \text{ mensual}$$

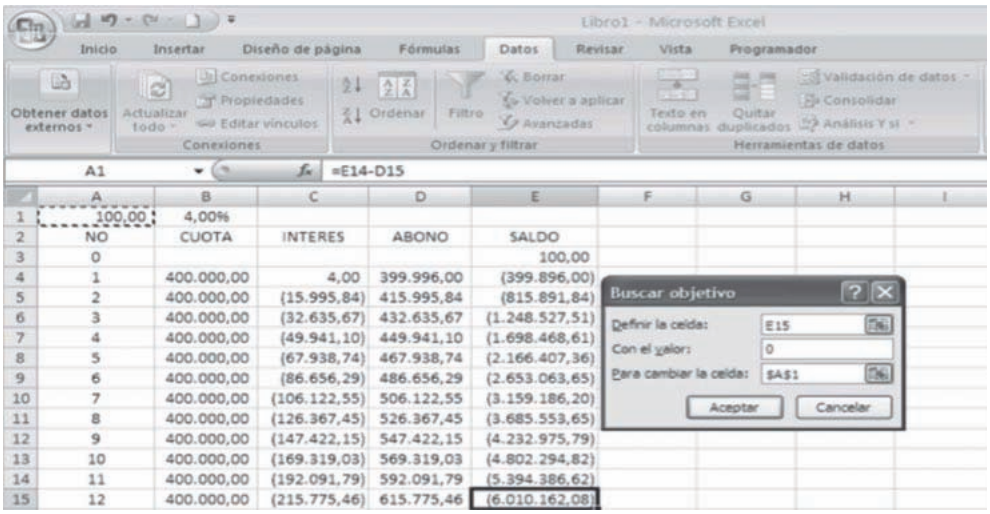
Opción b: Calculamos el valor presente de los arriendos:

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] = 400.000\left[\frac{(1+0.04)^{12} - 1}{0.04(1+0.04)^{12}}\right] = \$\ 3.754.029.50$$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	100	4,00%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	400.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12	400.000			

En la celda A1 escribimos un valor arbitrario y en la celda B1 la tasa de interés. Desde la celda B4 hasta la celda B15 escribimos el valor del arriendo mensual. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicamos *Buscar Objetivo*.



	A	B	C	D	E
1	100,00	4,00%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				100,00
4	1	400.000,00	4,00	399.996,00	(399.896,00)
5	2	400.000,00	(15.995,84)	415.995,84	(815.891,84)
6	3	400.000,00	(32.635,67)	432.635,67	(1.248.527,51)
7	4	400.000,00	(49.941,10)	449.941,10	(1.698.468,61)
8	5	400.000,00	(67.938,74)	467.938,74	(2.166.407,36)
9	6	400.000,00	(86.656,29)	486.656,29	(2.653.063,65)
10	7	400.000,00	(106.122,55)	506.122,55	(3.159.186,20)
11	8	400.000,00	(126.367,45)	526.367,45	(3.685.553,65)
12	9	400.000,00	(147.422,15)	547.422,15	(4.232.975,79)
13	10	400.000,00	(169.319,03)	569.319,03	(4.802.294,82)
14	11	400.000,00	(192.091,79)	592.091,79	(5.394.386,62)
15	12	400.000,00	(215.775,46)	615.775,46	(6.010.162,08)

Según los resultados obtenidos, el propietario del activo debe aceptar la segunda alternativa.

EJERCICIO 4. Usted desea comprar un vehículo que vale de contado $ 25.000.000. El concesionario acepta financiarlo con una cuota inicial y 12 cuotas mensuales iguales, cobrando una tasa de interés del 3.5% mensual. Usted solamente dispone de $ 600.000 mensuales. Calcule el valor de la cuota inicial.

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

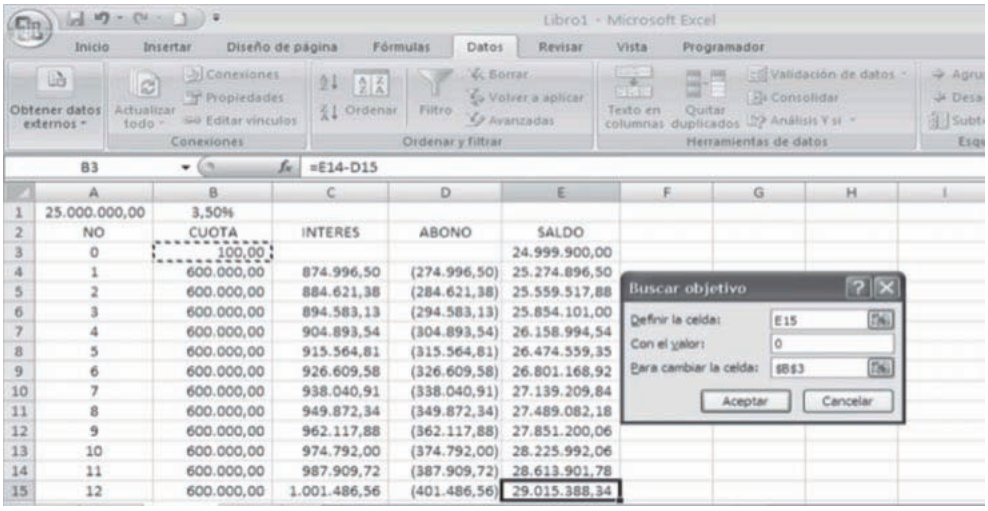
$$25.000.000(1+0.035)^{12} = CI(1+0.035)^{12} + 600.000\left[\frac{(1+0.035)^{12}-1}{0.035}\right]$$

$$CI = \$\ 19.201.999.40$$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	25.000.000	3,50%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	100			=A1−B3
4	1	600.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12	600.000			

En la celda A1 escribimos el valor del activo y en la celda B1 la tasa de interés. En la celda B3 escribimos un valor arbitrario que corresponde a la incógnita. Desde la celda B4 hasta la celda B15 escribimos el valor de la cuota mensual. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E
1	25.000.000,00	3,50%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	100,00			24.999.900,00
4	1	600.000,00	874.996,50	(274.996,50)	25.274.896,50
5	2	600.000,00	884.621,38	(284.621,38)	25.559.517,88
6	3	600.000,00	894.583,13	(294.583,13)	25.854.101,00
7	4	600.000,00	904.893,54	(304.893,54)	26.158.994,54
8	5	600.000,00	915.564,81	(315.564,81)	26.474.559,35
9	6	600.000,00	926.609,58	(326.609,58)	26.801.168,92
10	7	600.000,00	938.040,91	(338.040,91)	27.139.209,84
11	8	600.000,00	949.872,34	(349.872,34)	27.489.082,18
12	9	600.000,00	962.117,88	(362.117,88)	27.851.200,06
13	10	600.000,00	974.792,00	(374.792,00)	28.225.992,06
14	11	600.000,00	987.909,72	(387.909,72)	28.613.901,78
15	12	600.000,00	1.001.486,56	(401.486,56)	29.015.388,34

EJERCICIO 5. Calcular el valor de contado de un activo que financiado se puede adquirir así: una cuota inicial equivalente al 20% del valor de contado y 12 cuotas mensuales de $ 800.000, más una cuota extraordinaria de $ 2.000.000 pagadera en el mes 6. La tasa de interés cobrada por la financiación es del 30% capitalizable mensualmente.

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.30}{12} = 2.50\%\ \text{mensual}$$

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

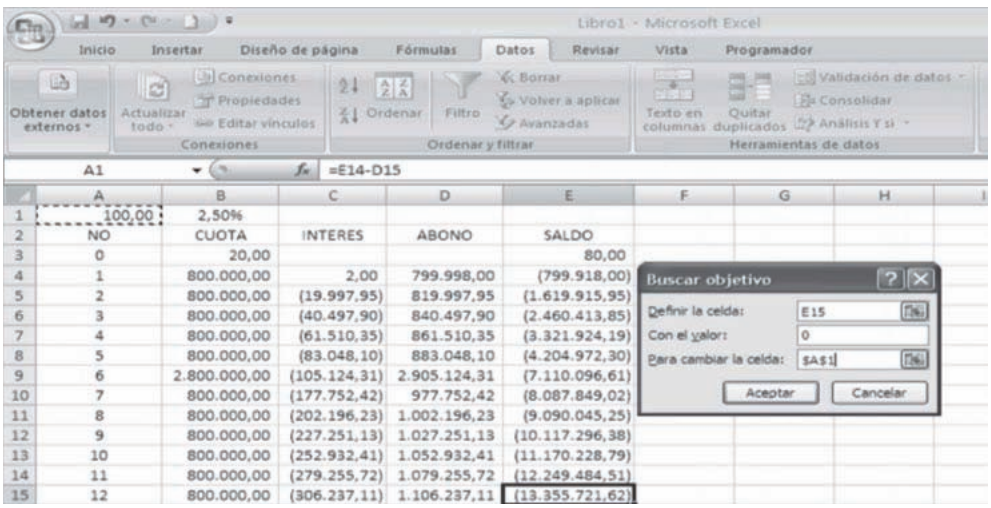
$$P(1+0.025)^{12} = 0.20P(1+0.025)^{12} + 800.000\left[\frac{(1+0.025)^{12}-1}{0.025}\right] + 2.000.000(1+0.025)^{6}$$

$$P = \$\ 12.413.506.76$$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	100	2,50%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	0,20*A1			=A1−B3
4	1	800.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	800.000			
....	.....	.....	.....	.....	.....
9	6	2.800.000			
10	7	800.000			
....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12	800.000			

En la celda A1 escribimos un valor arbitrario y en la celda B1 la tasa de interés. En la celda B3 calculamos el valor de la cuota inicial. Desde la celda B4 hasta la celda B15 escribimos el valor de la cuota mensual, teniendo en cuenta que en la celda B9 adicionamos el valor de la cuota extraordinaria. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E
1	100,00	2,50%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	20,00			80,00
4	1	800.000,00	2,00	799.998,00	(799.918,00)
5	2	800.000,00	(19.997,95)	819.997,95	(1.619.915,95)
6	3	800.000,00	(40.497,90)	840.497,90	(2.460.413,85)
7	4	800.000,00	(61.510,35)	861.510,35	(3.321.924,19)
8	5	800.000,00	(83.048,10)	883.048,10	(4.204.972,30)
9	6	2.800.000,00	(105.124,31)	2.905.124,31	(7.110.096,61)
10	7	800.000,00	(177.752,42)	977.752,42	(8.087.849,02)
11	8	800.000,00	(202.196,23)	1.002.196,23	(9.090.045,25)
12	9	800.000,00	(227.251,13)	1.027.251,13	(10.117.296,38)
13	10	800.000,00	(252.932,41)	1.052.932,41	(11.170.228,79)
14	11	800.000,00	(279.255,72)	1.079.255,72	(12.249.484,51)
15	12	800.000,00	(306.237,11)	1.106.237,11	(13.355.721,62)

EJERCICIO 6. Hoy adquiere un equipo de sonido y se compromete a cancelarlo con 12 cuotas mensuales anticipadas, cada una por valor de $ 85.000. Si le cobran una tasa de interés del 3% mensual, ¿cuánto le cuesta el equipo de contado?

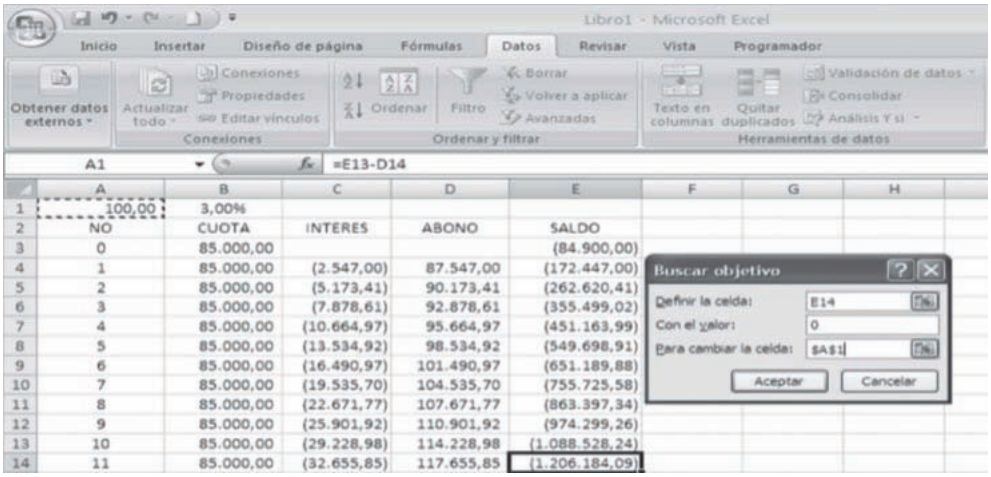
$$P = A(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] = 85.000(1+0.03)\left[\frac{(1+0.03)^{12} - 1}{0.03(1+0.03)^{12}}\right] = \$\ 871.473.05$$

En Excel: = VA (3%; 12; −85.000; 0; 1)

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	100	3,0%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	85.000			=A1−B3
4	1	85.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
....	.....		.....	.....	.....
14	11	85.000			

En la celda A1 escribimos un valor arbitrario y en la celda B1 la tasa de interés. Desde la celda B3 hasta la celda B14, escribimos el valor de las cuotas mensuales. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E14 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E
1	100,00	3,00%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	85.000,00			(84.900,00)
4	1	85.000,00	(2.547,00)	87.547,00	(172.447,00)
5	2	85.000,00	(5.173,41)	90.173,41	(262.620,41)
6	3	85.000,00	(7.878,61)	92.878,61	(355.499,02)
7	4	85.000,00	(10.664,97)	95.664,97	(451.163,99)
8	5	85.000,00	(13.534,92)	98.534,92	(549.698,91)
9	6	85.000,00	(16.490,97)	101.490,97	(651.189,88)
10	7	85.000,00	(19.535,70)	104.535,70	(755.725,58)
11	8	85.000,00	(22.671,77)	107.671,77	(863.397,34)
12	9	85.000,00	(25.901,92)	110.901,92	(974.299,26)
13	10	85.000,00	(29.228,98)	114.228,98	(1.088.528,24)
14	11	85.000,00	(32.655,85)	117.655,85	(1.206.184,09)

EJERCICIO 7. Se desea comprar una nevera y el cliente se encuentra ante dos opciones:

a) Compra a crédito bajo las siguientes condiciones: 12 cuotas mensuales anticipadas de $ 140.000.

b) Compra de contado por $ 1.400.000.

El rendimiento del dinero es del 4% mensual. ¿Cuál opción le conviene al cliente?

Primera opción: Calculamos el valor presente equivalente:

$$P = A(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] = 140.000(1+0.04)\left[\frac{(1+0.04)^{12} - 1}{0.04(1+0.04)^{12}}\right] = \$\,1.366.466.74$$

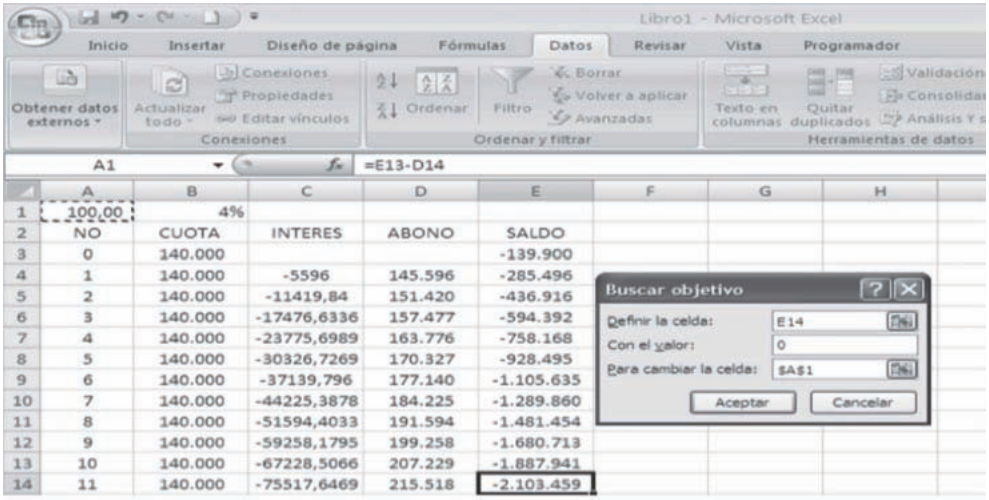
En Excel: = VA (4%; 12; −140.000; 0; 1)

Comparando los valores presentes de las dos opciones, concluimos que la mejor opción es la primera.

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	100	4,0%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	140.000			=A1−B3
4	1	140.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
....	.....	.....	.....	.....	.....
14	11	140.000			

En la celda A1 escribimos un valor arbitrario y en la celda B1 la tasa de interés. Desde la celda B3 hasta la celda B14, escribimos el valor de las cuotas mensuales. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E14 y aplicamos Buscar Objetivo.



	A	B	C	D	E
1	100,00	4%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	140.000			-139.900
4	1	140.000	-5596	145.596	-285.496
5	2	140.000	-11419,84	151.420	-436.916
6	3	140.000	-17476,6336	157.477	-594.392
7	4	140.000	-23775,6989	163.776	-758.168
8	5	140.000	-30326,7269	170.327	-928.495
9	6	140.000	-37139,796	177.140	-1.105.635
10	7	140.000	-44225,3878	184.225	-1.289.860
11	8	140.000	-51594,4033	191.594	-1.481.454
12	9	140.000	-59258,1795	199.258	-1.680.713
13	10	140.000	-67228,5066	207.229	-1.887.941
14	11	140.000	-75517,6469	215.518	-2.103.459

EJERCICIO 8. Una compañía vende un juego de muebles que tiene un valor de contado de $ 12.000.000. Se conviene en pagar cuotas mensuales iguales de $ 847.091, pagaderas

en forma anticipada. Si la tasa de financiación es del 36% capitalizable mensualmente, ¿con cuántas cuotas se cancela el crédito?

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.36}{12} = 3.0\% \text{ mensual}$$

$$P = A(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$12.000.000 = 847.091(1+0.03)\left[\frac{(1+0.03)^n - 1}{0.03(1+0.03)^n}\right]$$

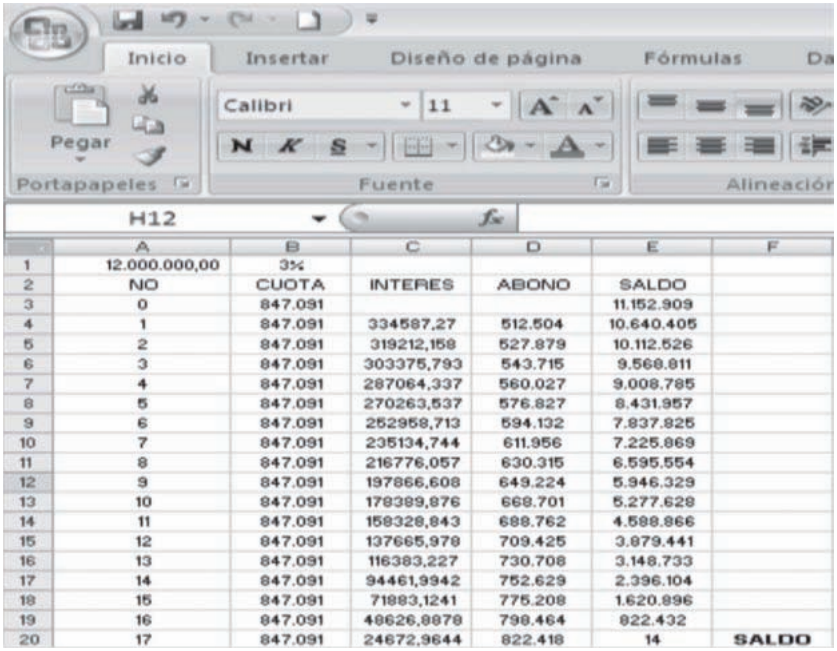
$n = 18$ cuotas

En Excel: = NPER (3%; −847091; 12.000.000; 0; 1)

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	12.000.000	3,0%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	847.091			=A1−B3
4	1	847.091	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
....	.....	.....	.....	.....	.....
24	21	847.091			

En la celda A1 escribimos el valor del juego de muebles y en la celda B1 la tasa de interés. Desde la celda B3 hasta la celda B24 (por ejemplo) escribimos el valor de las cuotas mensuales. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 hasta cuando encontremos un saldo igual a cero.



	A	B	C	D	E	F
1	12.000.000,00	3%				
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO	
3	0	847.091			11.152.909	
4	1	847.091	334587,27	512.504	10.640.405	
5	2	847.091	319212,158	527.879	10.112.526	
6	3	847.091	303375,793	543.715	9.568.811	
7	4	847.091	287064,337	560.027	9.008.785	
8	5	847.091	270263,537	576.827	8.431.957	
9	6	847.091	252958,713	594.132	7.837.825	
10	7	847.091	235134,744	611.956	7.225.869	
11	8	847.091	216776,057	630.315	6.595.554	
12	9	847.091	197866,608	649.224	5.946.329	
13	10	847.091	178389,876	668.701	5.277.628	
14	11	847.091	158328,843	688.762	4.588.866	
15	12	847.091	137665,978	709.425	3.879.441	
16	13	847.091	116383,227	730.708	3.148.733	
17	14	847.091	94461,9942	752.629	2.396.104	
18	15	847.091	71883,1241	775.208	1.620.896	
19	16	847.091	48626,8878	798.464	822.432	
20	17	847.091	24672,9644	822.418	14	SALDO

EJERCICIO 9. Usted tiene un crédito de $ 5.000.000 para pagarlo en 12 cuotas mensuales de $ 50.000 más dos cuotas extras iguales, pagaderas en los meses 6 y 12. Si la operación financiera se realiza con un interés del 2.5% mensual, ¿cuál es el valor de las dos cuotas?

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

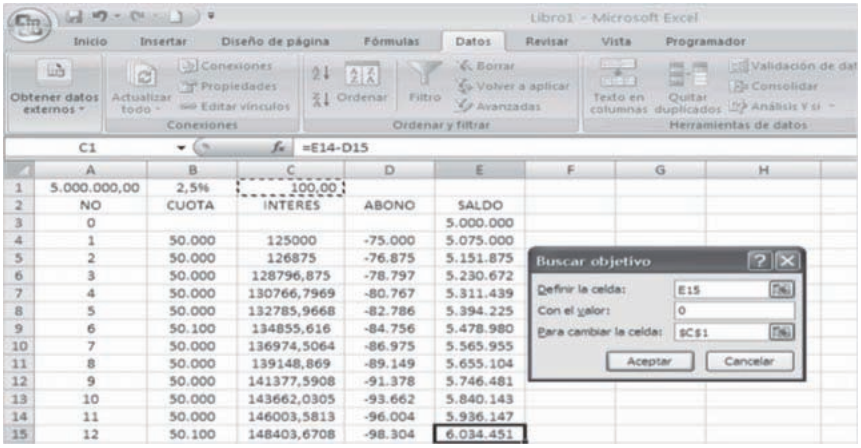
$$5.000.000\left(1+0.025\right)^{12} = 50.000\left[\frac{\left(1+0.025\right)^{12}-1}{0.025}\right] + X\left(1+0.025\right)^{6} + X$$

$$X = \$\ 2.794.223.67$$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	5.000.000	2,5%	100		
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	50.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	50.000			
....	.....	.....	.....	.....	.....
9	6	=50.000+C1			
10	7	50.000			
11	8	50.000			
....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12	=50.000+C1			

En la celda A1 escribimos el valor del crédito, en la celda B1 la tasa de interés y en la celda C1 un valor arbitrario. Desde la celda B4 hasta la celda B15, escribimos el valor de las cuotas mensuales, con excepción de las celdas B9 y B15 en las cuales a la cuota le agregamos el valor de la cuota extraordinaria que vamos a calcular (C1). En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	5.000.000,00	2,5%	100,00					
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO			
3	0				5.000.000			
4	1	50.000	125000	-75.000	5.075.000			
5	2	50.000	126875	-76.875	5.151.875			
6	3	50.000	128796,875	-78.797	5.230.672			
7	4	50.000	130766,7969	-80.767	5.311.439			
8	5	50.000	132785,9668	-82.786	5.394.225			
9	6	50.100	134855,616	-84.756	5.478.980			
10	7	50.000	136974,5064	-86.975	5.565.955			
11	8	50.000	139148,869	-89.149	5.655.104			
12	9	50.000	141377,5908	-91.378	5.746.481			
13	10	50.000	143662,0305	-93.662	5.840.143			
14	11	50.000	146003,5813	-96.004	5.936.147			
15	12	50.100	148403,6708	-98.304	6.034.451			

EJERCICIO 10. Una compañía debe comprar un terreno para la ampliación de su planta. Lo puede adquirir con una cuota inicial de $ 15.000.000 y 8 pagos trimestrales de $ 1.000.000 cada uno, haciendo el primer pago dentro de un año. Determinar el valor de contado del terreno, sabiendo que en la financiación se pactó un interés del 34% nominal con capitalización trimestral.

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.34}{4} = 8.50\% \text{ trimestral}$$

Ecuación de valor con fecha focal en el trimestre 12:

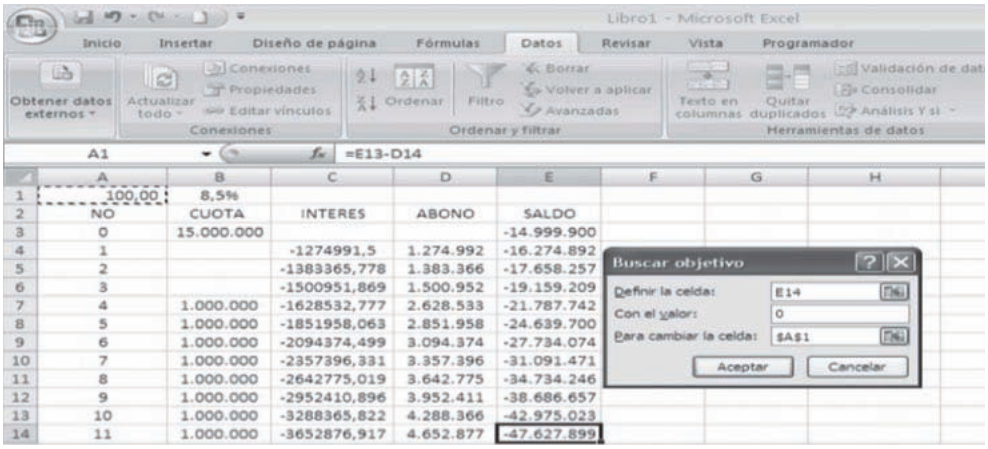
$$P(1+0.085)^{11} = 15.000.000(1+0.085)^{11} + 1.000.000\left[\frac{(1+0.085)^{8}-1}{0.085}\right]$$

$$P = \$\ 19.414.962.01$$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	100	8,5%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	15.000.000			=A1−B3
4	1		=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2				
6	3				
7	4	1.000.000			
....	.....	.....	.....	.....	.....
14	11	1.000.000			

En la celda A1 escribimos un valor arbitrario y en la celda B1 la tasa de interés. Desde la celda B7 hasta la celda B14, escribimos el valor de las cuotas trimestrales. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E14 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E
1	100,00	8,5%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	15.000.000			-14.999.900
4	1		-1274991,5	1.274.992	-16.274.892
5	2		-1383365,778	1.383.366	-17.658.257
6	3		-1500951,869	1.500.952	-19.159.209
7	4	1.000.000	-1628532,777	2.628.533	-21.787.742
8	5	1.000.000	-1851958,063	2.851.958	-24.639.700
9	6	1.000.000	-2094374,499	3.094.374	-27.734.074
10	7	1.000.000	-2357396,331	3.357.396	-31.091.471
11	8	1.000.000	-2642775,019	3.642.775	-34.734.246
12	9	1.000.000	-2952410,896	3.952.411	-38.686.657
13	10	1.000.000	-3288365,822	4.288.366	-42.975.023
14	11	1.000.000	-3652876,917	4.652.877	-47.627.899

EJERCICIO 11. Dos personas (Juan y Pedro) deciden ahorrar dinero durante 2 años. Juan hace depósitos mensuales de $ 50.000 y le reconocen una tasa de interés del 30% capitalizable mensualmente. Pedro hace depósitos de $ 95.000 trimestrales a una tasa de interés del 33% capitalizable trimestralmente. ¿Cuál de las dos personas tiene más dinero al final de los dos años?

Calculamos el valor futuro a los 2 años de los depósitos de Juan:

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.30}{12} = 2.50\% \text{ mensual}$$

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] = 50.000\left[\frac{(1+0.025)^{24} - 1}{0.025}\right] = \$\ 1.617.451.90$$

En Excel: $= VF(2{,}5\%; 24; -50.000)$

Calculamos el valor futuro a los 2 años de los depósitos de Pedro:

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.33}{4} = 8.25\% \text{ trimestral}$$

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] = 95.000\left[\frac{(1+0.0825)^{8} - 1}{0.0825}\right] = \$\ 1.019.650.19$$

En Excel: $= VF(8{,}25\%; 8; -95.000)$

Juan tendrá más dinero al final del año.

EJERCICIO 12. Un terreno que tiene un valor de contado de $ 100.000.000 se puede adquirir financiado de la siguiente forma: cuota inicial de $ 10.000.000, 12 cuotas mensuales iguales y una cuota extraordinaria de $ 20.000.000 al final del mes 8. Calcular el valor de las cuotas mensuales, si la tasa de interés de financiación que se cobra es del 32% MV.

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.32}{12} = 2.67\% \text{ mensual}$$

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

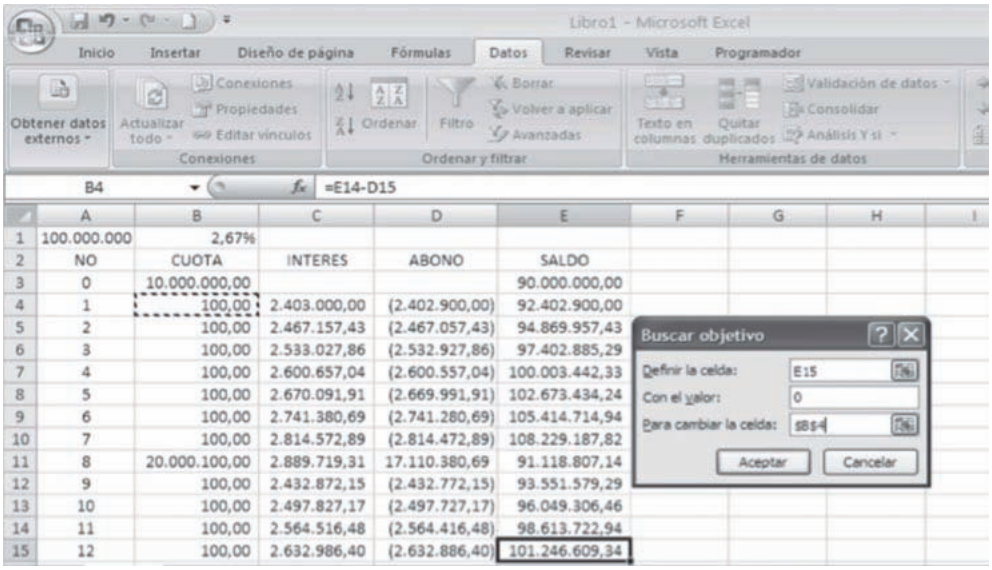
$$100.000.000\left(1.0267\right)^{12} = 10.000.000\left(1.0267\right)^{12} + 20.000.000\left(1.0267\right)^{4} + A\left[\frac{\left(1.0267\right)^{12} - 1}{0.0267}\right]$$

$$A = \$\ 7.268.929.93$$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	100.000.000	2,67%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	10.000.000			=A1−B3
4	1	100	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4			
6	3	=B5			
7	4	=B6			
....	.....	.....	.....	.....	.....
11	8	=B10+20.000.000			
12	9	=B10			
15	12	=B14			

En la celda A1 escribimos el valor del terreno y en la celda B1 la tasa de interés. En la celda B3 escribimos el valor de la cuota inicial. En la celda B4 escribimos un valor arbitrario y lo copiamos a partir de la celda B5, con excepción de la celda B11 al que le agregamos el valor de la cuota extraordinaria, hasta la celda B15. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	100.000.000	2,67%							
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO				
3	0	10.000.000,00			90.000.000,00				
4	1	100,00	2.403.000,00	(2.402.900,00)	92.402.900,00				
5	2	100,00	2.467.157,43	(2.467.057,43)	94.869.957,43				
6	3	100,00	2.533.027,86	(2.532.927,86)	97.402.885,29				
7	4	100,00	2.600.657,04	(2.600.557,04)	100.003.442,33				
8	5	100,00	2.670.091,91	(2.669.991,91)	102.673.434,24				
9	6	100,00	2.741.380,69	(2.741.280,69)	105.414.714,94				
10	7	100,00	2.814.572,89	(2.814.472,89)	108.229.187,82				
11	8	20.000.100,00	2.889.719,31	17.110.380,69	91.118.807,14				
12	9	100,00	2.432.872,15	(2.432.772,15)	93.551.579,29				
13	10	100,00	2.497.827,17	(2.497.727,17)	96.049.306,46				
14	11	100,00	2.564.516,48	(2.564.416,48)	98.613.722,94				
15	12	100,00	2.632.986,40	(2.632.886,40)	101.246.609,34				

EJERCICIO 13. ¿A qué tasa nominal capitalizable mensualmente se está pagando una deuda de $ 30.000.000, mediante pagos mensuales de $ 3.013.862.56 durante 1 año?

P = $ 30.000.000 A = $ 3.013.862.56 n = 12 meses

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$30.000.000 = 3.013.862.56\left[\frac{(1+i)^{12} - 1}{i(1+i)^{12}}\right]$$

Por interpolación lineal: i = 3% mensual

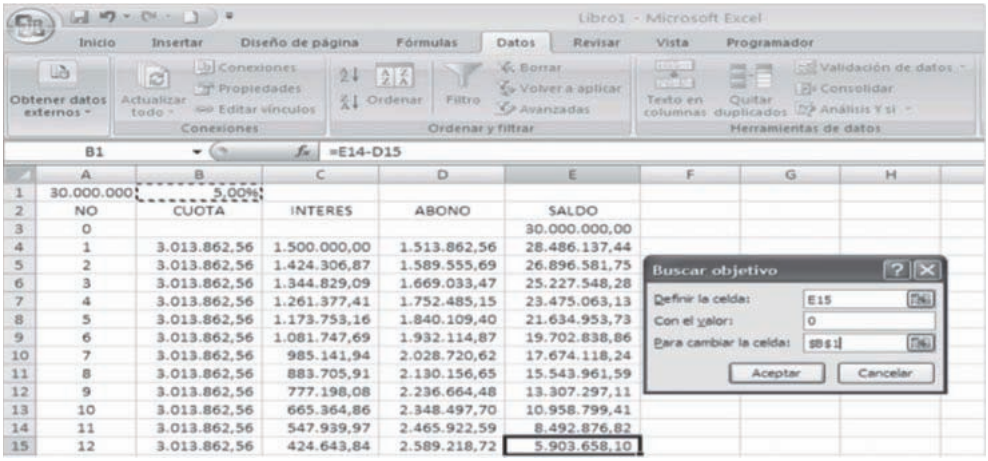
Aplicando la ecuación de la tasa nominal: J = i * n = 3% * 12 = 36% MV

En Excel: = (TASA (12; −3013862,56; 30.000.000)*12)

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	30.000.000	5%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	3.013.862.56	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12	3.013.862.56			

En la celda A1 escribimos el valor de la deuda y en la celda B1 escribimos una tasa de interés arbitraria. Desde la celda B4 hasta la celda B15 escribimos el valor de las cuotas mensuales. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	30.000.000	5,00%						
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO			
3	0				30.000.000,00			
4	1	3.013.862,56	1.500.000,00	1.513.862,56	28.486.137,44			
5	2	3.013.862,56	1.424.306,87	1.589.555,69	26.896.581,75			
6	3	3.013.862,56	1.344.829,09	1.669.033,47	25.227.548,28			
7	4	3.013.862,56	1.261.377,41	1.752.485,15	23.475.063,13			
8	5	3.013.862,56	1.173.753,16	1.840.109,40	21.634.953,73			
9	6	3.013.862,56	1.081.747,69	1.932.114,87	19.702.838,86			
10	7	3.013.862,56	985.141,94	2.028.720,62	17.674.118,24			
11	8	3.013.862,56	883.705,91	2.130.156,65	15.543.961,59			
12	9	3.013.862,56	777.198,08	2.236.664,48	13.307.297,11			
13	10	3.013.862,56	665.364,86	2.348.497,70	10.958.799,41			
14	11	3.013.862,56	547.939,97	2.465.922,59	8.492.876,82			
15	12	3.013.862,56	424.643,84	2.589.218,72	5.903.658,10			

EJERCICIO 14. Le financian un electrodoméstico que tiene un valor de contado de $ 3.500.000 en 12 cuotas mensuales iguales pagaderas en forma anticipada de $ 332.882.87. Calcular la tasa nominal mes vencido que le están cobrando.

P = $ 3.500.000 A = $ 332.882.87 n = 12 meses i nominal = ?

$$P = A(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$3.500.000 = 332.882.87(1+i)\left[\frac{(1+i)^{12} - 1}{i(1+i)^{12}}\right]$$

Por interpolación lineal: i = 2.5% mensual

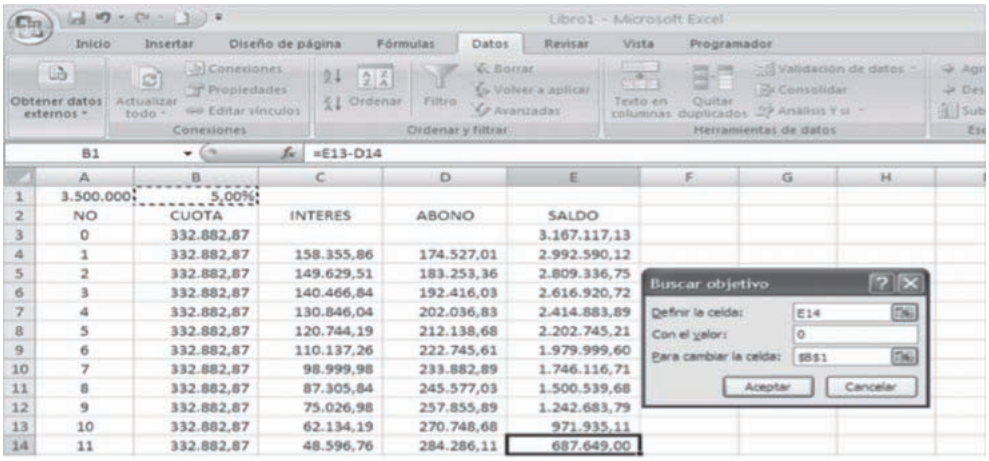
Aplicando la ecuación de la tasa nominal: J = i * n = 2.5% * 12 = 30% MV

En Excel: = (TASA (12; −332882,87; 3.500.000; 0; 1)*12)

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	3.500.000	5%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	332.882,87			=A1−B3
4	1	332.882,87	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
....	.....	.....	.....	.....	.....
14	11	332.882,87			

En la celda A1 escribimos el valor del electrodoméstico y en la celda B1 escribimos una tasa de interés arbitraria. Desde la celda B3 hasta la celda B14 escribimos el valor de las cuotas mensuales. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E14 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E
1	3.500.000	5,00%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	332.882,87			3.167.117,13
4	1	332.882,87	158.355,86	174.527,01	2.992.590,12
5	2	332.882,87	149.629,51	183.253,36	2.809.336,75
6	3	332.882,87	140.466,84	192.416,03	2.616.920,72
7	4	332.882,87	130.846,04	202.036,83	2.414.883,89
8	5	332.882,87	120.744,19	212.138,68	2.202.745,21
9	6	332.882,87	110.137,26	222.745,61	1.979.999,60
10	7	332.882,87	98.999,98	233.882,89	1.746.116,71
11	8	332.882,87	87.305,84	245.577,03	1.500.539,68
12	9	332.882,87	75.026,98	257.855,89	1.242.683,79
13	10	332.882,87	62.134,19	270.748,68	971.935,11
14	11	332.882,87	48.596,76	284.286,11	687.649,00

EJERCICIO 15. Le arriendan un local comercial por 8 meses con pagos mensuales vencidos de $ 200.000. Usted ofrece un solo pago en el día de hoy. ¿Cuánto deberá pagar al inicio del contrato si la tasa de interés del arrendador es del 3% mensual?

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

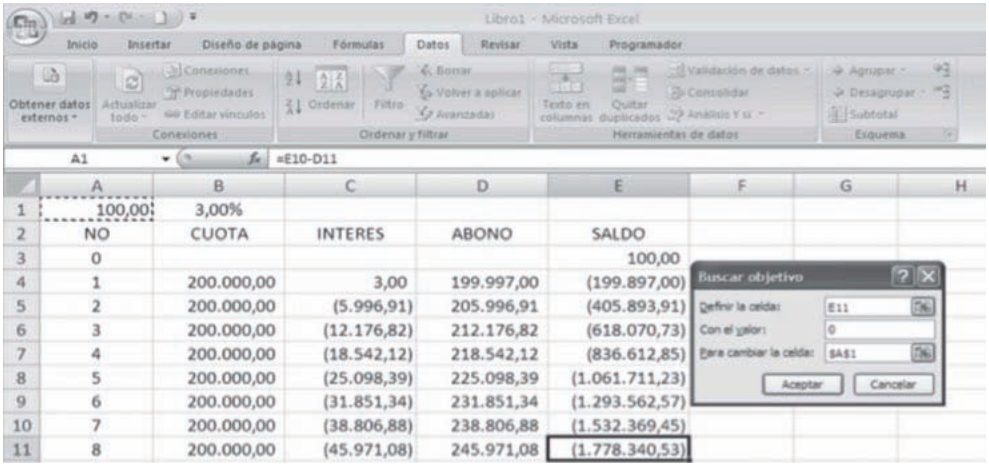
$$P = 200.000\left[\frac{(1+0.03)^8 - 1}{0.03(1+0.03)^8}\right] = \$\,1.403.938.44$$

En Excel: $= VA\,(3\%;\ 8;\ -200.000)$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	100	3%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	200.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
....	.....	.....	.....	.....	.....
11	8	200.000			

En la celda A1 escribimos un valor arbitrario y en la celda B1 escribimos la tasa de interés. Desde la celda B4 hasta la celda B11 escribimos el valor de las cuotas mensuales. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E11 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E
1	100,00	3,00%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				100,00
4	1	200.000,00	3,00	199.997,00	(199.897,00)
5	2	200.000,00	(5.996,91)	205.996,91	(405.893,91)
6	3	200.000,00	(12.176,82)	212.176,82	(618.070,73)
7	4	200.000,00	(18.542,12)	218.542,12	(836.612,85)
8	5	200.000,00	(25.098,39)	225.098,39	(1.061.711,23)
9	6	200.000,00	(31.851,34)	231.851,34	(1.293.562,57)
10	7	200.000,00	(38.806,88)	238.806,88	(1.532.369,45)
11	8	200.000,00	(45.971,08)	245.971,08	(1.778.340,53)

EJERCICIO 16. A usted le van a financiar un electrodoméstico que tiene un precio de contado de $ 5.000.000, de la siguiente forma: cuota inicial del 30% y 10 cuotas mensuales iguales por valor de $ 410.306.77. Si usted solo puede pagar cuotas mensuales de $ 352.000, calcular el número de cuotas enteras necesarias para cancelar el crédito. La tasa de interés de financiación es del 3% mensual.

P = $ 3.500.000 (Valor del electrodoméstico menos la cuota inicial)

i = 3 % mensual A = $ 352.000

$$n = \frac{\text{Log A} - \text{Log}\left(\text{A} - \text{P}i\right)}{\text{Log}\left(1 + i\right)}$$

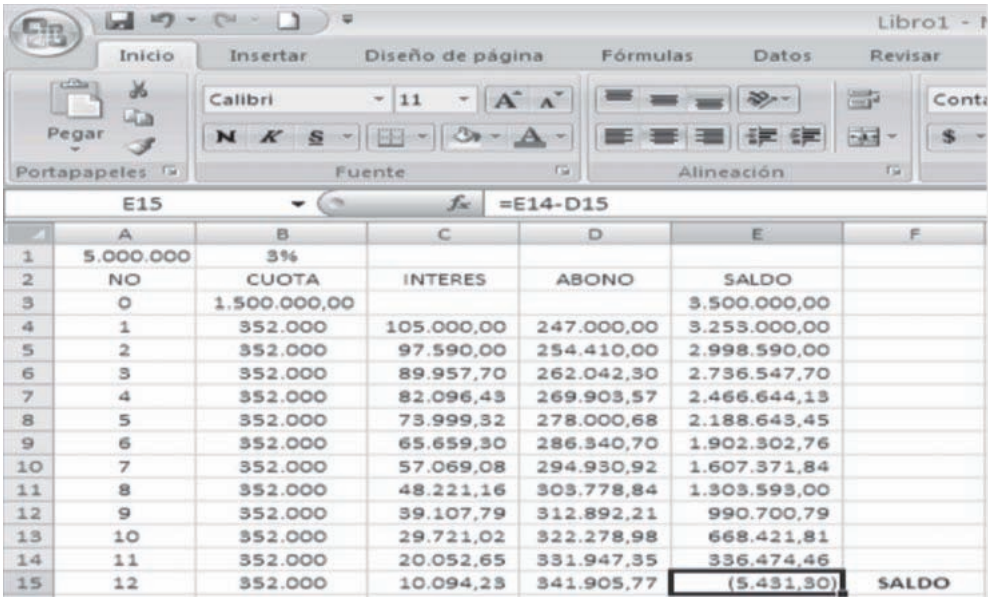
$$n = \frac{\text{Log } 352.000 - \text{Log}\left(352.000 - 3.500.000 * 0.03\right)}{\text{Log}\left(1 + 0.03\right)} = 11.98 \approx 12 \text{ cuotas mensuales}$$

En Excel: = NPER (3%; −352000; 3.500.000)

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	3.500.000	3%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	352.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	352.000			
....	.....	.....	.....	.....	.....
18	15				

En la celda A1 escribimos el valor a financiar y en la celda B1 escribimos la tasa de interés. Desde la celda B4 hasta la celda B15 (por ejemplo) escribimos el valor de las cuotas mensuales. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 hasta encontrar un saldo igual a cero.



	A	B	C	D	E	F
1	5.000.000	3%				
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO	
3	0	1.500.000,00			3.500.000,00	
4	1	352.000	105.000,00	247.000,00	3.253.000,00	
5	2	352.000	97.590,00	254.410,00	2.998.590,00	
6	3	352.000	89.957,70	262.042,30	2.736.547,70	
7	4	352.000	82.096,43	269.903,57	2.466.644,13	
8	5	352.000	73.999,32	278.000,68	2.188.643,45	
9	6	352.000	65.659,30	286.340,70	1.902.302,76	
10	7	352.000	57.069,08	294.930,92	1.607.371,84	
11	8	352.000	48.221,16	303.778,84	1.303.593,00	
12	9	352.000	39.107,79	312.892,21	990.700,79	
13	10	352.000	29.721,02	322.278,98	668.421,81	
14	11	352.000	20.052,65	331.947,35	336.474,46	
15	12	352.000	10.094,23	341.905,77	(5.431,30)	SALDO

EJERCICIO 17. El señor Pérez compró un apartamento que tiene un valor de contado de $ 150.000.000, de la siguiente forma: cuota inicial de $ 40.000.000 y cuotas mensuales iguales de $ 6.000.000. Después de cancelada la cuota 10, solicita el saldo de la deuda para hacer un solo pago y le informan que es de $ 80.000.000. Calcular la tasa de interés que le están cobrando.

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 10:

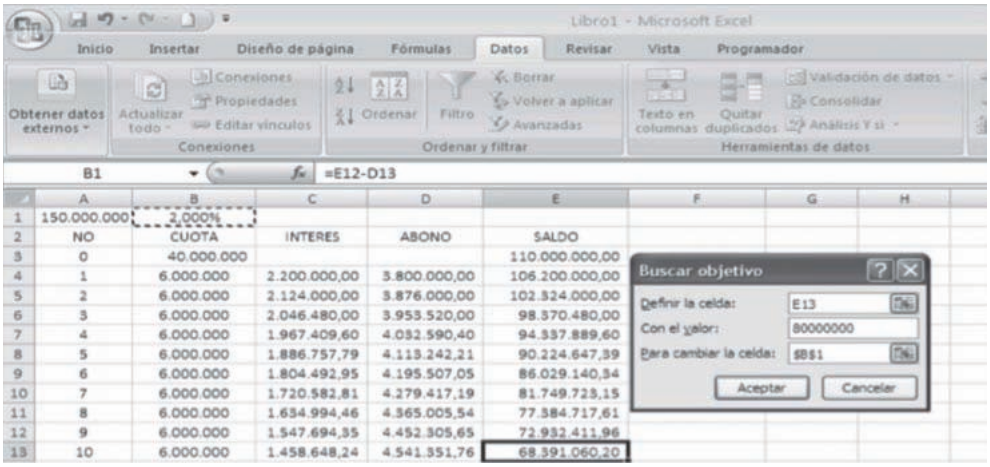
$$150.000.000(1+i)^{10} = 40.000.000(1+i)^{10} + 80.000.000 + 6.000.000\left[\frac{(1+i)^{10}-1}{i}\right]$$

Por interpolación lineal obtenemos una tasa de interés del 3.085% mensual.

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	150.000.000	5%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	40.000.000			=A1−B3
4	1	6.000.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
....	.....	.....	.....	.....	.....
13	10				

En la celda A1 escribimos el valor del apartamento y en la celda B1 escribimos una tasa de interés arbitraria. Desde la celda B4 hasta la celda B13 escribimos el valor de las cuotas mensuales. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E13 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E
1	150.000.000	2,000%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	40.000.000			110.000.000,00
4	1	6.000.000	2.200.000,00	3.800.000,00	106.200.000,00
5	2	6.000.000	2.124.000,00	3.876.000,00	102.324.000,00
6	3	6.000.000	2.046.480,00	3.953.520,00	98.370.480,00
7	4	6.000.000	1.967.409,60	4.032.590,40	94.337.889,60
8	5	6.000.000	1.886.757,79	4.113.242,21	90.224.647,39
9	6	6.000.000	1.804.492,95	4.195.507,05	86.029.140,34
10	7	6.000.000	1.720.582,81	4.279.417,19	81.749.723,15
11	8	6.000.000	1.634.994,46	4.365.005,54	77.384.717,61
12	9	6.000.000	1.547.694,35	4.452.305,65	72.932.411,96
13	10	6.000.000	1.458.648,24	4.541.351,76	68.391.060,20

EJERCICIO 18. Un activo tiene un valor de contado de $ 2.500.000 y se adquiere con el siguiente plan de pagos: cuota inicial del 20%, 12 cuotas mensuales iguales y dos pagos adicionales en los meses 6 y 12 de $ 200.000 cada uno. Calcular el valor de las cuotas mensuales, si la tasa de financiación es del 2% mensual.

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

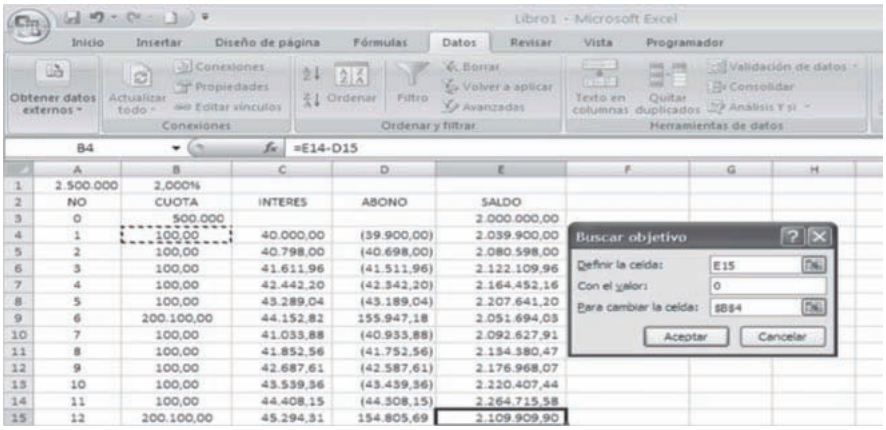
$$2.500.000(1+0.02)^{12} = 500.000(1+0.02)^{12} + A\left[\frac{(1+0.02)^{12}-1}{0.02}\right] + 200.000(1+0.02)^{6} + 200.000$$

A = $ 157.414.03

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	2.500.000	2%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	=0,20*A1			=A1−B3
4	1	100	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4			
....	.....	.....	.....	.....	.....
9	6	=B8+200.000			
10	7	=B8			
....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12	=B14+200.000			

En la celda A1 escribimos el valor del activo y en la celda B1 escribimos la tasa de interés. Desde la celda B4 hasta la celda B15 escribimos el valor de las cuotas mensuales, con excepción de las celdas B9 y B15, en las cuales sumamos al valor de la cuota mensual la cuota adicional. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicamos B*uscar objetivo*.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	2.500.000	2,000%						
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO			
3	0	500.000			2.000.000,00			
4	1	100,00	40.000,00	(39.900,00)	2.039.900,00			
5	2	100,00	40.798,00	(40.698,00)	2.080.598,00			
6	3	100,00	41.611,96	(41.511,96)	2.122.109,96			
7	4	100,00	42.442,20	(42.342,20)	2.164.452,16			
8	5	100,00	43.289,04	(43.189,04)	2.207.641,20			
9	6	200.100,00	44.152,82	155.947,18	2.051.694,03			
10	7	100,00	41.033,88	(40.933,88)	2.092.627,91			
11	8	100,00	41.852,56	(41.752,56)	2.134.380,47			
12	9	100,00	42.687,61	(42.587,61)	2.176.968,07			
13	10	100,00	43.539,36	(43.439,36)	2.220.407,44			
14	11	100,00	44.408,15	(44.308,15)	2.264.715,58			
15	12	200.100,00	45.294,31	154.805,69	2.109.909,90			

EJERCICIO 19. El señor Pérez le debe al señor García $ 25.000.000 a una tasa de interés del 3% mensual y le propone pagarle todos los meses $ 650.000. ¿En cuántos meses le habrá cancelado totalmente la deuda?

Calculamos el valor de los intereses: $I = P * i = \$\ 25.000.000 * 0.03 = \$\ 750.000$

El valor de la cuota es menor que el valor de los intereses, por lo tanto, la deuda crece cada día. El ejercicio no tiene solución.

EJERCICIO 20. Se había pactado el pago de una obligación por medio de 8 cuotas trimestrales anticipadas de $ 3.315.126, con una tasa de interés del 4.66% trimestral. Se resuelve a última hora cancelarla con un pago al final del año. Calcular el valor del pago al final del año.

Calculamos el valor de la obligación inicial:

$$P = A(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] = 3.315.126(1+0.0466)\left[\frac{(1+0.0466)^8 - 1}{0.0466(1+0.0466)^8}\right] = \$\ 22.736.301$$

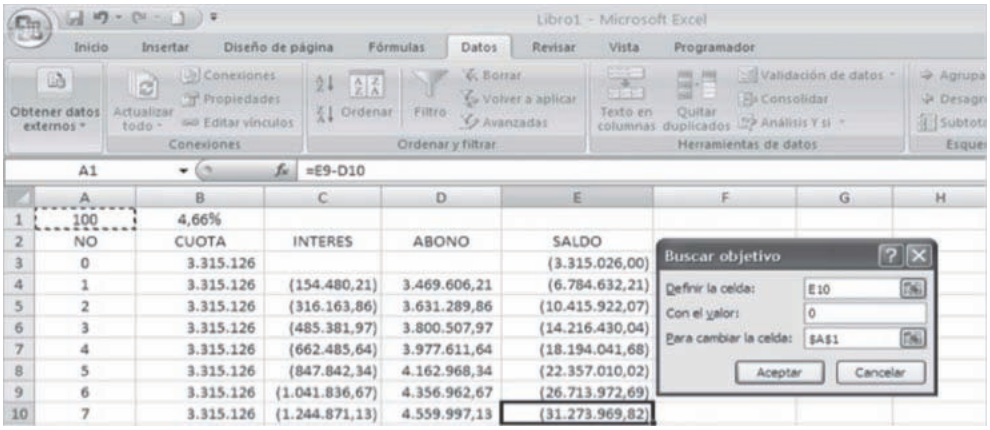
$P = \$\ 22.736.301$

En Excel: $= VA\ (4{,}66\%;\ 8;\ -3315126;\ 0;\ 1)$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	100	4,66%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	3.315.126			=A1−B3
4	1	3.315.326	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
....	.....	.....	.....	.....	.....
10	7	3.315.126			

En la celda A1 escribimos un valor arbitrario y en la celda B1 la tasa de interés. Desde la celda B3 hasta la celda B10, escribimos el valor de las cuotas mensuales. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E10 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E
1	100	4,66%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	3.315.126			(3.315.026,00)
4	1	3.315.126	(154.480,21)	3.469.606,21	(6.784.632,21)
5	2	3.315.126	(316.163,86)	3.631.289,86	(10.415.922,07)
6	3	3.315.126	(485.381,97)	3.800.507,97	(14.216.430,04)
7	4	3.315.126	(662.485,64)	3.977.611,64	(18.194.041,68)
8	5	3.315.126	(847.842,34)	4.162.968,34	(22.357.010,02)
9	6	3.315.126	(1.041.836,67)	4.356.962,67	(26.713.972,69)
10	7	3.315.126	(1.244.871,13)	4.559.997,13	(31.273.969,82)

Calculamos el pago al final del año:

$$F = P\,(1 + i)^n = \$\ 22.736.301(1 + 0.0466)^4 = \$\ 27.279.091.62$$

En Excel: $= VF\,(4{,}66\%;\ 4;\ 0;\ -22.736.301)$

EJERCICIO 21. Un lote que tiene un valor de contado de $ 20.000.000 se está pagando con cuotas mensuales iguales. El saldo después de pagada la cuota 15 es de $ 12.000.000. Si se está cobrando una tasa de financiación del 3 % mensual, ¿cuál es el valor de las cuotas?

Ecuación de valor en el mes 15:

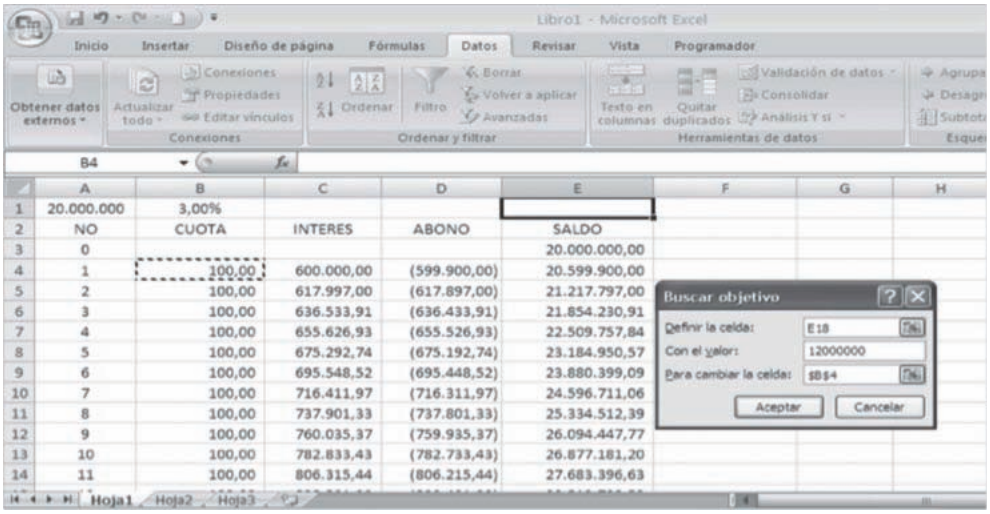
$$20.000.000\left(1 + 0.03\right)^{15} = A\left[\frac{\left(1 + 0.03\right)^{15} - 1}{0.03}\right] + 12.000.000$$

$$A = \$\ 1.030.132.64$$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	20.000.000	3%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	100	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4			
....	.....	.....	.....	.....	.....
18	15	=B17			

En la celda A1 escribimos el valor del lote y en la celda B1 la tasa de interés. Desde la celda B4 hasta la celda B18, escribimos el valor de las cuotas mensuales. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E18 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E
1	20.000.000	3,00%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				20.000.000,00
4	1	100,00	600.000,00	(599.900,00)	20.599.900,00
5	2	100,00	617.997,00	(617.897,00)	21.217.797,00
6	3	100,00	636.533,91	(636.433,91)	21.854.230,91
7	4	100,00	655.626,93	(655.526,93)	22.509.757,84
8	5	100,00	675.292,74	(675.192,74)	23.184.950,57
9	6	100,00	695.548,52	(695.448,52)	23.880.399,09
10	7	100,00	716.411,97	(716.311,97)	24.596.711,06
11	8	100,00	737.901,33	(737.801,33)	25.334.512,39
12	9	100,00	760.035,37	(759.935,37)	26.094.447,77
13	10	100,00	782.833,43	(782.733,43)	26.877.181,20
14	11	100,00	806.315,44	(806.215,44)	27.683.396,63

EJERCICIO 22. Un activo que tiene un valor de $ 50.000.000 se financió de la siguiente forma: cuota inicial del 20%, 10 cuotas mensuales iguales por valor de $ 4.570.350.53, con una tasa de interés del 2.5% mensual. Después de pagada la cuota 6, se resuelve cancelar el saldo con 3 cuotas trimestrales iguales. Calcular el valor de las cuotas trimestrales.

Calculamos el saldo después de pagada la cuota 6. El saldo de una obligación es igual al valor presente de las cuotas que faltan por pagar:

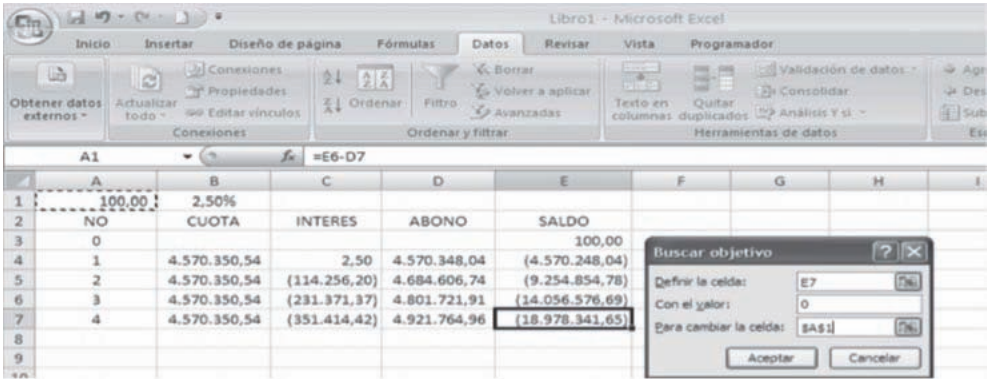
$$S_6 = 4.570.350.53\left[\frac{(1+0.025)^4 - 1}{0.025(1+0.025)^4}\right] = \$\ 17.193.540.85$$

En Excel: $= VA\ (2{,}50\%;\ 4;\ -4570350{,}53)$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	100	2,5%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	4.570.350.53	=E3*$B$1	=B4−4	=E3−D4
5	2	4.570.350.53			
6	3	4.570.350.53			
7	4	4.570.350.53			

En la celda A1 escribimos un valor arbitrario y en la celda B1 la tasa de interés. Desde la celda B4 hasta la celda B7, escribimos el valor de las cuotas mensuales. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E7 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E
1	100,00	2,50%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				100,00
4	1	4.570.350,54	2,50	4.570.348,04	(4.570.248,04)
5	2	4.570.350,54	(114.256,20)	4.684.606,74	(9.254.854,78)
6	3	4.570.350,54	(231.371,37)	4.801.721,91	(14.056.576,69)
7	4	4.570.350,54	(351.414,42)	4.921.764,96	(18.978.341,65)

Calculamos el valor de las cuotas trimestrales:

$$TET = (1 + TEM)^3 - 1 = (1 + 0.025)^3 - 1 = 7.69\% \text{ trimestral}$$

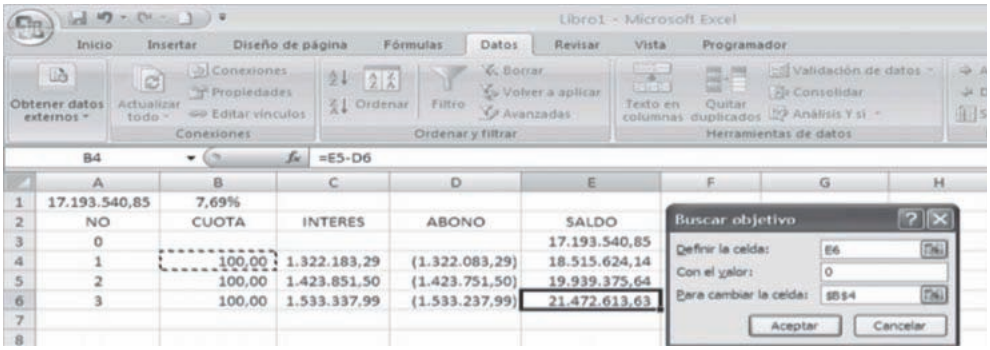
$$A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] = 17.193.540.85\left[\frac{0.0769(1+0.0769)^3}{(1+0.0769)^3 - 1}\right] = \$\ 6.634.383.92$$

En Excel: = PAGO (7,69%; 3; −17193540,85)

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	17.193.540.85	7,69%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	100	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4			
6	3	=B5			

En la celda A1 escribimos el valor del saldo y en la celda B1 la tasa de interés. En la celda B4 escribimos un valor arbitrario y lo copiamos hasta la celda B6. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E6 y aplicamos *Buscar objetivo*.



EJERCICIO 23. Una obligación que inicialmente se había pactado con un pago de $ 2.000.000 dentro de 8 meses y otro pago de $ 3.250.000 para dentro de 10 meses, se conviene pagar con 8 cuotas trimestrales iguales. Si la tasa de financiación es del 3% mensual, calcular el valor de las cuotas trimestrales.

Calculamos el valor de la obligación inicial.

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 10:

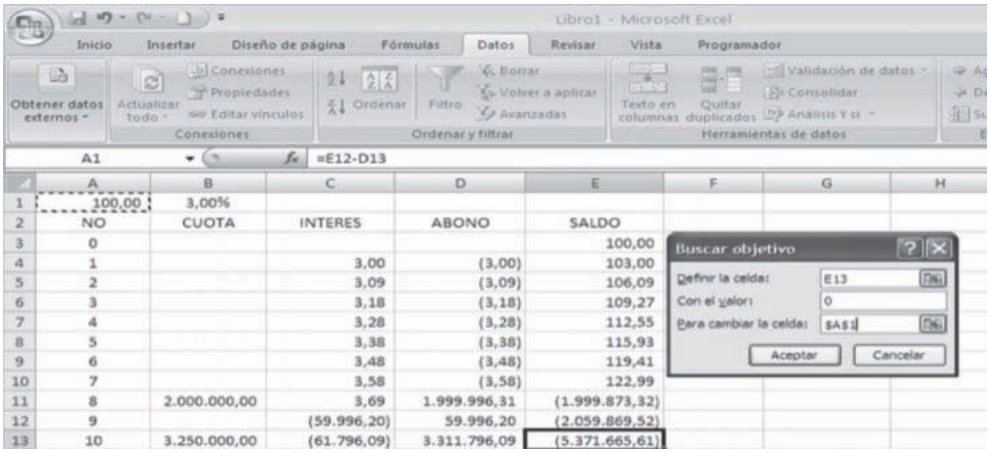
$$P(1 + 0.03)^{10} = 2.000.000(1 + 0.03)^{2} + 3.250.000$$

$$P = \$\ 3.997.123.69$$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	100	3%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1		=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
.....	.....	.....	.....	.....	.....
11	8	2.000.000			
12	9				
13	10	3.250.000			

En la celda A1 escribimos un valor arbitrario y en la celda B1 la tasa de interés. En las celdas B11 y B13 escribimos el valor de las cuotas. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E13 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	100,00	3,00%						
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO			
3	0				100,00			
4	1		3,00	(3,00)	103,00			
5	2		3,09	(3,09)	106,09			
6	3		3,18	(3,18)	109,27			
7	4		3,28	(3,28)	112,55			
8	5		3,38	(3,38)	115,93			
9	6		3,48	(3,48)	119,41			
10	7		3,58	(3,58)	122,99			
11	8	2.000.000,00	3,69	1.999.996,31	(1.999.873,32)			
12	9		(59.996,20)	59.996,20	(2.059.869,52)			
13	10	3.250.000,00	(61.796,09)	3.311.796,09	(5.371.665,61)			

Conocido el valor de la obligación, calculamos el valor de las 8 cuotas trimestrales iguales.

Calculamos la tasa efectiva trimestral equivalente al 3% mensual:

$$TET = (1 + TEM)^3 - 1 = (1 + 0.03)^3 - 1 = 9.27\% \text{ trimestral}$$

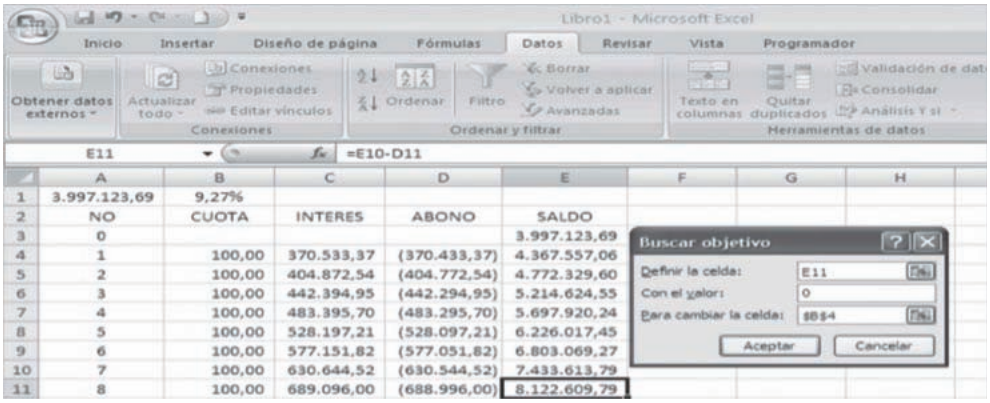
$$A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] = 3.997.123.69\left[\frac{0.0927(1+0.0927)^8}{(1+0.0927)^8 - 1}\right] = \$\ 729.440.89$$

En Excel: $= PAGO\ (9{,}27\%;\ 8;\ -3997123{,}69)$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	3.997.123.69	9,27%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	100	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4			
6	3	=B5			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
11	8				

En la celda A1 escribimos el valor de la obligación y en la celda B1 la tasa de interés. En la celda B4 escribimos un valor arbitrario y lo copiamos hasta la celda B11. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E11 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	3.997.123,69	9,27%						
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO			
3	0				3.997.123,69			
4	1	100,00	370.533,37	(370.433,37)	4.367.557,06			
5	2	100,00	404.872,54	(404.772,54)	4.772.329,60			
6	3	100,00	442.394,95	(442.294,95)	5.214.624,55			
7	4	100,00	483.395,70	(483.295,70)	5.697.920,24			
8	5	100,00	528.197,21	(528.097,21)	6.226.017,45			
9	6	100,00	577.151,82	(577.051,82)	6.803.069,27			
10	7	100,00	630.644,52	(630.544,52)	7.433.613,79			
11	8	100,00	689.096,00	(688.996,00)	8.122.609,79			

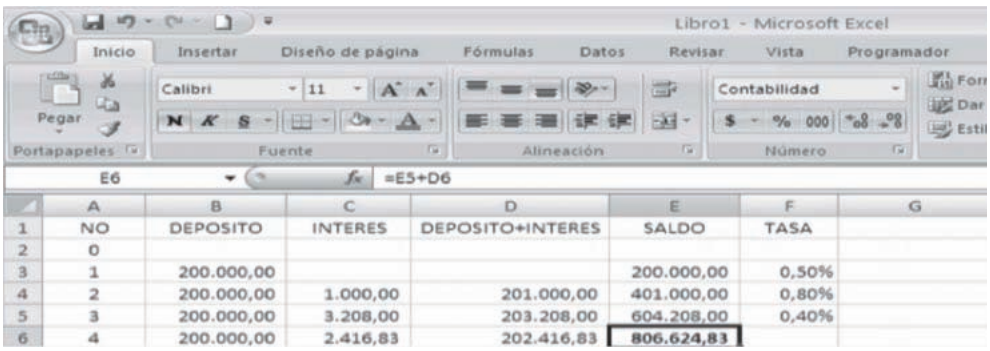
EJERCICIO 24. Un empleado deposita en una entidad financiera, cada fin de mes, durante 4 meses $ 200.000. Calcular el saldo al final del cuarto mes, si se esperan las siguientes tasas de interés:

MES	1	2	3
TASA	0.5%	0.8%	0.4%

Este es el caso del cálculo del valor futuro de una anualidad con tasa variable, en el cual no aplica la fórmula tradicional de las Matemáticas Financieras, que supone que la tasa de interés permanece fija.

Hoja de cálculo Excel

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
1	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO+INTERÉS	SALDO	TASA
2	0					
3	1	200.000			=B3	0.5%
4	2	200.000	=E3*F3	=B4+C4	=E3+D4	0.8%
5	3	200.000	=E4*F4	=B5+C5	=E4+D5	0.4%
6	4	200.000	=E5*F5	=B6+C6	=E5+D6	



	A	B	C	D	E	F	G
1	NO	DEPOSITO	INTERES	DEPOSITO+INTERES	SALDO	TASA	
2	0						
3	1	200.000,00			200.000,00	0,50%	
4	2	200.000,00	1.000,00	201.000,00	401.000,00	0,80%	
5	3	200.000,00	3.208,00	203.208,00	604.208,00	0,40%	
6	4	200.000,00	2.416,83	202.416,83	806.624,83		

EJERCICIO 25. Una pareja de recién casados compra un apartamento en $ 50.000.000 pagando una tasa de interés del 3% mensual. Si la pareja puede hacer pagos mensuales vencidos de $ 1.806.648, ¿cuándo terminan de pagar el apartamento?

$$n = \frac{\text{Log A} - \text{Log}\left(\text{A} - \text{P}i\right)}{\text{Log}\left(1 + i\right)} = \frac{\text{Log } 1.806.648 - \text{Log}\left(1.806.648 - 50.000.000 * 0.03\right)}{\text{Log}\left(1 + 0.03\right)} = 5 \text{ años}$$

En Excel: = NPER (3 %; −1806648; 50.000.000)

EJERCICIO 26. Se abre una cuenta de ahorros con $ 10.000.000 en una entidad que paga el 0.4% mensual. Se desean hacer 5 retiros mensuales iguales empezando 6 meses después de abierta la cuenta. ¿De qué valor son los retiros para tener un saldo al final del año de $ 1.500.000?

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

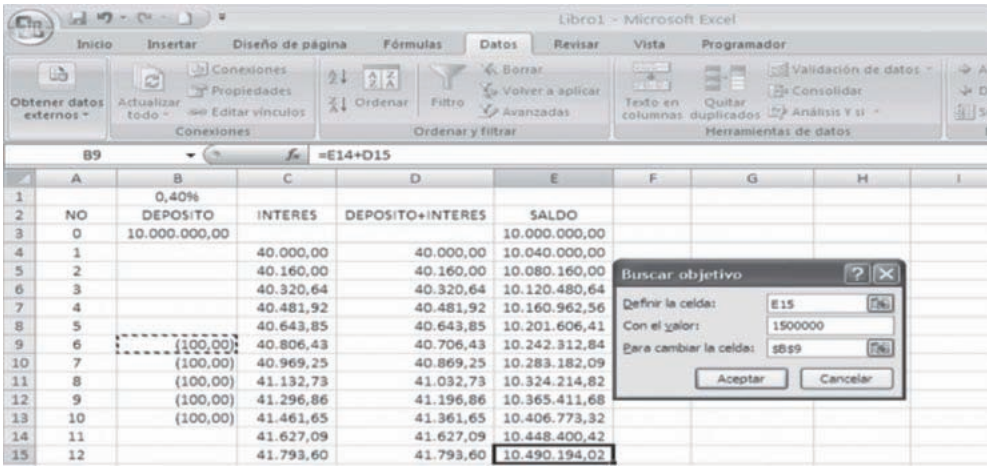
$$10.000.000\left(1 + 0.004\right)^{12} = \text{A}\left[\frac{\left(1 + 0.004\right)^{5} - 1}{0.004}\right]\left(1 + 0.004\right)^{2} + 1.500.000$$

$$\text{A} = \$\ 1.769.627.38$$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1		0.40%			
2	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO+INTERÉS	SALDO
3	0	10.000.000			=B3
4	1		=E3*$B$1	=B4+C4	=E3+D4
.....	.....	.....	.....	.....	.....
9	6	(100)			
10	7	(100)			
11	8	(100)			
12	9	(100)			
13	10	(100)			
14	11				
15	12				

En la celda B1 registramos la tasa de interés y en la celda B3 el valor del depósito inicial. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, depósito más interés y saldo. En las celdas B9 hasta la B13 escribimos los retiros. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		0,40%							
2	NO	DEPOSITO	INTERES	DEPOSITO+INTERES	SALDO				
3	0	10.000.000,00			10.000.000,00				
4	1		40.000,00	40.000,00	10.040.000,00				
5	2		40.160,00	40.160,00	10.080.160,00				
6	3		40.320,64	40.320,64	10.120.480,64				
7	4		40.481,92	40.481,92	10.160.962,56				
8	5		40.643,85	40.643,85	10.201.606,41				
9	6	(100,00)	40.806,43	40.706,43	10.242.312,84				
10	7	(100,00)	40.969,25	40.869,25	10.283.182,09				
11	8	(100,00)	41.132,73	41.032,73	10.324.214,82				
12	9	(100,00)	41.296,86	41.196,86	10.365.411,68				
13	10	(100,00)	41.461,65	41.361,65	10.406.773,32				
14	11		41.627,09	41.627,09	10.448.400,42				
15	12		41.793,60	41.793,60	10.490.194,02				

EJERCICIO 27. Se hacen depósitos en una entidad financiera desde el mes 1 hasta el mes 4 de $ 350.000. Luego se hacen retiros desde el mes 7 hasta el mes 10 de $ 125.000 cada mes. Si se tiene un saldo al final del año de $ 1.245.000, ¿qué tasa de interés le reconocieron?

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

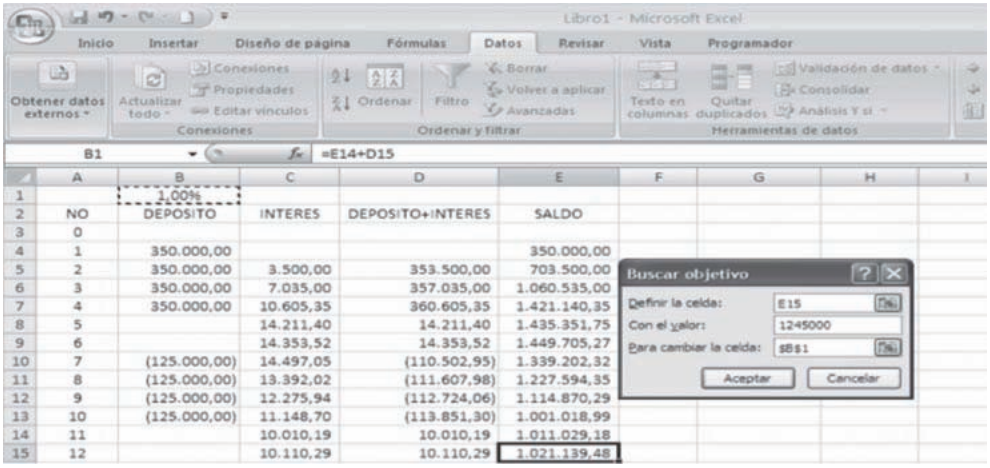
$$350.000\left[\frac{(1+i)^4-1}{i}\right](1+i)^8 = 125.000\left[\frac{(1+i)^4-1}{i}\right](1+i)^2 + 1.245.000$$

Por interpolación lineal, $i = 2.63$ % mensual.

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1		1.0%			
2	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO+INTERÉS	SALDO
3	0				
4	1	350.000			=B4
5	2	350.000	=E4*$B$1	=B4+C4	=E4+D5
6	3	350.000			
7	4	350.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
10	7	(125.000)			
11	8	(125.000)			
12	9	(125.000)			
13	10	(125.000)			
14	11				
15	12				

En la celda B1 escribimos una tasa arbitraria la tasa de interés. Desde la celda B4 a B7 registramos los depósitos y desde la B10 a la B13 registramos los retiros. En las celdas C5, D5 y E5 calculamos intereses, depósito más interés y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C5, D5 y E5 en el rango C6:E15 y aplicamos *Buscar objetivo*.



EJERCICIO 28. Para usted, ¿qué resulta mejor negocio para comprar un electrodoméstico que cuesta $ 2.000.000?

a) Pagar 12 cuotas mensuales de $ 189.119.19.

b) Pagar 4 cuotas trimestrales de $ 578.769.79.

Opción a. Calculamos la tasa de interés mensual.

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$2.000.000 = 189.119.19\left[\frac{(1+i)^{12} - 1}{i(1+i)^{12}}\right]$$

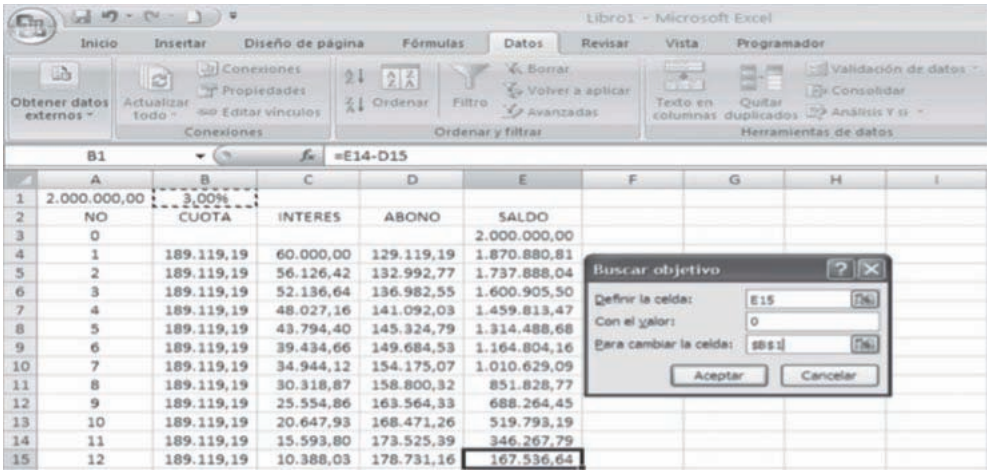
Por interpolación lineal, $i = 2{,}0\%$ mensual

En Excel: $= \text{TASA}(12; -189119{,}19; 2.000.000)$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	2.000.000	3%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	189.119.19	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
…..	…….	……	…….	…….	…….
15	12	189.119.19			

En la celda A1 escribimos el valor del electrodoméstico y en la celda B1 escribimos una tasa de interés arbitraria. Desde la celda B4 hasta la B15 escribimos el valor de la cuota mensual. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	2.000.000,00	3,00%							
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO				
3	0				2.000.000,00				
4	1	189.119,19	60.000,00	129.119,19	1.870.880,81				
5	2	189.119,19	56.126,42	132.992,77	1.737.888,04				
6	3	189.119,19	52.136,64	136.982,55	1.600.905,50				
7	4	189.119,19	48.027,16	141.092,03	1.459.813,47				
8	5	189.119,19	43.794,40	145.324,79	1.314.488,68				
9	6	189.119,19	39.434,66	149.684,53	1.164.804,16				
10	7	189.119,19	34.944,12	154.175,07	1.010.629,09				
11	8	189.119,19	30.318,87	158.800,32	851.828,77				
12	9	189.119,19	25.554,86	163.564,33	688.264,45				
13	10	189.119,19	20.647,93	168.471,26	519.793,19				
14	11	189.119,19	15.593,80	173.525,39	346.267,79				
15	12	189.119,19	10.388,03	178.731,16	167.536,64				

Opción b. Calculamos la tasa de interés trimestral.

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$2.000.000 = 578.769.79\left[\frac{(1+i)^4 - 1}{i(1+i)^4}\right]$$

Por interpolación lineal, $i = 6.12\%$ trimestral

En Excel: $=$ TASA (4; $-578769,79$; 2000000)

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	2.000.000	3%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	578.769.79	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
.....	.....	.....	.....	.....	.....
7	4	578.769.79			

En la celda A1 escribimos el valor del electrodoméstico y en la celda B1 escribimos una tasa de interés arbitraria. Desde la celda B4 hasta la B7 escribimos el valor de la cuota trimestral. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E7 y aplicamos *Buscar objetivo*.

	A	B	C	D	E
1	2.000.000,00	3,00%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				2.000.000,00
4	1	578.769,79	60.000,00	518.769,79	1.481.230,21
5	2	578.769,79	44.436,91	534.332,88	946.897,33
6	3	578.769,79	28.406,92	550.362,87	396.534,46
7	4	578.769,79	11.896,03	566.873,76	(170.339,30)
8					

Comparando las tasas de interés obtenidas para cada opción (2.0% mensual y 6.12% trimestral), se concluye que las dos opciones son equivalentes porque estas dos tasas son equivalentes.

EJERCICIO 29. Una entidad financiera realiza un Leasing financiero con Jose Luis por un local comercial, por valor de $ 80.000.000 con un plazo de 1 año mediante el pago de un canon mensual vencido de $ 7.500.000 y una opción de compra del 10%. ¿Qué tasa de interés le cobraron?

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

$$80.000.000(1+i)^{12} = 7.500.000\left[\frac{(1+i)^{12}-1}{i}\right] + 8.000.000$$

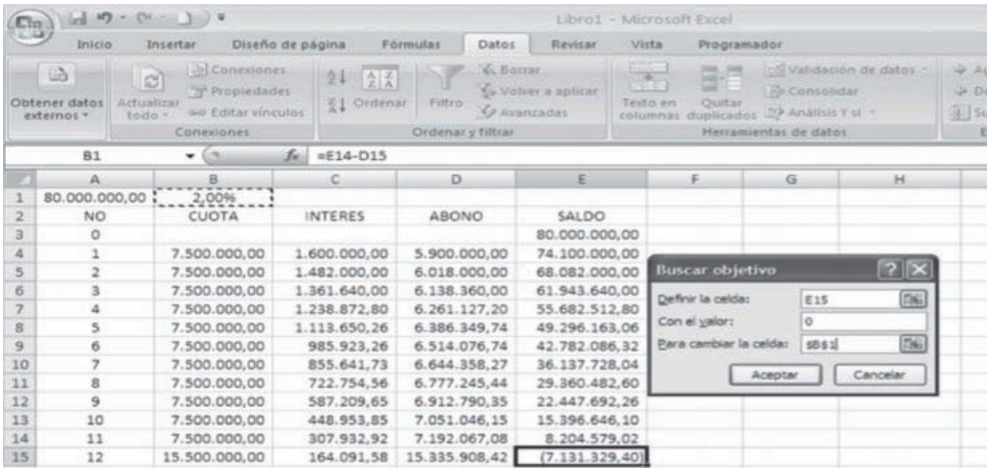
Por interpolación lineal, $i = 3{,}05\%$ mensual

En Excel: $=$ TASA (12; -7500000; 80.000.000; $-8.000.000$)

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	80.000.000	2%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	7.500.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12	15.500.000			

En la celda A1 escribimos el valor del Leasing y en la celda B1 escribimos una tasa de interés arbitraria. Desde la celda B4 hasta la B15 escribimos el valor del canon mensual, con excepción de la celda B15 en la que agregamos al valor del canon mensual la opción de compra.. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	80.000.000,00	2,00%						
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO			
3	0				80.000.000,00			
4	1	7.500.000,00	1.600.000,00	5.900.000,00	74.100.000,00			
5	2	7.500.000,00	1.482.000,00	6.018.000,00	68.082.000,00			
6	3	7.500.000,00	1.361.640,00	6.138.360,00	61.943.640,00			
7	4	7.500.000,00	1.238.872,80	6.261.127,20	55.682.512,80			
8	5	7.500.000,00	1.113.650,26	6.386.349,74	49.296.163,06			
9	6	7.500.000,00	985.923,26	6.514.076,74	42.782.086,32			
10	7	7.500.000,00	855.641,73	6.644.358,27	36.137.728,04			
11	8	7.500.000,00	722.754,56	6.777.245,44	29.360.482,60			
12	9	7.500.000,00	587.209,65	6.912.790,35	22.447.692,26			
13	10	7.500.000,00	448.953,85	7.051.046,15	15.396.646,10			
14	11	7.500.000,00	307.932,92	7.192.067,08	8.204.579,02			
15	12	15.500.000,00	164.091,58	15.335.908,42	(7.131.329,40)			

EJERCICIO 30. Un Banco aprueba un crédito por valor de $ 18.000.000 con una tasa de interés del 14% EA con intereses pagaderos trimestre vencido y plazo de un año, para amortizarlo con cuotas trimestrales iguales. Calcular el valor de las cuotas trimestrales

$$TEA = (1 + TET)^4 - 1$$

$$TET = (1 + TEA)^{1/4} - 1 = (1 + 0.14)^{1/4} - 1 = 3.33\ \%\ \text{trimestral}$$

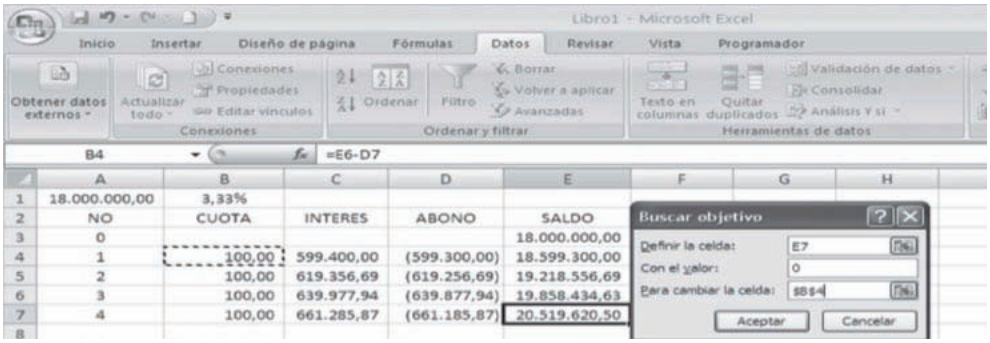
$$A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] = 18.000.000\left[\frac{0.0333(1+0.0333)^4}{(1+0.0333)^4 - 1}\right] = \$\ 4.880.759.04$$

En Excel: = PAGO (3,33%; 4; 18000000)

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	18.000.000	3,33%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	100	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4			
6	3	=B5			
7	4	=B6			

En la celda A1 escribimos el valor del préstamo y en la celda B1 escribimos la tasa de interés del crédito. En la celda B4 escribimos un valor arbitrario y lo copiamos hasta la celda B7. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E7 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E
1	18.000.000,00	3,33%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				18.000.000,00
4	1	100,00	599.400,00	(599.300,00)	18.599.300,00
5	2	100,00	619.356,69	(619.256,69)	19.218.556,69
6	3	100,00	639.977,94	(639.877,94)	19.858.434,63
7	4	100,00	661.285,87	(661.185,87)	20.519.620,50

EJERCICIO 31. Se inicia una cuenta de ahorros con un depósito inicial P. Desde el mes 2 hasta el mes 5 se hacen depósitos adicionales de $ 600.000 cada mes. Si desde el mes 7 hasta el mes 11 se hacen retiros de $ 125.000 cada mes, calcular el valor del depósito inicial para tener un saldo al final del año de $ 5.000.000. La tasa de interés que le reconocen es del 0.4% mensual.

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

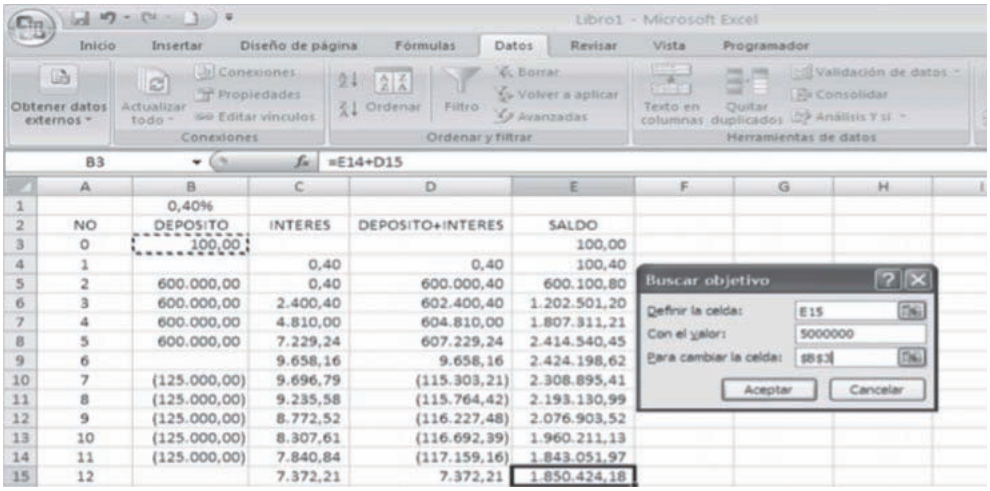
$$P(1.004)^{12} + 600.000\left[\frac{(1.004)^4 - 1}{0.004}\right](1.004)^7 = 125.000\left[\frac{(1.004)^5 - 1}{0.004}\right](1.004) + 5.000.000$$

$$P = \$\ 3.002.354.56$$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1		0.4%			
2	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO+INTERÉS	SALDO
3	0	100			=B3
4	1		=E3*$B$1	=B4+C4	=E3+D4
5	2	600.000			
6	3	600.000			
7	4	600.000			
8	5	600.000			
9	6				
10	7	(125.000)			
11	8	(125.000)			
12	9	(125.000)			
13	10	(125.000)			
14	11	(125.000)			
15	12				

En la celda B3 escribimos un valor arbitrario, que corresponde al depósito inicial, y en la celda B1 escribimos la tasa de interés. Desde la celda B5 a B8 registramos los depósitos adicionales y desde la B10 a la B14 registramos los retiros. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, depósito más interés y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D45 y E45 en el rango C5:E15 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E
1		0,40%			
2	NO	DEPOSITO	INTERES	DEPOSITO+INTERES	SALDO
3	0	100,00			100,00
4	1		0,40	0,40	100,40
5	2	600.000,00	0,40	600.000,40	600.100,80
6	3	600.000,00	2.400,40	602.400,40	1.202.501,20
7	4	600.000,00	4.810,00	604.810,00	1.807.311,21
8	5	600.000,00	7.229,24	607.229,24	2.414.540,45
9	6		9.658,16	9.658,16	2.424.198,62
10	7	(125.000,00)	9.696,79	(115.303,21)	2.308.895,41
11	8	(125.000,00)	9.235,58	(115.764,42)	2.193.130,99
12	9	(125.000,00)	8.772,52	(116.227,48)	2.076.903,52
13	10	(125.000,00)	8.307,61	(116.692,39)	1.960.211,13
14	11	(125.000,00)	7.840,84	(117.159,16)	1.843.051,97
15	12		7.372,21	7.372,21	1.850.424,18

CAPÍTULO 6

Gradientes o series variables

Aprende a conocer el verdadero valor del tiempo: arrebata, coge y aprovecha cada momento. Nada de ociosidad; fuera pereza; nada de aplazamientos; nunca dejes para mañana lo que puedas hacer hoy.

Lord Chesterfield

0. Introducción

En economías inflacionarias los créditos favorecen a los deudores, porque están en la posibilidad de liquidar sus deudas con dinero más barato, razón por la cual los acreedores no recuperan totalmente el dinero prestado. El otorgamiento de créditos con tasas de interés fijas constituyen un subsidio tácito a favor del deudor y a cargo de los fondos manejados por la entidad financiadora (*Zarruk,1986*). Por esta razón, el prestamista necesita recuperar lo antes posible el dinero dado en préstamo. De otra parte, los usuarios de créditos a largo plazo, por su limitada disponibilidad de dinero, también necesitan contar con sistemas de amortización de créditos que se inicien con cuotas bajas que se vayan incrementando al ritmo de sus ingresos. Estas circunstancias que rodean una operación financiera plantean la necesidad de diseñar modelos matemáticos que consideren flujos de caja conformados por una serie de pagos que no sean iguales, sino que aumenten o disminuyan periódicamente, llamados *Gradientes o Series Variables*.

Estos modelos matemáticos también se basan en la suposición teórica de que valores como el mantenimiento de un vehículo, gastos operativos de una empresa, aumentan cada período en una cantidad exactamente igual. Se afirma que es una suposición teórica porque en la vida real, en lo que hace referencia a estos gastos, es imposible que se puedan prever aumentos o disminuciones periódicos constantes. Sin embargo, la serie de gradientes también analizan estas situaciones.

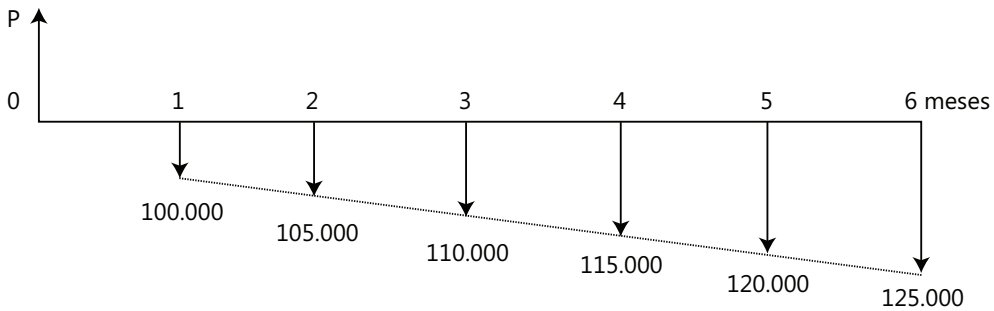
El propósito de este capítulo es, precisamente, el análisis de este modelo matemático llamado *Gradientes o series variables.* Es así como analizaremos una serie de pagos que aumentan o disminuyen cada uno con respecto al anterior en una cantidad constante de dinero, la que llamaremos *gradiente lineal o aritmético*, y la serie de pagos que aumentan o disminuyen en un porcentaje constante la que llamaremos *gradiente geométrico*. Analizaremos, como caso especial, un tipo de gradiente llamado *gradiente escalonado*, que es aquel cuyas cuotas permanecen fijas durante un tiempo (generalmente un año) y después aumentan en una cantidad fija, en pesos o en porcentaje.

Como introducción a este tema desarrollemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6.1

Una deuda se está cancelando con 6 cuotas mensuales, que aumentan cada mes en $ 5.000. El valor de la primera cuota es de $ 100.000. Si la tasa de interés que se cobra en la operación es del 3% mensual, calcular el valor inicial de la deuda.

El flujo de caja es el siguiente.



Se elige el momento cero para plantear la ecuación de valor.

$$P = \frac{100.000}{(1.03)^1} + \frac{105.000}{(1.03)^2} + \frac{110.000}{(1.03)^3} + \frac{115.000}{(1.03)^4} + \frac{120.000}{(1.03)^5} + \frac{125.000}{(1.03)^6}$$

$$P = \$\ 607.100.13$$

La solución de este ejercicio no presentó ninguna dificultad. Es el mismo procedimiento que utilizamos para resolver flujos de caja variables conformados por pagos individuales vistos en el capítulo 3, y el mismo con que hicimos la introducción al tema de las anualidades. Pero, si el ejercicio supusiera no 6 pagos mensuales sino, por ejemplo, 60 pagos mensuales, la solución del ejercicio utilizando este procedimiento se tornaría largo y tedioso. Por esta razón, se hace necesario entrar a estudiar el modelo matemático llamado *Gradientes o Series variables* que analiza esta situación. El modelo suministra expresiones para hacer movimientos del dinero en una forma directa, sin tener que acudir al procedimiento del ejemplo 6.1.

1. Definición

Se llama gradientes a una serie de pagos periódicos que tienen una ley de formación. Esta ley de formación hace referencia a que los pagos pueden aumentar o disminuir, con relación al pago anterior, en una cantidad constante en pesos o en un porcentaje.

2. Condiciones para que una serie de pagos sea un gradiente

Para que una serie de pagos periódicos se considere un sistema de gradientes, debe cumplir con las siguientes condiciones.

- Los pagos deben tener una ley de formación.
- Los pagos deben ser periódicos.
- La serie de pagos debe tener un valor presente (P) equivalente y un valor futuro (F) equivalente.
- El número de períodos debe ser igual al número de pagos.

Si comparamos estas 4 condiciones con las que caracterizan el sistema de anualidades, notamos que la única diferencia entre los dos modelos matemáticos está en la primera condición. Mientras que en el sistema de anualidades los pagos son iguales, en el sistema de gradientes los pagos tienen una ley de formación. Una anualidad, entonces, es un caso especial de gradientes en el cual la variación de una cuota con respecto a la otra es cero. Por esta razón, el tratamiento que se le da a los gradientes es igual al de las anualidades.

Se pueden presentar combinaciones, tanto en el gradiente aritmético como en el geométrico, como las analizadas en las anualidades. En el caso de cuotas que crecen en una cantidad fija periódicamente, se presenta un gradiente lineal creciente vencido, si las cuotas se pagan al final del mes; gradiente lineal creciente anticipado, si las cuotas se cancelan al principio del período y gradiente lineal creciente diferido, si el pago de la primera cuota se posterga en el tiempo. Estas combinaciones también se presentan para el gradiente lineal decreciente. En el caso en que las cuotas aumenten cada período en un porcentaje y el pago se realice al final del período se tiene un gradiente geométrico creciente vencido. Si el pago de las cuotas es anticipado se tiene un gradiente geométrico creciente anticipado, y si las cuotas se cancelan períodos posteriores a la fecha de realizada la operación financiera, se tiene el gradiente geométrico creciente diferido. Lo mismo sucede con el gradiente geométrico decreciente.

3. Gradiente lineal o aritmético

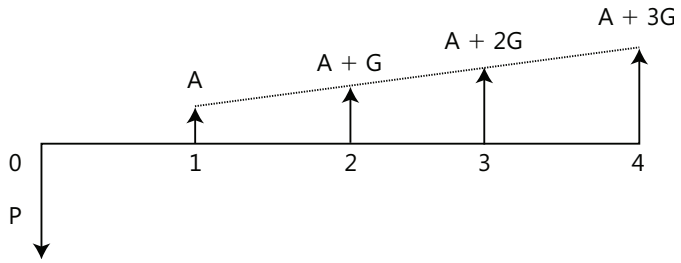
Serie de pagos periódicos tales que cada pago es igual al anterior aumentado o disminuido en una cantidad constante en pesos. Cuando la cantidad constante es positiva, se genera el *gradiente aritmético creciente*. Cuando la cantidad constante es negativa, se genera el *gradiente aritmético decreciente*. Por ejemplo, si una deuda se está cancelando con cuotas mensuales que crecen cada mes en $ 5.000, la serie de pagos conforman un gradiente lineal creciente. Si los pagos disminuyen en $ 5.000 cada mes, su conjunto constituye un gradiente lineal decreciente.

3.1 Gradiente lineal creciente

Valor presente de un gradiente lineal creciente

Es un valor ubicado en el presente, que resulta de sumar los valores presentes de una serie de pagos que aumentan cada período una cantidad constante (G).

Analicemos el siguiente flujo de caja que puede corresponder a una operación financiera cualquiera.



$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right] \quad (6.1)$$

Donde: P = valor presente de la serie de gradientes

A = valor de la primera cuota de la serie

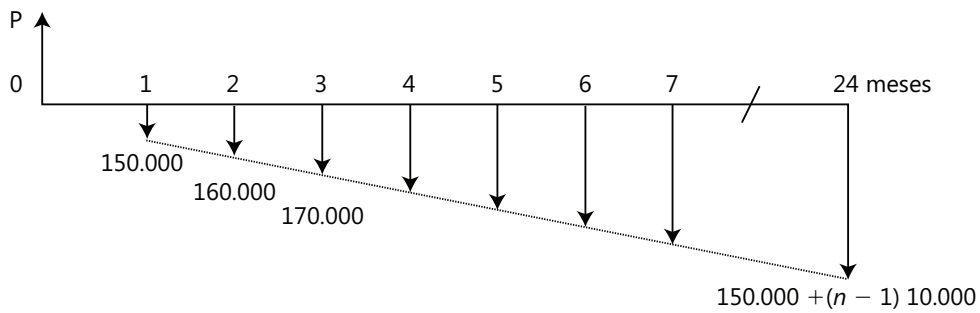
i = tasa de interés de la operación

n = número de pagos o ingresos

G = constante en que aumenta cada cuota

Ejemplo 6.2

El valor de una máquina procesadora de arroz se está cancelando con 24 cuotas mensuales, que aumentan cada mes en $ 10.000, y el valor de la primera cuota es de $150.000. Si la tasa de interés que se está cobrando es del 3% mensual, calcular el valor de la máquina.



$$P = 150.000\left[\frac{(1.03)^{24}-1}{0.03(1.03)^{24}}\right] + \frac{10.000}{0.03}\left[\frac{(1.03)^{24}-1}{0.03(1.03)^{24}} - \frac{24}{(1+i)^{24}}\right]$$

$$P = \$\ 4.250.042.13$$

Es equivalente cancelar hoy $ 4.250.042.13 que cancelar 24 pagos mensuales, que aumenten cada mes en $ 10.000, siendo el primer pago de $ 150.000, a una tasa de interés del 3% mensual.

La mayoría de las calculadoras financieras no disponen de una rutina para el manejo de gradientes, pero afortunadamente las calculadoras Hewlett Packard 19 B II y 17 B II tiene un programa llamado solucionador (RESOL) que permite registrar, en una forma muy sencilla, las fórmulas de ese modelo y realizar cálculos de las variables que contienen. Para tal efecto, basta con registrar cada una de las fórmulas de los gradientes en el menú RESOL, y al aceptarla se crean unos rótulos de menú de aplicación de cada variable de la fórmula registrada. Las calculadoras FC 200 y FC 1.000 traen, también, incorporados 10 programas que permiten almacenar fórmulas. Cada fórmula se constituye en uno de los 10 programas. El procedimiento con estas últimas calculadoras no es tan sencillo como en las Hewlett Packard; para el cálculo de cualquier variable de una fórmula se requiere programar la calculadora, para lo cual se necesitan conocimientos básicos de programación. Por esta razón y en aras de la simplicidad, en este capítulo los cálculos de los ejercicios solamente los haremos con la calculadora Hewlett Packard 17 B II y 19 BII.

Hoy día con el uso de la hoja electrónica Excel los cálculos propios de los gradientes se han simplificado. En este capítulo desarrollamos *Buscar objetivo* de Excel que resuelve en una forma sencilla y práctica cualquier ejercicio de gradientes.

El menú resol de la calculadora Hewlett Packard 17 B II y 19 B II

Este menú es una potente herramienta que permite registrar fórmulas, que luego podemos emplear para calcular el valor de cualquiera de las variables que ésta contiene.

Para ingresar las fórmulas comenzando desde el menú principal (MAIN) se oprime RESOL, se registra la fórmula, asignándole un nombre abreviado seguido por dos puntos, y se oprime INPUT para guardarla en la memoria del RESOL. Al ingresar la fórmula la calculadora presenta en la pantalla el siguiente mensaje: VERIFICANDO FÓRMULA... para indicar que el solucionador está comprobando la fórmula. Si esta no puede ser interpretada, la calculadora exhibe entonces brevemente el mensaje: FÓRMULA INCORRECTA y el cursor se coloca delante del primer carácter que el solucionador no pudo interpretar. Una vez aceptada la fórmula se oprime CALC y la calculadora muestra el menú de variables correspondiente a la fórmula en uso. Basta luego con ingresar el valor de las variables que suministra el ejercicio y oprimir la variable solicitada. El nombre de la fórmula puede tener cualquier número de caracteres, con la condición de que deben ser continuos.

La expresión (6.1), que calcula el valor presente equivalente de un gradiente lineal creciente la registramos en el menú RESOL, de la siguiente manera:

GRALINEALCRE: PGLC = A × ((1 + *i*) ^ *n* − 1)/(*i* × (1 + *i*) ^ *n*) + (G/*i*)

× (((1 + *i*) ^ *n* − 1)/(*i* × (1 + *i*) ^ *n*) − *n* /(1 + *i*) ^ *n*)

Utilizando el menú RESOL, ya con la fórmula del valor presente registrada, podemos calcular para el ejercicio el valor de la máquina con el siguiente procedimiento:

Procedimiento con la calculadora financiera Hewlett Packard 17BII y 19 B II

- Oprima RESOL
- Localice la fórmula GRALINEALCRE
- Oprima CALC
- Aparece en pantalla VERIFICANDO FÖRMULA
- Aparece en la parte inferior de la pantalla un menú de variables de la fórmula en uso
- Ingrese 150.000 A
- Ingrese 0.03 *i*
- Ingrese 24 N
- Ingrese 10.000 G
- Oprima PGLC y obtiene un valor de 4.250.042.13

Con esta fórmula, utilizando el menú RESOL, podemos calcular cualquiera de sus variables, siguiendo un procedimiento similar al anterior, teniendo en cuenta que la tasa de interés se debe ingresar como número decimal.

Para el ejemplo 6.2, la cuota aumenta $ 10.000 cada mes. Si la primera cuota es A, la cuota del segundo mes será A + 10.000, la tercera cuota será A + 20.000, la cuarta cuota será A + 30.000, la enésima cuota será A + (n − 1) G.

Para este ejercicio, la cuota número 24 será igual a:

$$\text{Cuota } n = A + (n - 1)G$$

$$\text{Cuota } 24 = 150.000 + (24 - 1) \times 10.000$$

$$\text{Cuota } 24 = \$\ 380.000$$

Por lo tanto, la expresión para calcular el valor de cualquier cuota es la siguiente:

$$Cn = A + (n - 1)G \tag{6.2}$$

Siendo: Cn = valor de la cuota n

n = número de la cuota

A = valor de la primera cuota

G = variación de cada cuota

En el menú RESOL se registra la expresión (6.2), de la siguiente forma:

$$\text{CUOTAGRALICRE: CGLC} = A + G \times (n - 1)$$

Si se desea calcular para el ejemplo 6.2 el valor de la cuota No 24, utilizando el menú RESOL, se aplica el siguiente procedimiento:

Procedimiento con la calculadora financiera Hewlett Packard 17BII y 19 B II

- Oprima RESOL
- Localice la fórmula CUOTAGRALICRE
- Oprima CALC
- Ingrese 150.000 A
- Ingrese 10.000 G
- Ingrese 24 N
- Oprima CGLC y obtiene un valor de 380.000

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

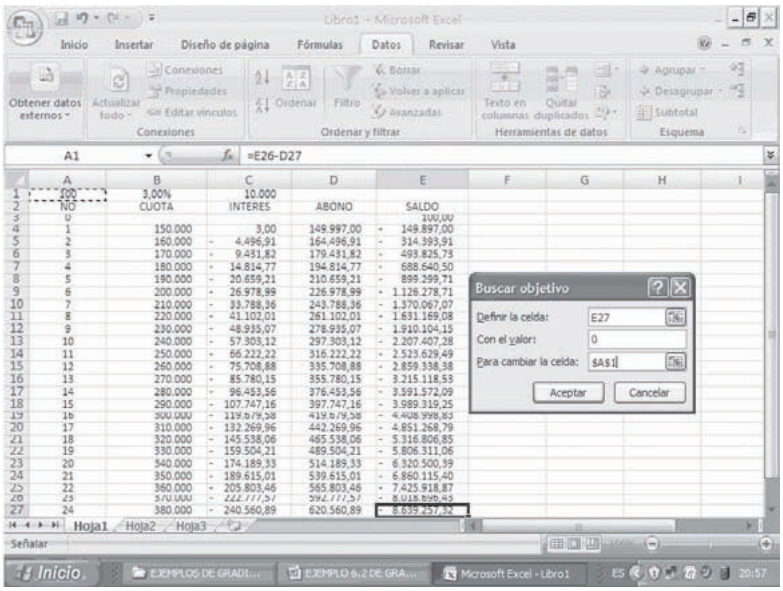
Figura 6.1

	A	B	C	D	E
1	100	3%	10.000		
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	150.00	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4+$C$1			
6	.....	.....	.....	.....	.....
27	24				

A la celda A1 le asignamos un valor arbitrario de 100. En la celda B1 escribimos la tasa de interés del 3% y en la C1 el aumento mensual de las cuotas. En la celda B4 escribimos el valor de la primera cuota y en la B5 calculamos la segunda que es igual a la primera (B4) incrementada en $ 10.000 (C1) y copiamos B5 hasta B27. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, abono a capital y saldo insoluto. (Ver Figura 6.1)

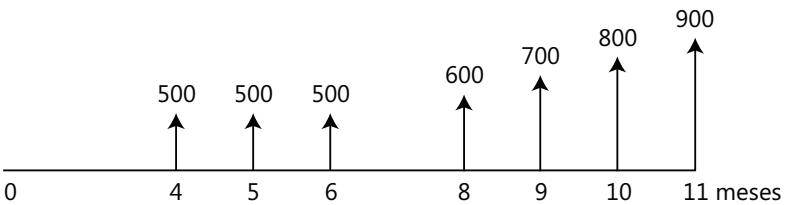
Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E27 y aplicando *Buscar objetivo* encontramos en la celda A1 un valor de $ 4.250.042.13. (Ver figura 6.2).

Figura 6.2



Ejemplo 6.3

Dado el siguiente flujo de caja, calcular el valor presente equivalente a una tasa de interés del 2% mensual.



El flujo de caja está compuesto por dos series de ingresos: una anualidad que comienza en el mes 4 y termina en el mes 6, y por una serie de gradientes lineal creciente que comienza en el mes 8 y termina en el mes 11. La solución más sencilla se plantea analizando las dos series en forma independiente y luego sumando los dos valores presentes.

- Cálculo del valor presente de la primera serie de ingresos.

El valor presente de la anualidad estará ubicado en el mes 3, si la tomamos como una anualidad vencida. Recuerde el lector que el valor presente de una anualidad vencida está ubicado un período anterior a la fecha del primer pago (ingreso).

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$P = 500\left[\frac{(1.02)^3 - 1}{0.02(1.02)^3}\right]$$

$$P = 1.441.94$$

Este es el valor presente de la anualidad en el mes 3, el que tenemos que trasladar al momento cero.

$$P = \frac{1.441.94}{(1.02)^3} = 1.358.77$$

- Cálculo del valor presente de la segunda serie de ingresos. Esta serie corresponde a un gradiente lineal creciente, en el que A = 600, G = 100, i = 2% y n = 4.

$$P = 600\left[\frac{(1.02)^4 - 1}{0.02(1.02)^4}\right] + \frac{100}{0.02}\left[\frac{(1.02)^4 - 1}{0.02(1.02)^4} - \frac{4}{(1.02)^4}\right]$$

$$P = 2.846.37$$

Este valor obtenido corresponde al presente del gradiente en el mes 7, por tal razón, tenemos que trasladarlo al momento cero.

$$P = \frac{2.846.37}{(1.02)^7}$$

$$P = 2.477.94$$

El valor presente de toda la serie será igual a la suma de los dos valores presentes.

$$P = 2.477.94 + 1.358.77$$

$$P = 3.836.71$$

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

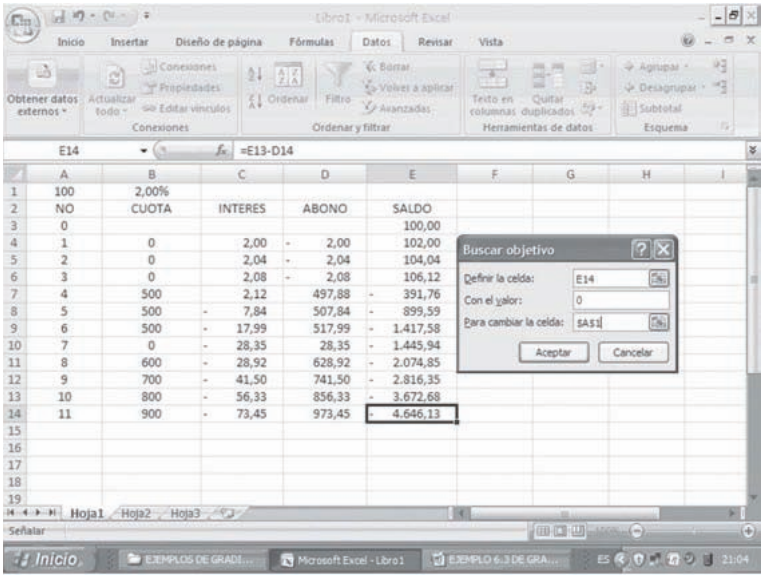
Figura 6.3

	A	B	C	D	E
1	100	2%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	0	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	0			
6	3	0	.....	.....	.....
7	4	500			
8	5	500			
9	6	500			
10	7	0			
11	8	600			
12	9	700			
13	10	800			
14	11	900			

En la columna B registramos los ingresos que plantea el ejercicio, así: en las celdas B4, B5 y B6 escribimos cero (es necesario escribir cero porque Excel no reconoce espacios en blanco como cero), en las celdas B7, B8 y B9 escribimos 500, en la celda B10 escribimos cero y, en las celdas B11, B12, B13 y B14 escribimos los valores 600, 700, 800 y 900 respectivamente. A la celda A1, que es la incógnita, le asignamos un valor arbitrario de 100. En la celda B1 escribimos la tasa de interés del 2%. En las celdas C4, D4 Y E4 calculamos los intereses, abono a capital y saldo insoluto. (Ver figura 6.3).

Copiando las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E14 y aplicando *Buscar objetivo*, encontramos en la celda A1 un valor de $ 3.836.71. (Ver figura 6.4).

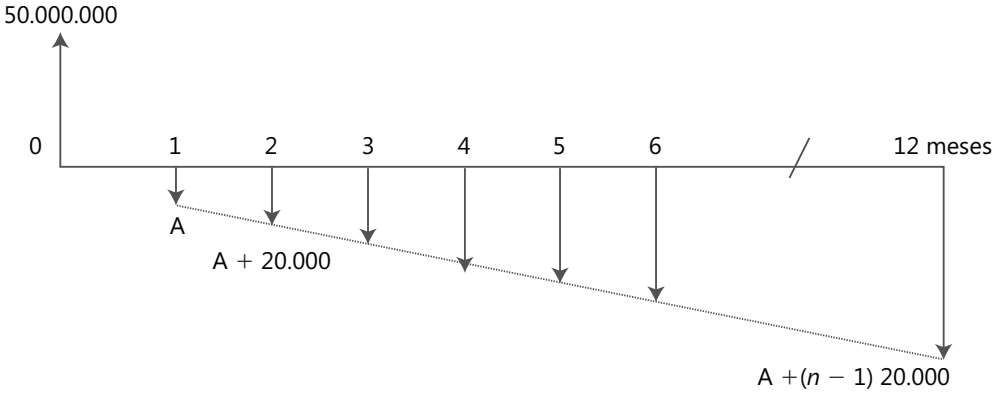
Figura 6.4



	A	B	C	D	E
1	100	2,00%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				100,00
4	1	0	2,00	- 2,00	102,00
5	2	0	2,04	- 2,04	104,04
6	3	0	2,08	- 2,08	106,12
7	4	500	2,12	497,88	- 391,76
8	5	500	- 7,84	507,84	- 899,59
9	6	500	- 17,99	517,99	- 1.417,58
10	7	0	- 28,35	28,35	- 1.445,94
11	8	600	- 28,92	628,92	- 2.074,85
12	9	700	- 41,50	741,50	- 2.816,35
13	10	800	- 56,33	856,33	- 3.672,68
14	11	900	- 73,45	973,45	- 4.646,13

Ejemplo 6.4

Después de la liquidación de una empresa queda una deuda de $ 50.000.000 que se va a financiar con 12 cuotas mensuales, que aumentan en $ 20.000 cada mes. Si la tasa de interés es del 2.5% mensual, calcular el valor de la primera cuota y el valor de la cuota No 12.



En este caso se conoce el valor presente (P), el número de pagos (*n*), la tasa de interés periódica (*i*) y la variación de las cuotas (G), y se pide calcular el valor de la primera cuota (A). La solución al ejercicio se encuentra aplicando la expresión (6.1).

$$50.000.000 = A\left[\frac{(1.025)^{12}-1}{0.025(1.025)^{12}}\right] + \frac{20.000}{0.025}\left[\frac{(1.025)^{12}-1}{0.025(1.025)^{12}} - \frac{12}{(1.025)^{12}}\right]$$

$$A = \$\ 4.770.232.77$$

Este valor de A corresponde a la primera cuota.

La cuota No. 12 será igual a:

$$C12 = A + (n - 1)G \tag{6.2}$$

$$C12 = 4.770.232.77 + (12 - 1)20.000$$

$$C12 = \$\ 4.990.232.77$$

Procedimiento con la calculadora financiera Hewlett Packard 17 BII y 19 B II

- Oprima RESOL
- Localice la fórmula GRALINEALCRE
- Oprima CALC
- Ingrese 50.000.000 PGLC
- Ingrese 0.025 I
- Ingrese 12 N
- Ingrese 20.000 G
- Oprima A y se obtiene un valor de 4.770.232.77

Para el cálculo de la cuota No 12, utilizando el menú RESOL, se procede así:

- Oprima RESOL
- Localice la fórmula CUOTAGRALICRE
- Oprima CALC
- Ingrese 4.770.232.77 A
- Ingrese 20.000 G
- Ingrese 12 N
- Oprima CGLC y se obtiene un valor de 4.990.232.77

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

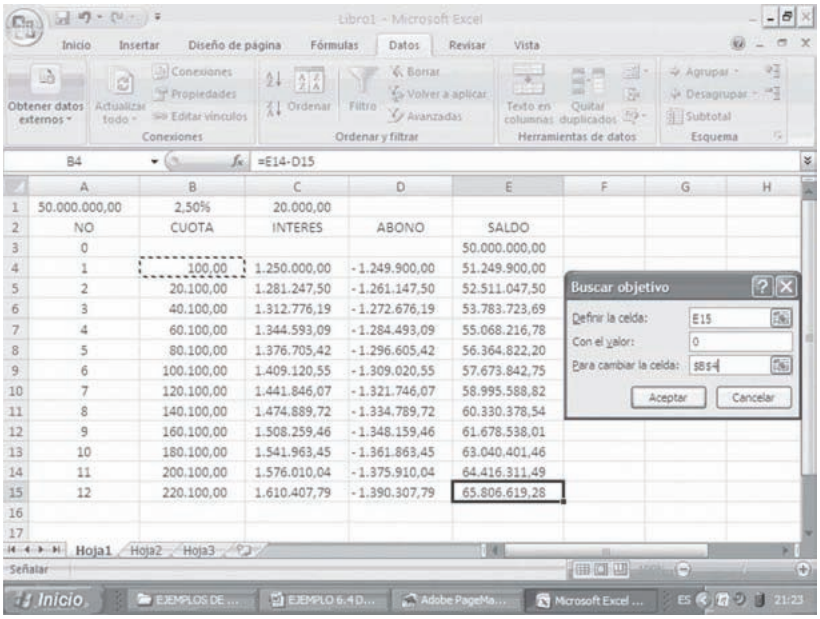
Figura 6.5

	A	B	C	D	E
1	50.000.000	2.5%	20.000		
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	100	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4+$C$1			
6	.....	.....	.....	.....	.....
15	12				

En la celda A1 escribimos 50.000.000, en la B1 2.5%, que es la tasa de interés y en la C1 20.000 que es el aumento mensual de las cuotas. En la celda B4, que corresponde a la incógnita, escribimos un valor arbitrario de 100 y en la celda B5 calculamos la segunda cuota que es igual a la primera (B4) incrementada en $ 20.000 (C1). Copiamos la celda B5 hasta la celda B15. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo insoluto. (Ver figura 6.5).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicando *Buscar objetivo* encontramos en la celda B4 un valor de $ 4.770.232.77, que corresponde a la primera cuota y en la celda B15 un valor de $ 4.990.232.77 que corresponde al valor de la cuota 12. (Ver figura 6.6).

Figura 6.6



	A	B	C	D	E
1	50.000.000,00	2,50%	20.000,00		
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				50.000.000,00
4	1	100,00	1.250.000,00	-1.249.900,00	51.249.900,00
5	2	20.100,00	1.281.247,50	-1.261.147,50	52.511.047,50
6	3	40.100,00	1.312.776,19	-1.272.676,19	53.783.723,69
7	4	60.100,00	1.344.593,09	-1.284.493,09	55.068.216,78
8	5	80.100,00	1.376.705,42	-1.296.605,42	56.364.822,20
9	6	100.100,00	1.409.120,55	-1.309.020,55	57.673.842,75
10	7	120.100,00	1.441.846,07	-1.321.746,07	58.995.588,82
11	8	140.100,00	1.474.889,72	-1.334.789,72	60.330.378,54
12	9	160.100,00	1.508.259,46	-1.348.159,46	61.678.538,01
13	10	180.100,00	1.541.963,45	-1.361.863,45	63.040.401,46
14	11	200.100,00	1.576.010,04	-1.375.910,04	64.416.311,49
15	12	220.100,00	1.610.407,79	-1.390.307,79	65.806.619,28

Ejemplo 6.5

¿Con cuántos pagos mensuales, que aumenten en $ 13.500 cada mes, se cancela el valor de una obligación de $ 75.000.000, si se cobra una tasa de interés del 3% mensual y la primera cuota es de $ 8.042.291.95? ¿Cuál será el valor de la última cuota?

El flujo de caja corresponde a un gradiente lineal creciente en el que la primera cuota (A) tiene un valor de $ 8.042.291.95 y la cuota crece en $ 13.500 cada mes, con respecto a la cuota del mes anterior. La solución del ejercicio consiste en calcular el número de cuotas mensuales necesarias para la cancelación de la deuda.

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right] \qquad (6.1)$$

$$75.000.000 = 8.042.291.95\left[\frac{(1.03)^n - 1}{0.03(1.03)^n}\right] + \frac{13.500}{0.03}\left[\frac{(1.03)^n - 1}{0.03(1.03)^n} - \frac{n}{(1.03)^n}\right]$$

Por el método de interpolación lineal, se obtiene un valor de *n* igual a 11.

Cuando se calcula el número de pagos en un sistema de gradientes y éste no corresponde a un número entero, la solución más sencilla se logra redondeando el número de cuotas y recalculando el valor de la primera cuota.

Para el cálculo de la última cuota, que corresponde a la cuota No. 11, aplicamos la expresión:

$$Cn = A + (n - 1)G \tag{6.2}$$

$$C11 = 8.042.291.95 + (11 - 1)13.500$$

$$C11 = \$\ 8.177.291.95$$

Con la expresión diseñada para el cálculo del valor presente de un gradiente lineal creciente, y registrada en el menú RESOL con el nombre GRALINEALCRE, se calcula el valor de (*n*) en una forma directa.

Procedimiento con la calculadora financiera Hewlett Packard 17 y 19 B II

- Oprima RESOL
- Localice la fórmula GRALINEALCRE
- Oprima CALC
- Ingrese 75.000.000 PGLC
- Ingrese 8.042.291.95 A
- Ingrese 0.03 I
- Ingrese 13.500 G
- Oprima N y se obtiene un valor de 11.

Para el cálculo de la cuota No 11, utilizando el menú RESOL, se procede de la siguiente manera:

- Oprima RESOL
- Localice la fórmula CUOTAGRALICRE
- Oprima CALC
- Ingrese 8.042.291.95 A
- Ingrese 13.500 G
- Ingrese 11 N
- Oprima CGLC y se obtiene un valor de 8.177.291.95

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

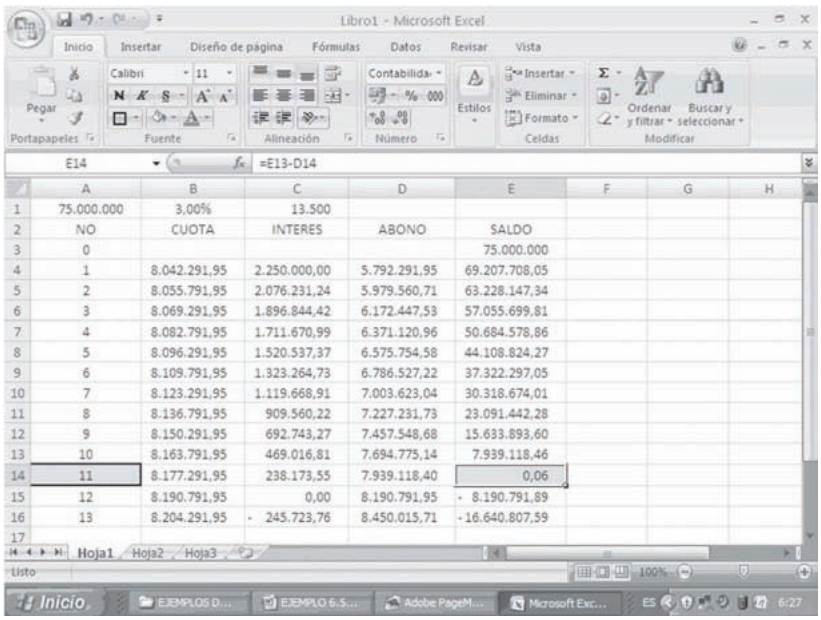
Figura 6.7

	A	B	C	D	E
1	75.000.000	3.00%	13.500		
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	8.042.291.95	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4+$C$1			
6	.....	.....	.....	.....	.....
16	13				

En la celda A1 escribimos 75.000.000, en la B1 la tasa de interés del 3.0% y en la C1 $ 13.500 que es el aumento mensual de las cuotas. En la celda B4 registramos $ 8.042.291.95 que corresponde al valor de la primera cuota y en la celda B5 calculamos la segunda cuota que es igual a la primera (B4) incrementada en $ 13.500 (C1). Copiamos la celda B5 hasta B16 (aunque pueden ser más períodos). En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo insoluto. (Ver figura 6.7).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E16 y observamos en la tabla de amortización que el saldo en la celda E14 es igual a cero, es decir, que la obligación se amortiza con 11 cuotas. El valor de la cuota 11 (última cuota) la encontramos en la celda B14 con un valor de $ 8.177.291.95. (Ver figura 6.8).

Figura 6.8



	A	B	C	D	E
1	75.000.000	3,00%	13.500		
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				75.000.000
4	1	8.042.291,95	2.250.000,00	5.792.291,95	69.207.708,05
5	2	8.055.791,95	2.076.231,24	5.979.560,71	63.228.147,34
6	3	8.069.291,95	1.896.844,42	6.172.447,53	57.055.699,81
7	4	8.082.791,95	1.711.670,99	6.371.120,96	50.684.578,86
8	5	8.096.291,95	1.520.537,37	6.575.754,58	44.108.824,27
9	6	8.109.791,95	1.323.264,73	6.786.527,22	37.322.297,05
10	7	8.123.291,95	1.119.668,91	7.003.623,04	30.318.674,01
11	8	8.136.791,95	909.560,22	7.227.231,73	23.091.442,28
12	9	8.150.291,95	692.743,27	7.457.548,68	15.633.893,60
13	10	8.163.791,95	469.016,81	7.694.775,14	7.939.118,46
14	11	8.177.291,95	238.173,55	7.939.118,40	0,06
15	12	8.190.791,95	0,00	8.190.791,95	- 8.190.791,89
16	13	8.204.291,95	- 245.723,76	8.450.015,71	-16.640.807,59
17					

Ejemplo 6.6

¿En qué cantidad debe aumentar el valor de las 12 cuotas mensuales, con que se está financiando un inventario de repuestos que tiene un valor de contado de $ 5.000.000, si el vendedor exige como primera cuota un valor de $ 300.000 y cobra de financiación una tasa de interés del 2% mensual?

El flujo de caja para este ejemplo, también, corresponde al de un gradiente lineal creciente en el que se conoce:

P = $ 5.000.000 i = 2% mensual G = ?

n = 12 A = $ 300.000

El cálculo del gradiente se obtiene aplicando la expresión (6.1).

$$5.000.000 = 300.000\left[\frac{(1.02)^{12}-1}{0.02(1.02)^{12}}\right]+\frac{G}{0.02}\left[\frac{(1.02)^{12}-1}{0.02(1.02)^{12}}-\frac{12}{(1.02)^{12}}\right] \quad (6.1)$$

Desarrollando la ecuación se obtiene un valor de G = $ 32.824.86

Utilizando el menú RESOL, calculamos en forma directa el valor de G con el siguiente procedimiento:

Procedimiento con la calculadora financiera Hewlett Packard 17 y 19 B II

- Oprima RESOL
- Localice la fórmula GRALINEALCRE
- Oprima CALC
- Ingrese 5.000.000 PGLC
- Ingrese 300.000 A
- Ingrese 0.02 I
- Ingrese 12 N
- Oprima G y obtiene un valor de 32.824.86

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

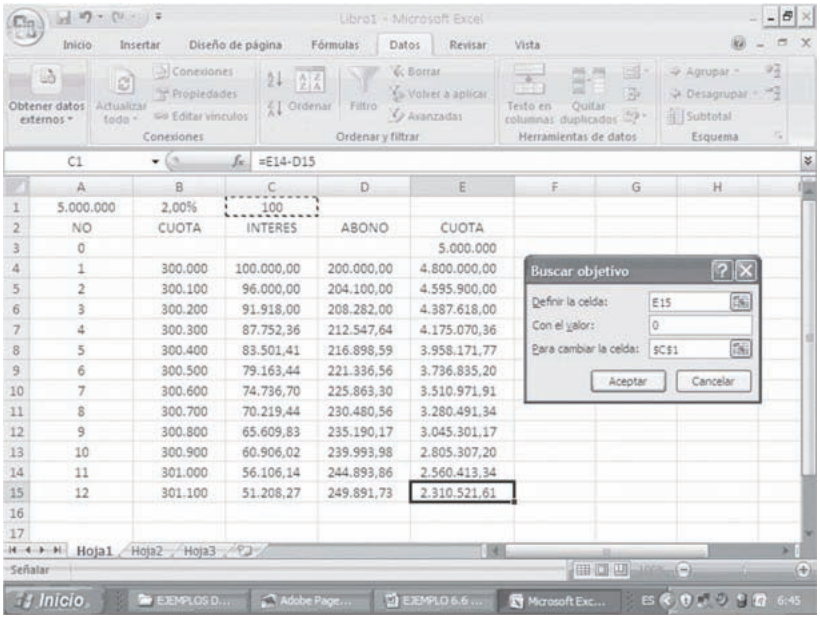
Figura 6.9

	A	B	C	D	E
1	5.000.000	2.0%	100		
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	300.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4+$C$1			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12				

En la celda A1 escribimos 5.000.000, en la B1 la tasa de interés del 2.0% y en la C1 un valor arbitrario de 100, que corresponde al aumento en el valor de las cuotas. En la celda B4 escribimos 300.000 que corresponde a la primera cuota y en la celda B5 calculamos la segunda cuota que es igual a la primera (B4) incrementada en la cantidad a calcular (C1). Copiamos la celda B5 hasta B15. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, abono a capital y saldo insoluto. (Ver Figura 6.9).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicando *Buscar objetivo* de Excel encontramos en C1 un valor de $ 32.824.86, que corresponde al aumento mensual en el valor de las cuotas. (Ver figura 6.10).

Figura 6.10



	A	B	C	D	E
1	5.000.000	2,00%	100		
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	CUOTA
3	0				5.000.000
4	1	300.000	100.000,00	200.000,00	4.800.000,00
5	2	300.100	96.000,00	204.100,00	4.595.900,00
6	3	300.200	91.918,00	208.282,00	4.387.618,00
7	4	300.300	87.752,36	212.547,64	4.175.070,36
8	5	300.400	83.501,41	216.898,59	3.958.171,77
9	6	300.500	79.163,44	221.336,56	3.736.835,20
10	7	300.600	74.736,70	225.863,30	3.510.971,91
11	8	300.700	70.219,44	230.480,56	3.280.491,34
12	9	300.800	65.609,83	235.190,17	3.045.301,17
13	10	300.900	60.906,02	239.993,98	2.805.307,20
14	11	301.000	56.106,14	244.893,86	2.560.413,34
15	12	301.100	51.208,27	249.891,73	2.310.521,61
16					
17					

Ejemplo 6.7

A un constructor le proponen comprarle una propiedad que tiene un valor de $ 30.000.000 con el siguiente plan de pagos: 18 cuotas mensuales que aumenten $ 15.000 cada mes, siendo la primera de $ 2.000.000. Si el está dispuesto a prestar su dinero siempre que obtenga un rendimiento del 4% mensual, ¿qué decisión debe tomar?

El flujo de caja para este ejercicio corresponde también al de un gradiente lineal creciente donde:

$P = \$\ 30.000.000$ $A = \$\ 2.000.000$

$n = 18$ $G = 15.000$

$i = ?$

Es necesario calcular la tasa de interés de la operación financiera y compararla con la tasa de oportunidad del constructor.

$$30.000.000 = 2.000.000\left[\frac{(1+i)^{18}-1}{i(1+i)^{18}}\right] + \frac{15.000}{i}\left[\frac{(1+i)^{18}-1}{i(1+i)^{18}} - \frac{18}{i(1+i)^{18}}\right] \quad (6.1)$$

Utilizando el método de interpolación lineal se obtiene una tasa de interés de 2.65% mensual, que corresponde a la tasa de interés de financiación de la propiedad. La decisión que debe adoptar el constructor es la de no aceptar la oferta, porque la tasa de la operación financiera es menor que su tasa de oportunidad.

Con la calculadora financiera se calcula el valor de la tasa de interés, utilizando el menú RESOL, de la siguiente manera:

Procedimiento con la calculadora financiera Hewlett Packard 17 y 19 B II

- Oprima RESOL
- Localice la fórmula GRALINEALCRE
- Oprima CALC
- Ingrese 30.000.000 PGLC
- Ingrese 2.000.000 A
- Ingrese 18 N
- Ingrese 15.000 G
- Oprima *i* y se obtiene un valor de 2.65% mensual.

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

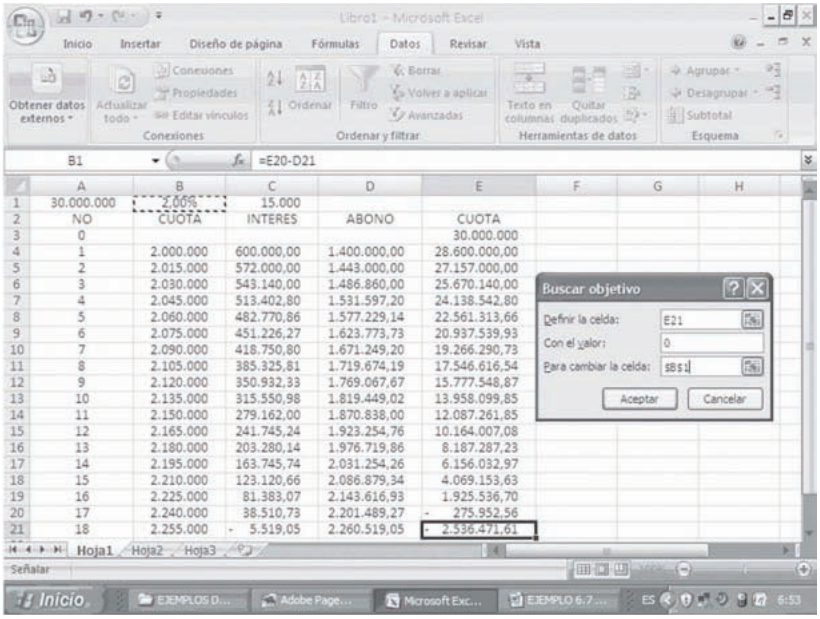
Figura 6.11

	A	B	C	D	E
1	30.000.000	2.0%	15.000		
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	2.000.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4+$C$1			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
21	18				

En la celda A1 escribimos 30.000.000 y en la B1 una tasa arbitraria del 2.0%. En la celda B4 escribimos 2.000.000 como primera cuota y en la B5 calculamos la segunda cuota que es igual a la primera (B4) incrementada en $ 15.000 (C1). Copiamos la celda B5 hasta B21. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, abono a capital y saldo insoluto. (Ver figura 6.11).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E21 y aplicando *Buscar objetivo* encontramos un valor en la celda B1 de 2.65%. (Ver figura 6.12).

Figura 6.12



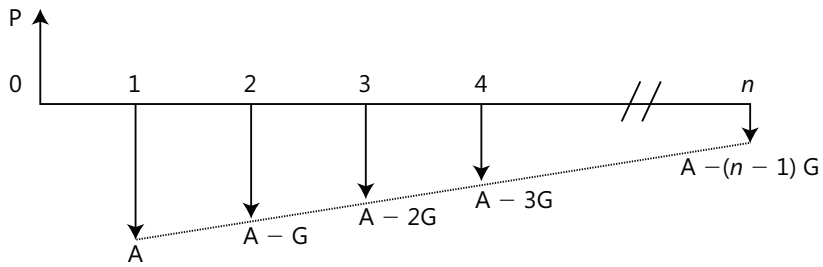
	A	B	C	D	E
1	30.000.000	2,00%	15.000		
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	CUOTA
3	0				30.000.000
4	1	2.000.000	600.000,00	1.400.000,00	28.600.000,00
5	2	2.015.000	572.000,00	1.443.000,00	27.157.000,00
6	3	2.030.000	543.140,00	1.486.860,00	25.670.140,00
7	4	2.045.000	513.402,80	1.531.597,20	24.138.542,80
8	5	2.060.000	482.770,86	1.577.229,14	22.561.313,66
9	6	2.075.000	451.226,27	1.623.773,73	20.937.539,93
10	7	2.090.000	418.750,80	1.671.249,20	19.266.290,73
11	8	2.105.000	385.325,81	1.719.674,19	17.546.616,54
12	9	2.120.000	350.932,33	1.769.067,67	15.777.548,87
13	10	2.135.000	315.550,98	1.819.449,02	13.958.099,85
14	11	2.150.000	279.162,00	1.870.838,00	12.087.261,85
15	12	2.165.000	241.745,24	1.923.254,76	10.164.007,08
16	13	2.180.000	203.280,14	1.976.719,86	8.187.287,23
17	14	2.195.000	163.745,74	2.031.254,26	6.156.032,97
18	15	2.210.000	123.120,66	2.086.879,34	4.069.153,63
19	16	2.225.000	81.383,07	2.143.616,93	1.925.536,70
20	17	2.240.000	38.510,73	2.201.489,27	- 275.952,56
21	18	2.255.000	- 5.519,05	2.260.519,05	- 2.536.471,61

4. Gradiente lineal decreciente

4.1 Valor presente de un gradiente lineal decreciente

Es un valor ubicado en el presente equivalente a una serie de pagos periódicos que tienen la característica de disminuir, cada uno con respecto al anterior, en una cantidad constante de dinero (G).

El flujo de caja de un gradiente lineal decreciente es el siguiente:



Si se compara una serie de gradiente lineal creciente con la serie de gradiente lineal decreciente, se llega a la conclusión que la única diferencia que los caracteriza es el signo de G. Para el gradiente lineal creciente es positiva y para el gradiente lineal decreciente es negativa. Para lograr, entonces, una expresión que nos permita calcular

el valor presente de un gradiente lineal decreciente, simplemente se ajusta la ecuación (6.1), sin necesidad de realizar ninguna deducción matemática, cambiando únicamente el signo de la cantidad constante G de más por menos.

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] - \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right] \qquad (6.3)$$

Donde: P = valor presente de la serie de gradientes

A = valor de la primera cuota

i = tasa de interés efectiva periódica

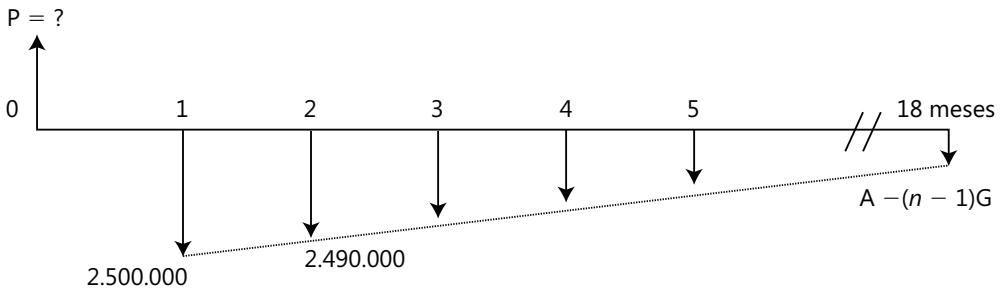
n = número de pagos o ingresos

G = constante en que disminuye cada cuota

El valor presente de esta serie de gradientes calculado con la expresión (6.3), también queda ubicado un período anterior al primer pago.

Ejemplo 6.8

Una vivienda se está cancelando con 18 cuotas mensuales que decrecen en $ 10.000 cada mes, siendo la primera cuota de $ 2.500.000. Si la tasa de financiación que se está cobrando es del 3% mensual, calcular el valor de la vivienda.



El valor presente se calcula aplicando la expresión (6.3), que equivale a una ecuación de valor con fecha focal en el momento cero.

$$P = 2.500.000\left[\frac{(1.03)^{18} - 1}{0.03(1.03)^{18}}\right] - \frac{10.000}{0.03}\left[\frac{(1.03)^{18} - 1}{0.03(1.03)^{18}} - \frac{18}{(1.03)^{18}}\right] \qquad (6.6)$$

P = $ 33.323.645.98

La fórmula del valor presente de un gradiente lineal decreciente, la registramos en el menú RESOL de la siguiente manera:

GRALINEALDECRE:

PGLD=A×((1+*i*)^*n*−1)/(*i*×(1+*i*)^*n*)−(G/*i*)×(((1+*i*)^*n*−1)/(*i*×(1+*i*)^*n*)−*n*/(1+*i*)^*n*)

Procedimiento con la calculadora financiera Hewlett Packard 17 y 19 B II

- Oprima RESOL
- Localice la fórmula GRALINEALDECRE
- Oprima CALC
- Ingrese 2.500.000 A
- Ingrese 0.03 I
- Ingrese 18 N
- Ingrese 10.000 G
- Oprima PGLD y obtiene un valor de 33.323.645.98

Al registrar la fórmula del valor presente de una serie de gradientes lineal decreciente en el menú RESOL y al activar la fórmula oprimiendo CALC, la calculadora crea unos menús con las variables que contiene la fórmula. Esto indica que cualquiera de las variables de la fórmula se puede calcular si se conocen las restantes. Se puede calcular el valor presente de la serie (P), la primera cuota (A), la tasa de interés de la operación financiera (*i*), el número de pagos necesarios para cancelar una obligación (*n*) y el valor de la constante en que disminuye cada cuota con respecto a la anterior (G).

Para este ejemplo las cuotas disminuyen en $ 10.000 cada mes. Si la primera cuota es A, la cuota del segundo mes será A − 10.000, la tercera cuota será A − 20.000, la cuarta cuota será A − 30.000 y la enésima cuota será A − (*n* − 1)G.

El valor de la cuota número 18 es:

$$\text{Cuota } n = A - (n-1)G$$
$$\text{Cuota } 18 = 2.500.000 - (18-1) \times 10.000$$
$$\text{Cuota } 18 = \$\ 2.330.000$$

La expresión para calcular el valor de cualquier cuota es:

$$Cn = A - (n-1)G \tag{6.4}$$

Siendo: Cn = valor de la cuota n
n = número de la cuota
G = disminución en el valor de cada cuota

En el solucionador (RESOL) registramos la expresión (6.7) de la siguiente forma:

$$\text{CUOTAGRALIDECRE: CGLD} = A - G \times (n-1)$$

Para calcular el valor de la cuota No 180, utilizando el menú RESOL, se procede de la siguiente forma:

Procedimiento con la calculadora financiera Hewlett Packard 17 y 19 B II

- Oprima RESOL
- Localice la fórmula CUOTAGRALIDECRE
- Oprima CALC
- Ingrese 2.500.000 A

- Ingrese 10.000 G
- Ingrese 18 N
- Oprima CGLD y se obtiene un valor de 2.330.000

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

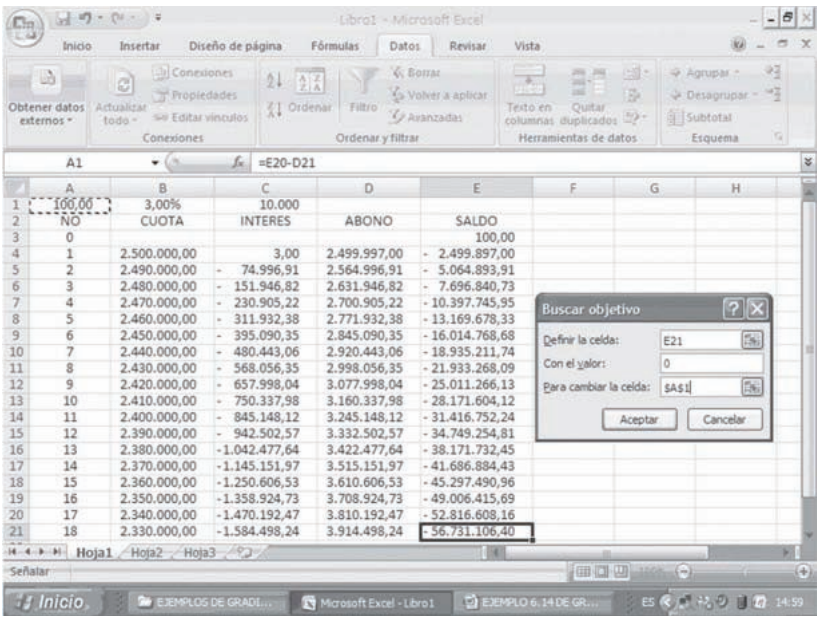
Figura 6.27

	A	B	C	D	E
1	100	3.00%	10.000		
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	2.500.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4−$C$1			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
21	18				

En la celda A1 escribimos un valor arbitrario de 100, en la B1 la tasa de interés y en la C1 el valor del gradiente. En la celda B4 escribimos el valor de la primera cuota y en B5 se calcula la segunda que es igual a la primera (B4) menos el gradiente (C1). Copiamos B5 hasta B21. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo al final del período. (Ver figura 6.27).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E21 y aplicando *Buscar objetivo* obtenemos en A1 un valor de $ 33.323.645.98. (Ver figura 6.28).

Figura 6.28



	A	B	C	D	E
1	100,00	3,00%	10.000		
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				100,00
4	1	2.500.000,00	3,00	2.499.997,00	- 2.499.897,00
5	2	2.490.000,00	- 74.996,91	2.564.996,91	- 5.064.893,91
6	3	2.480.000,00	- 151.946,82	2.631.946,82	- 7.696.840,73
7	4	2.470.000,00	- 230.905,22	2.700.905,22	- 10.397.745,95
8	5	2.460.000,00	- 311.932,38	2.771.932,38	- 13.169.678,33
9	6	2.450.000,00	- 395.090,35	2.845.090,35	- 16.014.768,68
10	7	2.440.000,00	- 480.443,06	2.920.443,06	- 18.935.211,74
11	8	2.430.000,00	- 568.056,35	2.998.056,35	- 21.933.268,09
12	9	2.420.000,00	- 657.998,04	3.077.998,04	- 25.011.266,13
13	10	2.410.000,00	- 750.337,98	3.160.337,98	- 28.171.604,12
14	11	2.400.000,00	- 845.148,12	3.245.148,12	- 31.416.752,24
15	12	2.390.000,00	- 942.502,57	3.332.502,57	- 34.749.254,81
16	13	2.380.000,00	-1.042.477,64	3.422.477,64	- 38.171.732,45
17	14	2.370.000,00	-1.145.151,97	3.515.151,97	- 41.686.884,43
18	15	2.360.000,00	-1.250.606,53	3.610.606,53	- 45.297.490,96
19	16	2.350.000,00	-1.358.924,73	3.708.924,73	- 49.006.415,69
20	17	2.340.000,00	-1.470.192,47	3.810.192,47	- 52.816.608,16
21	18	2.330.000,00	-1.584.498,24	3.914.498,24	- 56.731.106,40

Ejemplo 6.9

Al señor Pedro Picapiedra el Banco de Colombia le concede un préstamo por valor de $ 120.000.000 a una tasa de interés del 36% TV, con un plazo de 3 años. La amortización del capital se hará en cuotas trimestrales iguales. Calcular el valor de la primera, segunda, tercera, octava y última cuota.

Esta forma de pagar un crédito es ampliamente utilizado por los bancos comerciales y corresponde al sistema de *amortización con abono constante a capital*. La cuota periódica la conforma una cantidad constante de capital que resulta de dividir el valor del crédito entre el número de cuotas, sumada al valor de los intereses sobre saldos, lo que indica que cada vez que se cancela una cuota el saldo disminuye en una cantidad constante. Como sistema de amortización, se analizará con mayor detalle en el capítulo 7.

Para este ejercicio, el valor de la cuota trimestral está compuesta por el valor de los intereses sobre saldos más la doceava parte del capital.

$$\text{primera cuota} = \frac{120.000.000}{12} + 10.800.000 = \$20.800.000$$

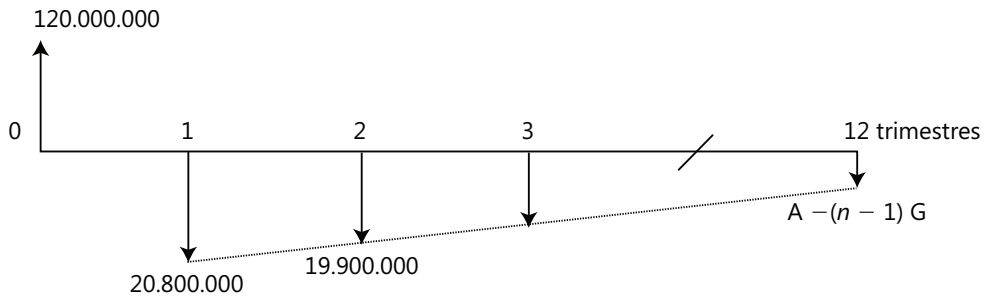
$$\text{segunda cuota} = \frac{120.000.000}{12} + 9.900.000 = \$19.900.000$$

$$\text{tercera cuota} = \frac{120.000.000}{12} + 9.000.000 = \$19.000.000$$

El valor del abono al capital es constante ($ 10.000.000) pero los intereses disminuyen cada período en una cantidad fija ($ 900.000), debido a que se calculan sobre saldos.

Para obviar este proceso de cálculo engorroso se le da al ejercicio el tratamiento de un gradiente lineal decreciente, en el que se conoce el valor de la primera cuota, el valor del gradiente, la tasa de interés y el número de cuotas.

Construimos el flujo de caja.



El valor de la cuota No. 8 será igual a:

$$Cn = A - (n - 1)G \qquad (6.4)$$

$$C8 = 20.800.000 - (8 - 1)900.000$$

$$C8 = \$\ 14.500.000$$

El valor de la cuota No 12 será igual a:

$$C12 = 20.800.000 - (12 - 1)900.000$$

$$C12 = \$\ 10.900.000$$

Utilizando el menú RESOL, se calcula el valor de las cuotas utilizando el siguiente procedimiento:

Procedimiento con la calculadora financieraHewlett Packard 17 y 19 B II

- Oprima RESOL
- Localice la fórmula CUOTAGRALIDECRE
- Oprima CALC
- Ingrese 20.800.000 A
- Ingrese 900.000 G
- Ingrese 2 N
- Oprima CGLD y obtiene un valor de 19.900.000
- Ingrese 8 N
- Oprima CGLD y obtiene un valor de 14.500.000
- Ingrese 12 N
- Oprima CGLD y obtiene un valor de 10.900.000

Solución con la hoja de cálculo Excel

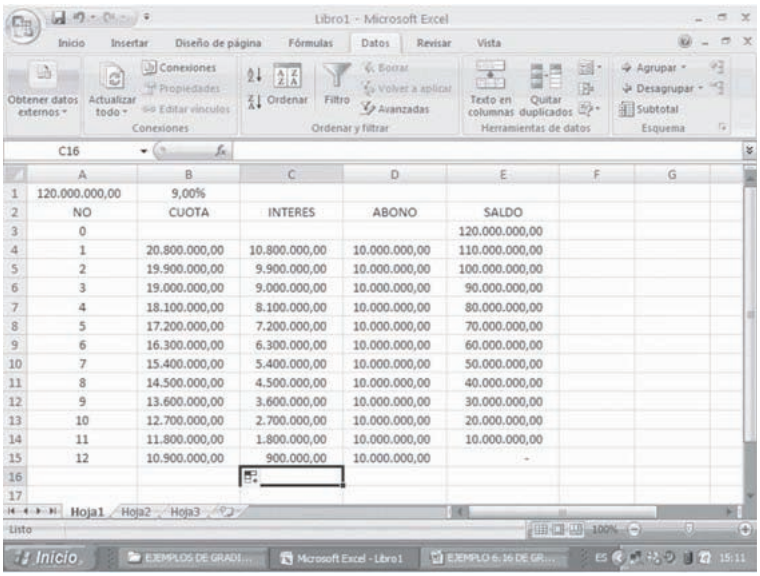
Figura 6.31

	A	B	C	D	E
1	120.000.000	9.00%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	=C4+D4	=E3*$B$1	=$E$3/12	=E3−D4
5	2	=C5+D5		=$E$3/12	
.....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12	=C15+D15		=$E$3/12	

En la celda A1 escribimos el valor del préstamo y en la B1 la tasa de interés. En la celda D4 calculamos el valor del abono constante a capital, dividiendo el valor del préstamo (E3) entre el número de cuotas (12) y copiamos D4 hasta D15. En la celda C4 calculamos los intereses y en la celda B4 calculamos el valor de la cuota sumando intereses (C4) más abono a capital (D4). (Ver figura 6.31).

Copiamos las fórmulas de las celdas B4, C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y obtenemos en la columna B (celdas B4, B5….B12) el valor de las cuotas. (Ver figura 6.32).

Figura 6.32



	A	B	C	D	E
1	120.000.000,00	9,00%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				120.000.000,00
4	1	20.800.000,00	10.800.000,00	10.000.000,00	110.000.000,00
5	2	19.900.000,00	9.900.000,00	10.000.000,00	100.000.000,00
6	3	19.000.000,00	9.000.000,00	10.000.000,00	90.000.000,00
7	4	18.100.000,00	8.100.000,00	10.000.000,00	80.000.000,00
8	5	17.200.000,00	7.200.000,00	10.000.000,00	70.000.000,00
9	6	16.300.000,00	6.300.000,00	10.000.000,00	60.000.000,00
10	7	15.400.000,00	5.400.000,00	10.000.000,00	50.000.000,00
11	8	14.500.000,00	4.500.000,00	10.000.000,00	40.000.000,00
12	9	13.600.000,00	3.600.000,00	10.000.000,00	30.000.000,00
13	10	12.700.000,00	2.700.000,00	10.000.000,00	20.000.000,00
14	11	11.800.000,00	1.800.000,00	10.000.000,00	10.000.000,00
15	12	10.900.000,00	900.000,00	10.000.000,00	-
16					
17					

Existen situaciones financieras que corresponden a una serie de gradiente lineal decreciente anticipado, o gradiente lineal decreciente diferido. Estas situaciones se manejan de la misma forma que los gradientes lineales crecientes, con la única diferencia de que el valor de G es negativo.

5. Gradiente geométrico o exponencial

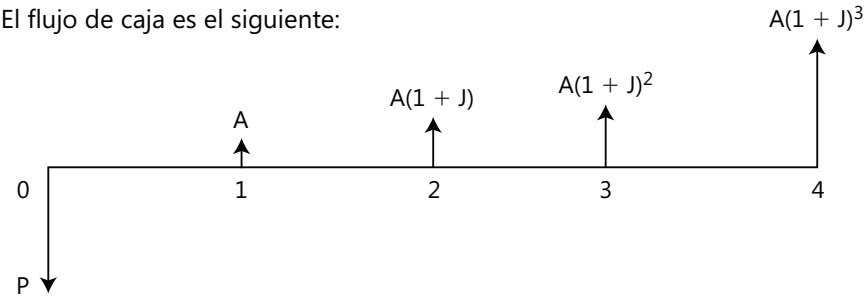
Se llama gradiente geométrico a una serie de pagos periódicos tales que cada uno es igual al anterior disminuido o aumentado en un porcentaje fijo. En este tipo de gradientes también se presenta el gradiente geométrico creciente y el geométrico decreciente, dependiendo de que las cuotas aumenten o disminuyan en ese porcentaje.

5.1 Gradiente geométrico creciente

Valor presente de un gradiente geométrico creciente

Es un valor ubicado en el presente, equivalente a una serie de pagos periódicos que aumentan cada uno, con respecto al anterior, en un porcentaje fijo.

El flujo de caja es el siguiente:



$$P = A\left[\frac{(1+J)^n - (1+i)^n}{(J-i)(1+i)^n}\right] \quad \text{para } i \neq J \tag{6.5}$$

Donde: P = valor presente de la serie de gradiente geométrico

A = valor de la primera cuota

J = variación porcentual de la cuota con respecto a la anterior

i = tasa de interés de la operación financiera

n = número de pagos o ingresos de la operación financiera

Como se observa en el flujo de caja, el valor presente equivalente a esta serie de pagos que aumentan en un porcentaje fijo cada mes, está ubicado en el momento cero y la variación de la cuota comienza en el segundo período. En una forma general, al aplicar la expresión (6.5), *el valor presente de una serie de pagos que aumentan periódicamente en un porcentaje fijo, queda ubicado un período anterior al pago de la primera cuota.*

Para $i = J$, reemplazamos en (1) i por J y se tiene:

$$P = A\left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{(1+i)}{(1+i)^2} + \frac{(1+i)^2}{(1+i)^3} + \frac{(1+i)^3}{(1+i)^4}\right]$$

$$P = \frac{4A}{(1+i)}$$

Para un número n de pagos o ingresos se tiene:

$$P = \frac{nA}{(1+i)} \qquad \text{para } J = i \tag{6.6}$$

Donde: n = número de pagos o ingresos

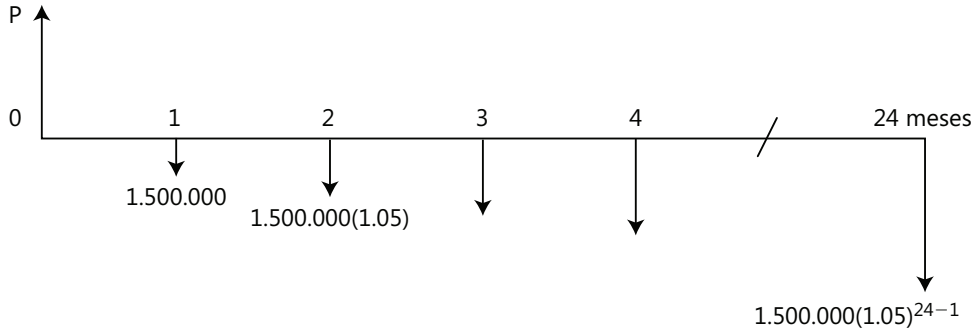
i = tasa de interés de la operación financiera

A = valor de la primera cuota

Ejemplo 6.10

Una obligación se está cancelando mediante el pago de una cuota inicial de $ 5.000.000 y 24 cuotas mensuales que aumentan un 5% cada mes. Si el valor de la primera cuota es de $ 1.500.000 y se cobra una tasa de interés del 4% mensual, calcular:

- El valor de la obligación
- El valor de la cuota 22



La tasa de interés de la negociación es diferente a la tasa de crecimiento de las cuotas, en consecuencia, se aplica la expresión (6.7) para el cálculo del valor presente de la obligación.

$$P = 5.000.000 + 1.500.000\left[\frac{(1.05)^{24} - (1.04)^{24}}{(0.05 - 0.04)(1.04)^{24}}\right]$$

$$P = \$\ 43.727.111.74$$

La fórmula del valor presente de un gradiente geométrico creciente que se ingresa en el menú RESOL o solucionador, es la siguiente:

GRAGEOCRE: PGGC = A × ((1 + J) ^ *n* − (1 + *i*)^ *n*) / ((J − *i*) × (1 + *i*) ^ *n*)

Procedimiento con la calculadora financiera Hewlett Packard 17 y 19 B II

- Oprima RESOL
- Localice la fórmula GRAGEOCRE
- Oprima CALC
- Ingrese 1.500.000 A
- Ingrese 0.05 J
- Ingrese 0.04 I
- Ingrese 24 N
- Oprima PGGC y se obtiene un valor de 38.727.111.74, que sumado al valor de la cuota inicial de 5.000.000 arroja un valor de 43.727.111.74.

Para este ejemplo, la cuota aumenta en un 5% (J) cada mes. Si la primera cuota es de $ 1.500.000 y la llamamos A, la segunda cuota será A (1 + J), la tercera cuota será igual a A $(1 + J)^2$, la cuarta cuota será igual a A $(1 + J)^3$ y la enésima cuota será igual a A $(1 + J)^{n-1}$.

El valor de la cuota No 22 es: Cuota 22 = 1.500.000 $(1 + 0.05)^{22-1}$

Cuota 22 = $ 4.178.943.88

La expresión para calcular el valor de cualquier cuota es:

$$Cn = A\,(1 + J)^{n-1} \tag{6.7}$$

Donde: Cn = valor de la cuota n
A = valor de la primera cuota
J = porcentaje de incremento de cada cuota

En el solucionador (RESOL) se registra la expresión (6.9) de la siguiente forma:

CUOTAGRAGEOCRE: CGGC = A × (1 + J)^(N − 1)

Para el cálculo de la cuota 22 del ejemplo, utilizando el solucionador, se procede así:

Procedimiento con la calculadora financiera Hewlett Packard 17 y 19 B II

- Oprima RESOL
- Localice la fórmula CUOTAGRAGEOCRE
- Oprima CALC
- Ingrese 1.500.000 A
- Ingrese 0.05 J
- Ingrese 22 N
- Oprima CGGC y se obtiene un valor de 4.178.943.88

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

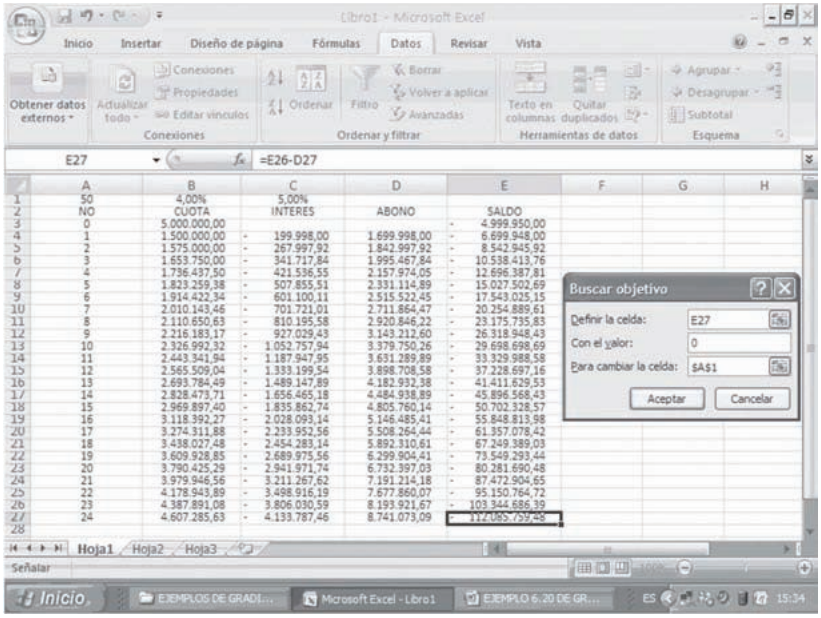
Figura 6.37

	A	B	C	D	E
1	50	4.00%	5.00%		
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	5.000.000			=A1−B3
4	1	1.500.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4*(1+$C$1)			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
27	24				

En la celda A1 escribimos un valor arbitrario de $ 50, en la B1 la tasa de interés y en C1 el valor del aumento mensual de las cuotas. En la celda B3 registramos el valor de la cuota inicial y en E3 el saldo insoluto. En la celda B4 escribimos el valor de la primera cuota y en B5 calculamos la segunda, que es igual a la primera (B4) incrementada en 5% (C1) y copiamos B5 hasta B27. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo al final del período. (Ver figura 6.37).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E27 y aplicando *Buscar objetivo* obtenemos en A1 un valor de $ 43.727.111.74 y en B25 una cuota de $ 4.178.943.88. (Ver figura 6.38).

Figura 6.38

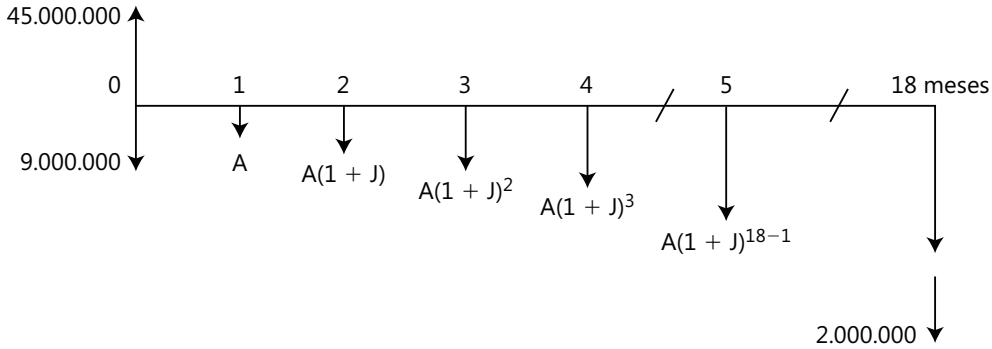


	A	B	C	D	E
1	50	4,00%	5,00%		
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	5.000.000,00			4.999.950,00
4	1	1.500.000,00	199.998,00	1.699.998,00	6.699.948,00
5	2	1.575.000,00	267.997,92	1.842.997,92	8.542.945,92
6	3	1.653.750,00	341.717,84	1.995.467,84	10.538.413,76
7	4	1.736.437,50	421.536,55	2.157.974,05	12.696.387,81
8	5	1.823.259,38	507.855,51	2.331.114,89	15.027.502,69
9	6	1.914.422,34	601.100,11	2.515.522,45	17.543.025,15
10	7	2.010.143,46	701.721,01	2.711.864,47	20.254.889,61
11	8	2.110.650,63	810.195,58	2.920.846,22	23.175.735,83
12	9	2.216.183,17	927.029,43	3.143.212,60	26.318.948,43
13	10	2.326.992,32	1.052.757,94	3.379.750,26	29.698.698,69
14	11	2.443.341,94	1.187.947,95	3.631.289,89	33.329.988,58
15	12	2.565.509,04	1.333.199,54	3.898.708,58	37.228.697,16
16	13	2.693.784,49	1.489.147,89	4.182.932,38	41.411.629,53
17	14	2.828.473,71	1.656.465,18	4.484.938,89	45.896.568,43
18	15	2.969.897,40	1.835.862,74	4.805.760,14	50.702.328,57
19	16	3.118.392,27	2.028.093,14	5.146.485,41	55.848.813,98
20	17	3.274.311,88	2.233.952,56	5.508.264,44	61.357.078,42
21	18	3.438.027,48	2.454.283,14	5.892.310,61	67.249.389,03
22	19	3.609.928,85	2.689.975,56	6.299.904,41	73.549.293,44
23	20	3.790.425,29	2.941.971,74	6.732.397,03	80.281.690,48
24	21	3.979.946,56	3.211.267,62	7.191.214,18	87.472.904,65
25	22	4.178.943,89	3.498.916,19	7.677.860,07	95.150.764,72
26	23	4.387.891,08	3.806.030,59	8.193.921,67	103.344.686,39
27	24	4.607.285,63	4.133.787,46	8.741.073,09	112.085.759,48
28					

Ejemplo 6.11

Un abogado desea adquirir una oficina que tiene un valor de $ 45.000.000. Le plantean su financiación de la siguiente forma: cuota inicial del 20%, 18 pagos mensuales que aumenten cada mes en un 2% y una cuota extraordinaria pagadera en el mes 18 por valor de $ 2.000.000. Si la tasa de financiación que se cobra es del 3% mensual, calcular el valor de la primera cuota.

La cuota extraordinaria por valor de $ 2.000.000 pagadera en el mes 24 es una cuota adicional a las cuotas normales de pago. La solución a este ejercicio no la plantea la simple aplicación de la fórmula del valor presente de un gradiente geométrico creciente, porque existe una cuota extraordinaria. Es necesario plantear una ecuación de valor que agrupe la cuota inicial, la cuota extraordinaria y las cuotas normales de pago.



Planteamos la ecuación de valor tomando como fecha focal el momento cero. Se observa que la tasa de interés de la operación financiera es diferente a la tasa incremento de las cuotas, por lo tanto, para calcular el valor presente del sistema de gradientes utilizamos la expresión (6.7).

$$45.000.000 = 9.000.000 + \frac{2.000.000}{(1.03)^{18}} + A\left[\frac{(1.02)^{18} - (1.03)^{18}}{(0.02 - 0.03)(1.03)^{18}}\right]$$

$$A = \$\ 2.162.304.60$$

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

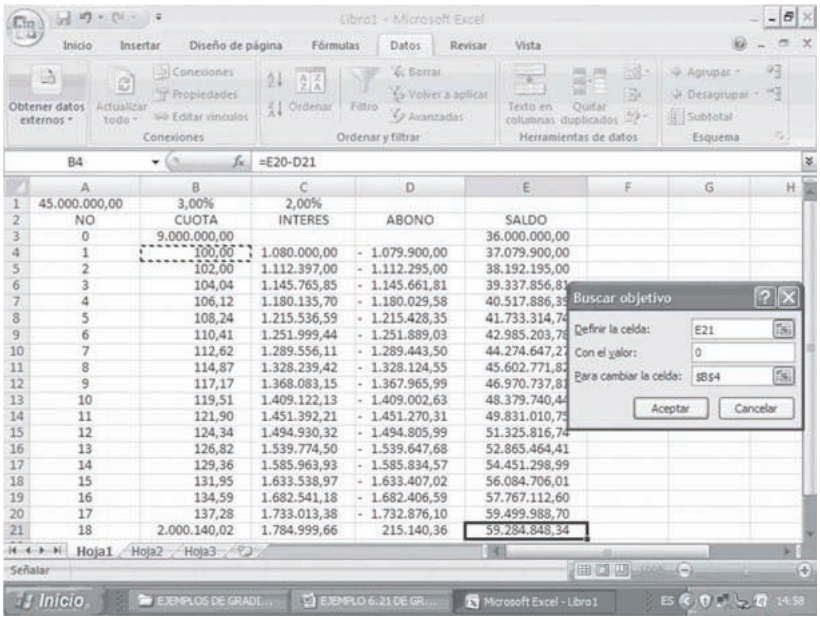
Figura 6.39

	A	B	C	D	E
1	45.000.000	3.00%	2.00%		
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	0.20*A1			=A1−B3
4	1	100	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4*(1+$C$1)			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
21	18	=B20*(1+$C$1)+2.000.000			

A la celda A1 le asignamos el valor de la oficina, a la B1 la tasa de interés y a la C1 la tasa de incremento de las cuotas mensuales. En la celda B3 calculamos la cuota inicial y en la E3 el saldo insoluto. En la celda B4 escribimos un valor arbitrario de 100 y en la B5 calculamos el segundo pago que es igual al primero (B4) incrementado en un 2,00% (C1). Copiamos la celda B5 hasta B20. En la celda B21 calculamos el pago del mes 18, que es igual al pago del mes anterior (B20) incrementado en un 2,00% más la cuota extraordinaria de $ 2.000.000. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses abono a capital y saldo insoluto. (Ver figura 6.39).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E21 y aplicando *Buscar objetivo* obtenemos en B4 un valor de $ 2.162.306.40. (Ver figura 6.40).

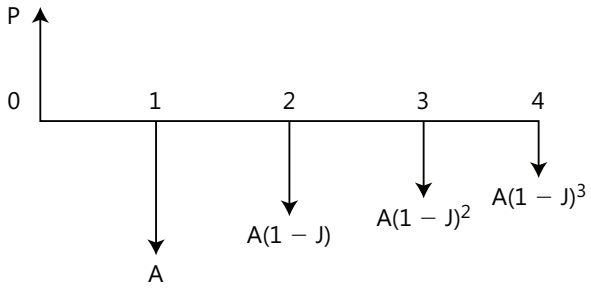
Figura 6.40



	A	B	C	D	E
1	45.000.000,00	3,00%	2,00%		
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	9.000.000,00			36.000.000,00
4	1	100,00	1.080.000,00	- 1.079.900,00	37.079.900,00
5	2	102,00	1.112.397,00	- 1.112.295,00	38.192.195,00
6	3	104,04	1.145.765,85	- 1.145.661,81	39.337.856,81
7	4	106,12	1.180.135,70	- 1.180.029,58	40.517.886,39
8	5	108,24	1.215.536,59	- 1.215.428,35	41.733.314,74
9	6	110,41	1.251.999,44	- 1.251.889,03	42.985.203,78
10	7	112,62	1.289.556,11	- 1.289.443,50	44.274.647,27
11	8	114,87	1.328.239,42	- 1.328.124,55	45.602.771,82
12	9	117,17	1.368.083,15	- 1.367.965,99	46.970.737,81
13	10	119,51	1.409.122,13	- 1.409.002,63	48.379.740,44
14	11	121,90	1.451.392,21	- 1.451.270,31	49.831.010,75
15	12	124,34	1.494.930,32	- 1.494.805,99	51.325.816,74
16	13	126,82	1.539.774,50	- 1.539.647,68	52.865.464,41
17	14	129,36	1.585.963,93	- 1.585.834,57	54.451.298,99
18	15	131,95	1.633.538,97	- 1.633.407,02	56.084.706,01
19	16	134,59	1.682.541,18	- 1.682.406,59	57.767.112,60
20	17	137,28	1.733.013,38	- 1.732.876,10	59.499.988,70
21	18	2.000.140,02	1.784.999,66	215.140,36	59.284.848,34

5.2 Gradiente geométrico decreciente

Lo constituyen una serie de pagos o ingresos que disminuyen periódicamente en un porcentaje constante.



Valor presente de un gradiente geométrico decreciente

El valor presente de un gradiente geométrico decreciente es un valor, ubicado un período anterior a la fecha del primer pago, equivalente a una serie de pagos o ingresos que disminuyen periódicamente en un porcentaje fijo (J).

Donde: P = Valor presente
J = tasa de incremento de las cuotas
A = valor de la primera cuota
n = número de cuotas
i = tasa de interés de la operación

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - (1-J)^n}{(J+i)(1+i)^n}\right] \tag{6.8}$$

El valor presente equivalente calculado con la expresión (6.8) se encuentra ubicado en el momento cero, como se observa en el flujo de caja. En forma general, al aplicar esta fórmula*, el valor presente calculado está ubicado un período anterior al pago de la primera cuota*.

La expresión (6.8) se registra de la siguiente forma en el menú RESOL de la calculadora financiera.

GRAGEODECRE: PGGD = A × ((1 + I)^N − (1 − J)^N)/((J + I) × (1 + I)^N)

La ecuación (6.8) calcula el valor presente cuando la tasa de decrecimiento de las cuotas (J) es diferente a la tasa de interés de la operación (*i*). Para J = *i*, la expresión (6.8) se convierte en:

$$P = \frac{A}{(1+i)} \qquad \text{para } J = i \tag{6.9}$$

Ejemplo 6.12

Calcular el valor presente de 12 pagos trimestrales que disminuyen cada trimestre en 2%, siendo el primer pago de $ 500.000. La tasa de interés es del 32% capitalizable trimestralmente.

El flujo de caja de la operación financiera corresponde a un gradiente geométrico decreciente, en el que $ 500.000 es el valor de la primera cuota (A), el número de pagos (*n*) es igual a 12, las cuotas disminuyen en un porcentaje del 2% (J) y la tasa de interés es del 8% trimestral.

Calculamos la tasa efectiva de la operación financiera.

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.32}{4} = 0.08 = 8\% \text{ trimestral}$$

Calculamos el valor presente equivalente a los 12 pagos trimestrales. Para este ejercicio, la tasa de interés (*i*) es diferente a la tasa de decrecimiento de las cuotas (J), por esta razón aplica la expresión (6.8).

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - (1-J)^n}{(J+i)(1+i)^n}\right] \tag{6.8}$$

$$P = 500.000\left[\frac{(1+0.08)^{12} - (1-0.02)^{12}}{(0.02+0.08)(1+0.08)^{12}}\right]$$

$$P = \$\ 3.441.890.96$$

Procedimiento con la calculadora financiera Hewlett Packard 17 y 19 B II

- Oprima RESOL
- Localice la fórmula GRAGEODECRE
- Oprima CALC
- Ingrese 500.000 A
- Ingrese 12 N
- Ingrese 0.08 I
- Ingrese 0.02 J
- Oprima PGGD y obtiene un valor de 3.441.890.96

En el gradiente geométrico decreciente las cuotas disminuyen periódicamente en un porcentaje constante (J). La primera cuota es A, la segunda cuota es A(1–J), la tercera cuota es $A(1-J)^2$, la enésima cuota será $A(1-J)^{n-1}$.

Con el anterior análisis se llega a una expresión general para realizar el cálculo de cualquier cuota.

$$C_n = A(1-J)^{n-1} \tag{6.10}$$

En el menú RESOL registramos la expresión (6.10) de la siguiente forma.

CUOTAGRAGEODECRE: CGGD = A × (1 − J)^(N − 1)

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

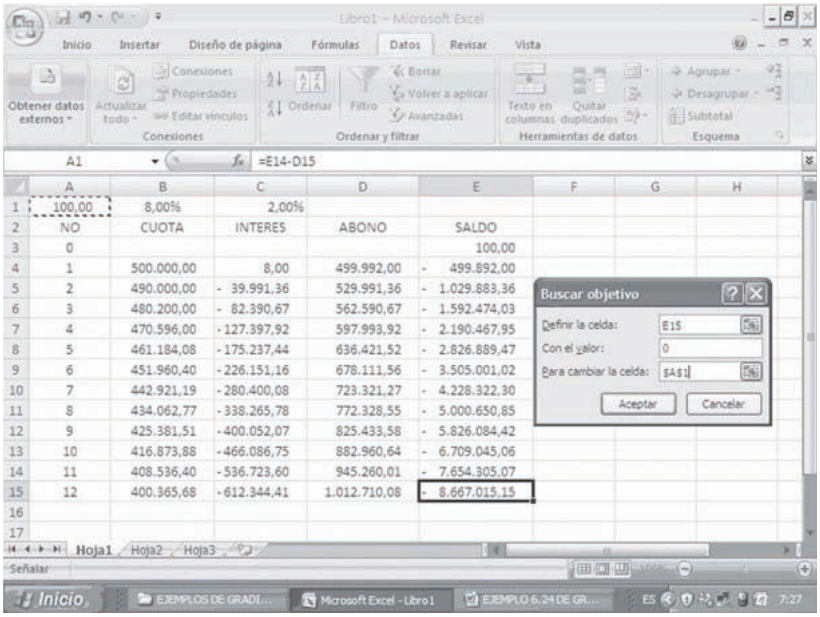
Figura 6.45

	A	B	C	D	E
1	100	8.00%	2.00%		
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	500.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4*(1−$C$1)			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12				

En la celda A1 escribimos un valor arbitrario de $ 100, en la B1 la tasa de interés y en C1 el valor del decrecimiento mensual de las cuotas. En la celda B4 escribimos el valor de la primera cuota y en B5 calculamos la segunda, que es igual a la primera (B4) disminuida en 2% (C1), y copiamos B5 hasta B15. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo al final del período. (Ver figura 6.45).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicando *Buscar objetivo* de Excel obtenemos en A1 un valor de $ 3.441.890.96. (Ver figura 6.46).

Figura 6.46



	A	B	C	D	E
1	100,00	8,00%	2,00%		
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				100,00
4	1	500.000,00	8,00	499.992,00	- 499.892,00
5	2	490.000,00	- 39.991,36	529.991,36	- 1.029.883,36
6	3	480.200,00	- 82.390,67	562.590,67	- 1.592.474,03
7	4	470.596,00	- 127.397,92	597.993,92	- 2.190.467,95
8	5	461.184,08	- 175.237,44	636.421,52	- 2.826.889,47
9	6	451.960,40	- 226.151,16	678.111,56	- 3.505.001,02
10	7	442.921,19	- 280.400,08	723.321,27	- 4.228.322,30
11	8	434.062,77	- 338.265,78	772.328,55	- 5.000.650,85
12	9	425.381,51	- 400.052,07	825.433,58	- 5.826.084,42
13	10	416.873,88	- 466.086,75	882.960,64	- 6.709.045,06
14	11	408.536,40	- 536.723,60	945.260,01	- 7.654.305,07
15	12	400.365,68	- 612.344,41	1.012.710,08	- 8.667.015,15
16					
17					

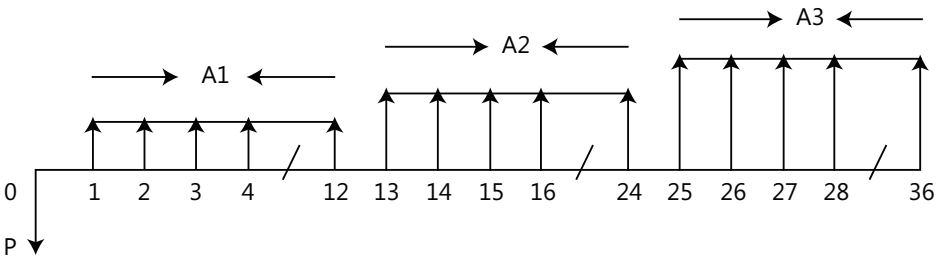
6. Gradiente escalonado o en escalera

Es una serie de pagos que permanecen iguales durante un tiempo (generalmente un año) y luego aumentan en una cantidad en pesos, o en un porcentaje, cada período. El gradiente escalonado puede ser lineal o geométrico, dependiendo de que el incremento periódico sea en pesos o en porcentaje. Cuando los pagos iguales aumentan cada período en una cantidad fija en pesos, se genera el gradiente lineal escalonado, y cuando aumentan en un porcentaje constante se da el gradiente geométrico escalonado.

6.1 Valor presente de un gradiente geométrico escalonado

Es un valor ubicado en el presente equivalente a una serie de cuotas que permanecen constantes durante un período determinado, generalmente un año, y luego aumentan en un porcentaje fijo para el siguiente período.

Supongamos que el siguiente flujo de caja está conformado por pagos mensuales iguales durante un año y que cada año aumentan en un porcentaje fijo (J).



Para este flujo, se tiene:

P = valor inicial de la obligación
i = tasa de interés periódica
n = número de cuotas mensuales al año
TEA = tasa efectiva anual equivalente a la tasa de interés periódica
J = tasa de incremento de las cuotas cada año
E = plazo, en años, de la obligación
A1 = valor de la cuotas mensuales del primer período

$$P = A_1\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]\left[\frac{(1+TEA)^E - (1+J)}{(1+TEA)^E(TEA - J)}\right] \quad (6.11)$$

Con esta fórmula se calcula un valor presente equivalente (P) a una serie de pagos periódicos, iguales durante un tiempo determinado (generalmente un año), que aumentan en un porcentaje fijo cada período (año)

En el menú RESOL, registramos la expresión de la siguiente manera:

GRAGEOESCALONADO:

PGGE = A × ((1 + I)^N − 1)/I × (((1 + TEA)^E − (1 + J)^E) / ((1 + TEA)^E × (TEA − J)))

Ejemplo 6.13

Una obligación hipotecaria de $ 60.000.000 se va a cancelar por medio de 24 cuotas mensuales, que aumentan cada año en un 20%. Si la tasa de interés que se cobra es del 3% mensual, calcule el valor de las cuotas del primer año.

El flujo de caja del ejercicio corresponde a un gradiente geométrico escalonado, en el que:

P = $ 60.000.000	E = 2 años	n = 12
J = 20% anual	i = 3% mensual	A_1 = ?

Se necesita, en primer lugar, calcular la tasa efectiva anual equivalente a una tasa efectiva del 3% mensual. Para tal efecto, aplicamos el procedimiento analítico de equivalencia de tasas analizado en el capítulo cuarto.

$$TEA = (1 + TEM)^n - 1$$

$$TEA = (1 + 0.03)^{12} - 1$$

$$TEA = 42.58\% \text{ anual}$$

Al aplicar la expresión (6.15) del valor presente de un gradiente geométrico escalonado, tenemos:

$$P = A_1\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]\left[\frac{(1+TEA)^E - (1+J)}{(1+TEA)^E(TEA - J)}\right]$$

$$60.000.000 = A_1\left[\frac{(1+0.03)^{12}-1}{0.03}\right]\left[\frac{(1+0.4258)^{2}-(1+0.20)^{2}}{(1+0.4258)^{2}(0.4258-0.20)}\right]$$

$$A_1 = \$\ 3.272.992.13$$

De acuerdo con el resultado obtenido, el valor de las cuotas mensuales del primer año es de $3.272.992.13. Como cada año estas aumentan en un 20%, el valor de las cuotas anuales conforman un gradiente geométrico creciente. Se calcula, entonces, el valor de las cuotas para el año siguiente, aplicando la expresión $C_n = A_1(1 + J)^{n-1}$.

Valor de las cuotas segundo año $= 3.272.992.13(1.20)^1 = \$\ 3.927.590.56$

Con la calculadora Hewlett Packard 17 BII y 19BII, se procede así:

- Entre al menú principal
- Oprima RESOL
- Localice la fórmula GRAGEOESCALONADO
- Oprima CALC
- Ingrese 60.000.000 PGGE
- Ingrese 0.03 I
- Ingrese 12 N
- Ingrese 0.4258 TEA
- Oprima OTROS
- Ingrese 2 E
- Ingrese 0.20 J
- Oprima OTROS
- Oprima A y obtiene un valor de 1.652.427.96

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

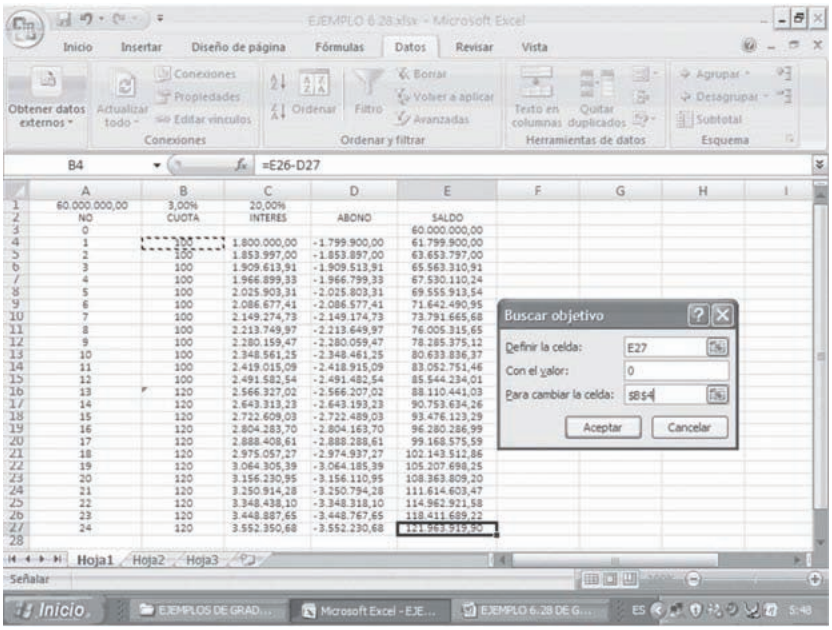
Figura 6.51

	A	B	C	D	E
1	60.000.000	3.00%	20.00%		
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	100	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4			
15	12	=B14			
16	13	=B15*(1+$C$1)			
17	14	=B16			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
27	24	=B26			

En la celda A1 escribimos el valor de la obligación hipotecaria, en B1 la tasa de interés y en C1 el valor del incremento anual de las cuotas. En la celda B4 escribimos 100 como valor arbitrario, calculamos la cuota 2 y copiamos hasta B15. En la celda B16 calculamos la cuota del mes 13 (segundo año) incrementando la cuota del mes 12 (B15) en un 20% (C1) calculamos la cuota 14 y copiamos B17 hasta B27. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo al final del período. (Ver figura 6.51).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E27 y aplicando *Buscar objetivo* obtenemos en B4 un valor de $ 3.272.992.13 que corresponde a las cuotas mensuales del primer año y en B16 un valor de $ 3.927.590.56 de las cuotas mensuales del segundo año. Ver figura 6.52).

Figura 6.52



Ejemplo resumen

Una obligación por valor de $ 10.000.000, se financia a una tasa del 2.0% mensual para cancelarla de la siguiente forma:

1. Un solo pago al final del año.
2. Con 2 pagos iguales en los meses 4 y 10.
3. Con 12 pagos mensuales iguales.
4. Con 12 pagos mensuales iguales anticipados.
5. Con 12 pagos mensuales que aumentan $ 20.000 cada mes.
6. Con 12 pagos mensuales que decrecen $ 20.000 cada mes.

7. Con 12 pagos mensuales que aumentan que en un 3.0% cada mes.
8. Con 12 pagos mensuales que decrecen en un 3.0% cada mes.
9. En 2 años, por medio de cuotas mensuales iguales que crecen al final del año en un 10%.

El lector resolverá cada uno de estos casos con *Buscar objetivo* de Excel:

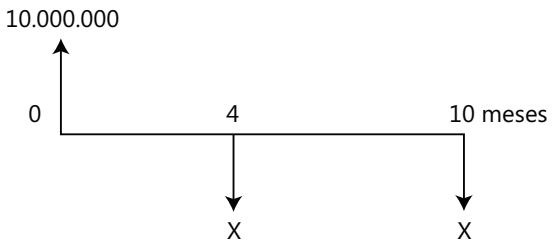
1. Consiste en calcular un pago ubicado al final del año que sea equivalente, no igual, a los $ 10.000.000 de hoy, a una tasa de interés del 2.0% mensual.

$$F = P(1 + i)^n$$

$$F = 10.000.000(1 + 0.02)^{12}$$

$$F = \$\ 12.682.417.94$$

2. Este es un sistema de pagos analizado en el capítulo 3, en el cual los pagos no son periódicos y, por lo tanto, se trabajan como pagos individuales a través de una ecuación de valor.



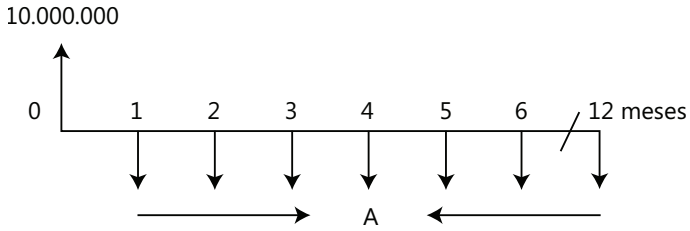
Se plantea una ecuación de valor con fecha focal en el momento cero, aunque puede ser en cualquiera otra fecha.

$$10.000.000 = \frac{X}{(1 + 0.02)^4} + \frac{X}{(1 + 0.02)^{10}}$$

$$X = \$\ 5.733.308.09$$

Lo que significa que una obligación de $ 10.000.000 a una tasa del 2.0% mensual, se cancela por medio de dos cuotas iguales de $ 5.733.308.09 pagaderas en los meses 4 y 10.

3. Para este caso se propone cancelar la obligación con 12 cuotas mensuales iguales. La solución a este caso se logra calculando la cuota de una anualidad vencida.



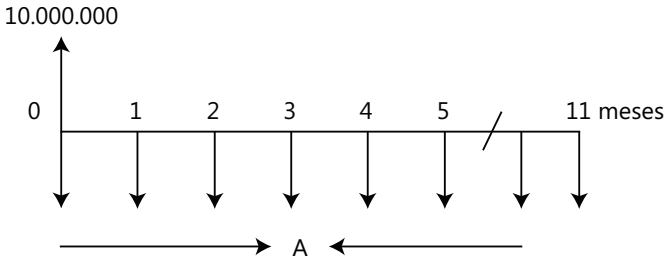
$$A = 10.000.000\left[\frac{0.02(1.02)^{12}}{(1.02)^{12}-1}\right]$$

$$A = \$\ 945.595.97$$

En Excel: = PAGO (tasa; nper; VA; VF; tipo)

= PAGO (2%; 12; −10.000.000; 0)

4. Se propone cancelar la obligación por medio de 12 cuotas mensuales anticipadas. La solución se logra calculando la cuota de una anualidad anticipada.



$$A = \frac{P}{\left[1+\left[\frac{(1+i)^{n-1}-1}{i(1+i)^{n-1}}\right]\right]}$$

$$A = \frac{10.000.000}{\left[1+\left[\frac{(1.02)^{12-1}-1}{0.02(1.02)^{12-1}}\right]\right]}$$

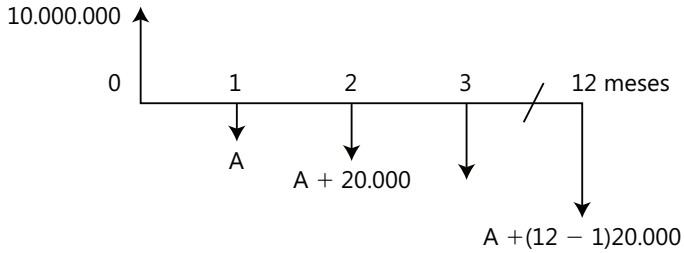
$$A = \$\ 927.054.87$$

En Excel: = PAGO (tasa; nper; VA; VF; tipo)

= PAGO (2%; 12; −10.000.000; 0, 1)

Se ingresa el valor de 1 en el parámetro tipo, para indicar que los pagos son anticipados.

5. Cancelar la obligación con 12 pagos que aumentan en $ 20.000 cada mes. Este sistema de pagos se refiere a un gradiente lineal creciente.

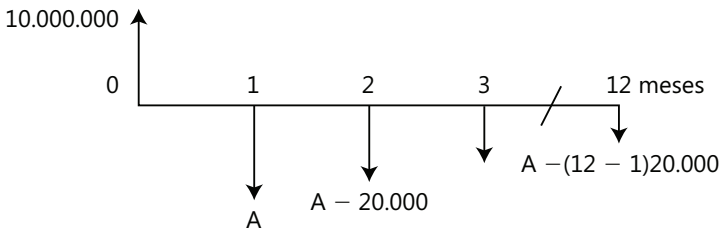


$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]$$

$$10.000.000 = A\left[\frac{(1.02)^{12} - 1}{0.02(1.02)^{12}}\right] + \frac{20.000}{0.02}\left[\frac{(1.02)^{12} - 1}{0.02(1.02)^{12}} - \frac{12}{(1.02)^{12}}\right]$$

Despejando el valor de A, se obtiene un valor de $ 840.311.12, que corresponde a la primera cuota. Cada mes las cuotas aumentarán en $ 20.000.

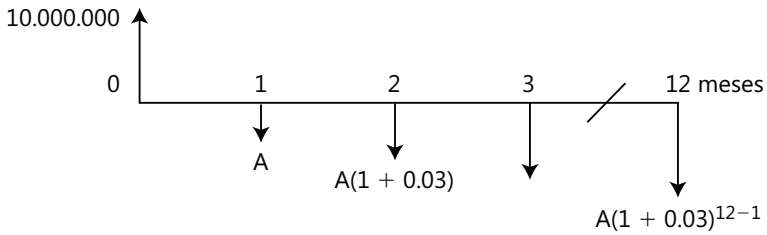
6. Cancelar la obligación con 12 cuotas mensuales que disminuyen en $ 20.000 cada mes. Este caso hace referencia a un sistema de gradiente lineal decreciente.



$$10.000.000 = A\left[\frac{(1.02)^{12} - 1}{0.02(1.02)^{12}}\right] - \frac{20.000}{0.02}\left[\frac{(1.02)^{12} - 1}{0.02(1.02)^{12}} - \frac{12}{(1.02)^{12}}\right]$$

Despejando el valor de A, se obtiene un valor de $ 1.050.880.51, que corresponde a la primera de las doce cuotas. Cada mes las cuotas disminuirán en $ 20.000.

7. Cancelar la obligación con 12 cuotas mensuales que crecen un 3% cada mes. Este caso se refiere a un gradiente geométrico creciente.



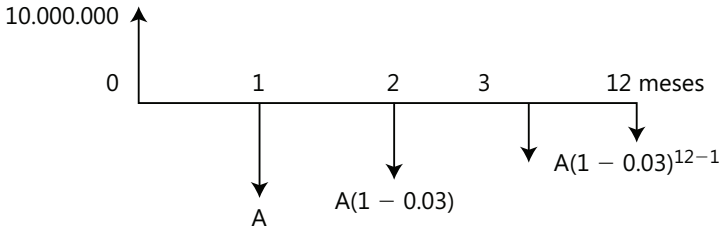
$$P = A\left[\frac{(1+J)^n - (1+i)^n}{(J-i)(1+i)^n}\right]$$

$$10.000.000 = A\left[\frac{(1.03)^{12} - (1.02)^{12}}{(0.03-0.02)(1.02)^{12}}\right]$$

$$A = \$\ 805.135.28$$

Este es el valor de la primera de las doce cuotas. Las cuotas siguientes aumentarán en un 3% mensual.

8. Pagar la obligación con doce cuotas que decrecen en un 3% cada mes. Este es el caso de un gradiente geométrico decreciente.



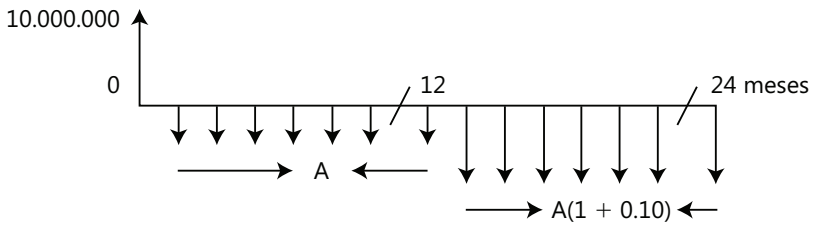
$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - (1-J)^n}{(J+i)(1+i)^n}\right]$$

$$10.000.000 = A\left[\frac{(1.02)^{12} - (1.03)^{12}}{(0.03+0.02)(1.02)^{12}}\right]$$

$$A = \$\ 1.103.972.01$$

Este es el valor de la primera de las doce cuotas. Las cuotas siguientes disminuyen en un 3% cada mes.

9. Cancelar la obligación en dos años, con cuotas mensuales iguales el primer año y que aumentan al final del año en un 10%. Hace referencia a un gradiente geométrico escalonado.



$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]\left[\frac{(1+TEA)^E - (1+J)^E}{(1+TEA)^E (TEA - J)^E}\right]$$

Una tasa del 2.0% mensual es equivalente a una tasa del 26.82% EA.

$$10.000.000 = A\left[\frac{(1.02)^{12} - 1}{0.02}\right]\left[\frac{(1+0.2682)^2 - (1.10)^2}{(1+0.2682)^2 (0.2682 - 0.10)}\right]$$

$$A = \$\ 506.361.49$$

Durante el primer año se pagarán cuotas mensuales de $ 506.361.49, que aumentarán en un 10% para el segundo año.

Conclusiones del ejemplo resumen

- En teoría, son muchas las formas de amortizar una obligación. Aquí, apenas, hemos presentado diez soluciones de pagos equivalentes, aunque no iguales, para cancelar una obligación de $ 10.000.000, que se resumen de la siguiente forma:

  1. Pagar hoy $ 10.000.000.
  2. Un pago de $ 12.682.417.94 dentro de 12 meses.
  3. Dos pagos iguales por valor de $ 5.733.308.09 en los meses 4 y 10.
  4. Doce pagos mensuales de $ 945.595.97.
  5. Doce pagos mensuales anticipados de $ 927.054.87.
  6. Doce cuotas mensuales que aumentan en $ 20.000 cada mes, siendo la primera de $840.311.12.
  7. Doce cuotas mensuales que disminuyen en $ 20.000 cada mes, siendo la primera de $1.050.880.51.
  8. Doce cuotas mensuales que crecen cada mes en un 3%, siendo la primera de $ 805.135.28.
  9. Doce cuotas mensuales que decrecen cada mes en un 3%, siendo la primera de $1.103.972.01.
  10. En dos años, con 12 cuotas mensuales por valor de $ 506.361.49 el primer año y que se incrementan en un 10% para el segundo año.

- ¿Cuál forma de pago le conviene más al deudor? Depende de muchos factores, esencialmente de su tasa de oportunidad, o sea, aquella tasa máxima a la que podría invertir su dinero. Si esta tasa es mayor que la tasa del crédito, al deudor le convendría la opción que más demore la entrega del capital. Además, como se mencionó en un acápite anterior, al deudor también lo beneficia la inflación, porque está en la oportunidad de cancelar la obligación con pesos desvalorizados. Usted, señor lector, nunca se ha preguntado: ¿por qué los bancos no hacen préstamos a largo plazo, sin indexar su valor? ¿Por qué no se financian vehículos a largo plazo? Una de las respuestas está en el riesgo de la inflación. En períodos inflacionarios al prestamista le conviene diseñar sistemas de pagos que le devuelvan lo antes posible el dinero que presta. A mayor plazo mayor riesgo de inflación. Ya con estos criterios definidos y si su tasa de oportunidad, es mayor del 2% mensual, de las diez opciones que plantea este ejercicio, ¿cuál le conviene más?

- Mientras no se cambie la tasa de interés cualquier sistema de pagos que se diseñe es equivalente a los otros. Esta equivalencia se demuestra trayendo, para cada caso, al presente los pagos futuros con la certeza que el valor será igual a $ 10.000.000. Para tal efecto, cada modelo matemático suministra una serie de fórmulas que hacen posible en una forma ágil esta operación.

- Se podría pensar, al mismo tiempo, que dadas las diferencias en el comportamiento de las cuotas en las diferentes formas de pago, el usuario incurriría en un costo si utiliza un plan de cuota fija mensual y que ese costo podría ser diferente si el plan de pagos fuera uno de cuotas crecientes. Esta aseveración no tiene ningún fundamento (*Zarruk, 1986*). En general, una vez se haya establecido el costo financiero del préstamo (tasa de interés), éste no sufre ninguna alteración cualquiera que sea el sistema que se utilice para su pago.

- Contrario a lo que muchas personas profanas del tema piensan, ningún sistema es más costoso que otro medido su valor en pesos. O sea, no podemos apoyarnos en la suma aritmética de las doce cuotas mensuales de cada sistema de pago para opinar sobre cuál es el más costoso. Si elegimos los sistemas de cuotas constantes (anualidades), el de cuotas crecientes en $ 20.000 mensuales y el de cuotas crecientes en un 3% mensual, podemos hacer el siguiente análisis:

Al sumar el valor de las doce cuotas mensuales, violando el principio del valor del dinero en el tiempo, tendríamos:

No. de la cuota	Cuota constante	Cuota creciente en $ 20.000	Cuota creciente en un 3%
1	$ 945.595.97	$ 840.311.12	$ 805.135.28
2	$ 945.595.97	$ 860.311.12	$ 829.289.34
3	$ 945.595.97	$ 880.311.12	$ 854.168.02
4	$ 945.595.97	$ 900.311.12	$ 879.793.06
5	$ 945.595.97	$ 920.311.12	$ 906.186.85
6	$ 945.595.97	$ 940.311.12	$ 933.372.46
7	$ 945.595.97	$ 960.311.12	$ 961.373.63
8	$ 945.595.97	$ 980.311.12	$ 990.214.84
9	$ 945.595.97	$ 1.000.311.12	$ 1.019.921.28
10	$ 945.595.97	$ 1.020.311.12	$ 1.050.518.92
11	$ 945.595.97	$ 1.040.311.12	$ 1.082.034.49
12	$ 945.595.97	$ 1.060.311.12	$ 1.114.495.52
Valor total pagado	$ 11.347.151.64	$ 11.403.733.44	$ 11.426.503.69

Si nos apoyamos en este incorrecto razonamiento financiero, el sistema más barato, y por lo tanto, el que debe elegir el cliente sería el de las cuotas constantes. Y, el más caro sería el de cuotas crecientes en un 3% mensual. Pero, razonando con las herramientas que aportan las Matemáticas Financieras, podemos apreciar que los tres sistemas de pago tienen el mismo costo y, por ende, un mismo valor futuro. Para demostrar esto, calculemos el valor futuro equivalente en cada uno de los sistemas de pago.

- Valor futuro del préstamo.

$$F = 10.000.000(1 + 0.02)^{12}$$

$$F = \$\ 12.682.417.90$$

- Valor futuro de las cuotas constantes:

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] = 945.595.97\left[\frac{(1.02)^{12} - 1}{0.02}\right]$$

$$F = \$\ 12.682.417.90$$

- Valor futuro de las cuotas que crecen en $ 20.000 cada mes:

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]$$

$$F = 840.311.12\left[\frac{(1.02)^{12} - 1}{0.02}\right] + \frac{20.000}{0.02}\left[\frac{(1.02)^{12} - 1}{0.02} - 12\right]$$

$$F = \$\ 12.682.417.90$$

- Valor futuro de cuotas que crecen un 3% cada mes.

$$F = A\left[\frac{(1+J)^n - (1+i)^n}{(J-i)}\right] = 805.135.28\left[\frac{(1.03)^{12} - (1.02)^{12}}{(0.03-0.02)}\right]$$

$$F = \$\ 12.682.417.90$$

Observamos que los valores futuros de las cuotas en los tres sistemas son iguales entre sí e iguales al valor futuro del préstamo. ¿Qué significan las igualdades encontradas? En primer lugar, veamos qué quiere decir el hecho de que el valor futuro de las cuotas de cada sistema de amortización sea igual al valor futuro del préstamo. Al trasladar el valor del préstamo hasta el final del año, a una tasa de interés del 2%, se obtiene una cantidad de $ 12.682.417.90 equivalente a la suma del capital inicial originalmente recibido en préstamo más los intereses causados durante el año a la tasa del 2% mensual. O sea, que si la suma de los valores futuros de las cuotas es igual al valor futuro del préstamo, significa que esas cuotas están calculadas de tal forma que cubren el valor principal del préstamo y el valor de los intereses que causa la colocación del capital a la tasa de interés establecida (*Zarruk, 1986*). En este caso, significa, entonces, que las cuotas calculadas en los tres sistemas son tales que pagan el valor de $ 10.000.000 y el valor de los intereses causados a una tasa mensual del 2%, o lo que es equivalente a una tasa del 26.82% EA. Al hacer la operación contraria, es decir, si sumamos el valor presente de las cuotas de cada sistema de pagos, se obtendrían $ 10.000.000 que es el valor del préstamo. Al convertir a valor presente todos los pagos mensuales lo que se está haciendo es quitarle a las cuotas el valor de los intereses, o la valorización nominal causada por los intereses. Se infiere, también, que *es diferente la suma aritmética total de los pagos que el valor del dinero pagado*. Para el caso de las cuotas mensuales constantes, la suma aritmética de las doce cuotas pagadas es de $ 11.347.151.64, mientras que el valor pagado es el valor futuro equivalente del dinero de $ 12.682.417.90. Considerar la suma aritmética como el valor total pagado sería desconocer el costo de oportunidad que tiene el dinero.

EJERCICIO 1. Un lote de terreno que tiene un valor de $ 10.000.000 se financia por medio del siguiente plan de pagos: cuota inicial igual al 20%, un pago al final del mes 2 por $ 5.000.000 y una serie de 10 pagos que aumentan cada mes en $ 5.000, desde el mes 3 hasta el mes 12. Calcular el valor de la primera cuota de la serie de pagos, si la tasa de interés de financiación es del 2.0% mensual.

Ecuación de valor en el momento cero:

El valor neto a financiar es igual a $ 8.000.000.

$$P = \frac{\text{Pago mes 2}}{(1+i)^2} + \frac{A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]}{(1+0.02)^2}$$

$$8.000.000 = \frac{5.000.000}{(1+0.02)^2} + \frac{A\left[\frac{(1+0.02)^{10} - 1}{0.02(1+0.02)^{10}}\right] + \frac{5.000}{0.02}\left[\frac{(1+0.02)^{10} - 1}{0.02(1+0.02)^{10}} - \frac{10}{(1+0.02)^{10}}\right]}{(1+0.02)^2}$$

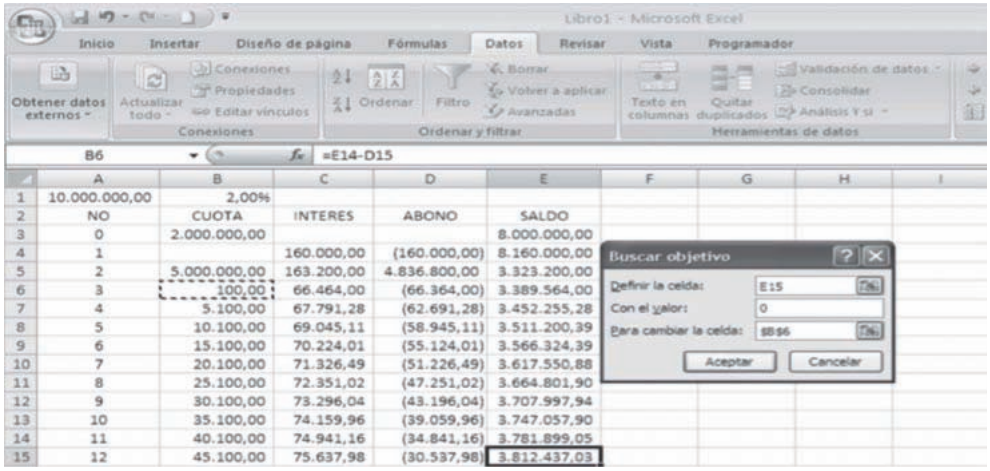
El valor presente de la serie de pagos crecientes en $ 5.000 cada mes, se encuentra ubicado en el mes 2, por lo tanto, tenemos que trasladarlo al momento cero.

$$A = \$\ 348.276.64$$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	10.000.000	2,0%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	=0,20*A1			=A1-B3
4	1		=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	5.000.000			
6	3	100			
7	4	=B6+5.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12				

En la celda A1 escribimos el valor del lote de terreno y en la celda B1 escribimos la tasa de interés del crédito. En la celda B3 calculamos el valor de la cuota inicial y en la E3 el saldo al final del período. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. En la celda B5 escribimos el pago de $ 5.000.000, en la celda B6 escribimos un valor arbitrario y en la celda B7 escribimos =B6 + 5.000, para indicar que esta cuota es $ 5.000 más que la cuota anterior. Copiamos la celda B7 hasta la celda B15. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	10.000.000,00	2,00%							
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO				
3	0	2.000.000,00			8.000.000,00				
4	1		160.000,00	(160.000,00)	8.160.000,00				
5	2	5.000.000,00	163.200,00	4.836.800,00	3.323.200,00				
6	3	100,00	66.464,00	(66.364,00)	3.389.564,00				
7	4	5.100,00	67.791,28	(62.691,28)	3.452.255,28				
8	5	10.100,00	69.045,11	(58.945,11)	3.511.200,39				
9	6	15.100,00	70.224,01	(55.124,01)	3.566.324,39				
10	7	20.100,00	71.326,49	(51.226,49)	3.617.550,88				
11	8	25.100,00	72.351,02	(47.251,02)	3.664.801,90				
12	9	30.100,00	73.296,04	(43.196,04)	3.707.997,94				
13	10	35.100,00	74.159,96	(39.059,96)	3.747.057,90				
14	11	40.100,00	74.941,16	(34.841,16)	3.781.899,05				
15	12	45.100,00	75.637,98	(30.537,98)	3.812.437,03				

EJERCICIO 2. Una propiedad por valor de $ 22.000.000 se financia a una tasa de interés del 2.5% mensual, por medio de una cuota inicial y 12 cuotas mensuales crecientes cada mes en un 1.0%. Si la primera cuota es de $ 2.000.000, calcular el valor de la cuota inicial.

Ecuación de valor en el momento cero:

$$P = CI + A\left[\frac{(1+J)^n - (1+i)^n}{(J-i)(1+i)^n}\right]$$

$$22.000.000 = CI + 2.000.000\left[\frac{(1+0.01)^{12} - (1+0.025)^{12}}{(0.01-0.025)(1+0.025)^{12}}\right]$$

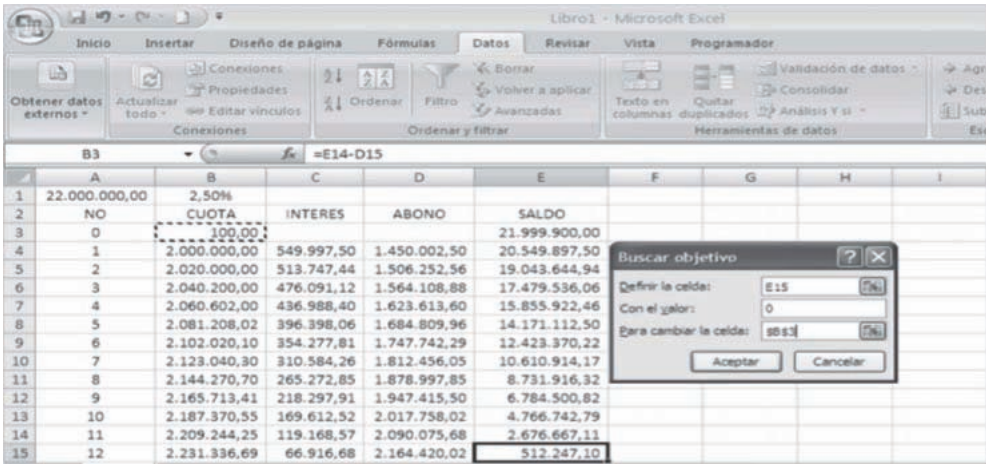
$$P = \$\ 380.984.34$$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	22.000.000	2,5%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	100			=A1−B3
4	1	2.000.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4 *1,01			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12				

En la celda A1 escribimos el valor de la propiedad y en la celda B1 escribimos la tasa de interés del crédito. En la celda B3 escribimos un valor arbitrario En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. En la celda B4 escribimos el valor de

la primera cuota y en la celda B5 escribimos =B4*1.01, para indicar que esta cuota es 1% más que la cuota anterior. Copiamos la celda B5 hasta la celda B15. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E
1	22.000.000,00	2,50%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	100,00			21.999.900,00
4	1	2.000.000,00	549.997,50	1.450.002,50	20.549.897,50
5	2	2.020.000,00	513.747,44	1.506.252,56	19.043.644,94
6	3	2.040.200,00	476.091,12	1.564.108,88	17.479.536,06
7	4	2.060.602,00	436.988,40	1.623.613,60	15.855.922,46
8	5	2.081.208,02	396.398,06	1.684.809,96	14.171.112,50
9	6	2.102.020,10	354.277,81	1.747.742,29	12.423.370,22
10	7	2.123.040,30	310.584,26	1.812.456,05	10.610.914,17
11	8	2.144.270,70	265.272,85	1.878.997,85	8.731.916,32
12	9	2.165.713,41	218.297,91	1.947.415,50	6.784.500,82
13	10	2.187.370,55	169.612,52	2.017.758,02	4.766.742,79
14	11	2.209.244,25	119.168,57	2.090.075,68	2.676.667,11
15	12	2.231.336,69	66.916,68	2.164.420,02	512.247,10

EJERCICIO 3. ¿Qué tasa de interés le reconocen por financiar una máquina que tiene un valor de contado de $ 25.000.000, por medio de una cuota inicial del 10% y 8 cuotas mensuales decrecientes en 50.000 cada mes, si el valor de la primera cuota es de $ 3.600.000?

Ecuación de valor en el momento cero:

$$P = CI + A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] - \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]$$

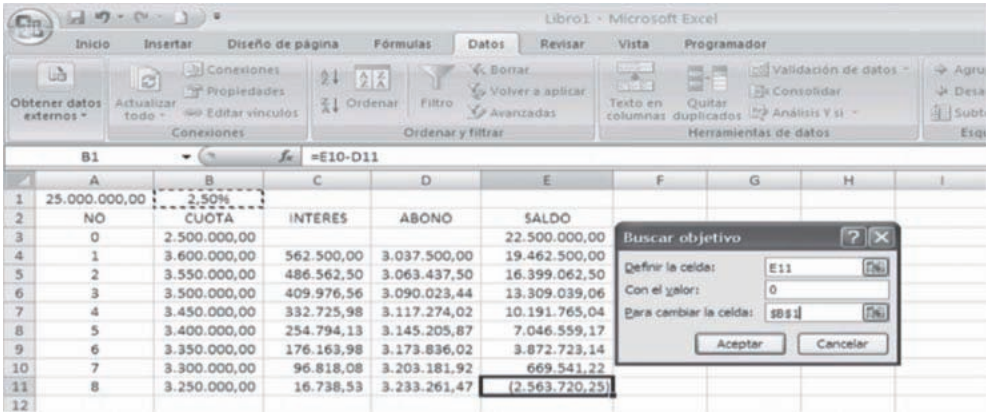
$$25.000.000 = 2.500.000 + 3.600.000\left[\frac{(1+i)^8 - 1}{i(1+i)^8}\right] - \frac{50.000}{i}\left[\frac{(1+i)^8 - 1}{i(1+i)^8} - \frac{8}{(1+i)^8}\right]$$

Por interpolación lineal, $i = 4.68\%$ mensual.

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	25.000.000	2,5%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	=0.10*A1			=A1−B3
4	1	3.600.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4−50.000			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
11	8				

En la celda A1 escribimos el valor de la máquina y en la celda B1 escribimos una tasa de interés arbitraria. En la celda B3 calculamos el valor de la cuota inicial En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. En la celda B4 escribimos el valor de la primera cuota y en la celda B5 escribimos =B4−50.000, para indicar que esta cuota es 50.000 menos que la cuota anterior. Copiamos la celda B5 hasta la celda B11. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E11 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E
1	25.000.000,00	2,50%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	2.500.000,00			22.500.000,00
4	1	3.600.000,00	562.500,00	3.037.500,00	19.462.500,00
5	2	3.550.000,00	486.562,50	3.063.437,50	16.399.062,50
6	3	3.500.000,00	409.976,56	3.090.023,44	13.309.039,06
7	4	3.450.000,00	332.725,98	3.117.274,02	10.191.765,04
8	5	3.400.000,00	254.794,13	3.145.205,87	7.046.559,17
9	6	3.350.000,00	176.163,98	3.173.836,02	3.872.723,14
10	7	3.300.000,00	96.818,08	3.203.181,92	669.541,22
11	8	3.250.000,00	16.738,53	3.233.261,47	(2.563.720,25)
12					

EJERCICIO 4. Un vehículo se está pagando con 12 cuotas mensuales crecientes cada mes en $ 100.000 y 2 cuotas extraordinarias en los meses 6 y 12 de $ 500.000 cada una, a una tasa de interés del 30% MV. Si la primera cuota tiene un valor de $ 1.850.000, calcular el valor del vehículo.

$$i = \frac{0.30}{12} = 2.50\% \text{ mensual}$$

Ecuación de valor en el momento cero:

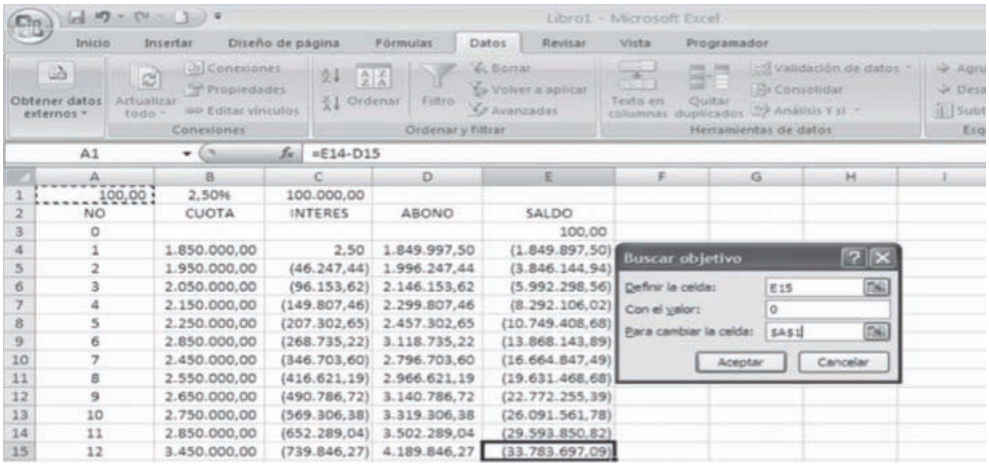
$$P = 1.850.000\left[\frac{(1.025)^{12}-1}{0.025(1.025)^{12}}\right] + \frac{100.000}{0.025}\left[\frac{(1.025)^{12}-1}{0.025(1.025)^{12}} - \frac{12}{(1.025)^{12}}\right] + \frac{500.000}{(1.025)^{6}} + \frac{500.000}{(1.025)^{12}}$$

$$P = \$\ 25.120.166.79$$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	100	2.5%	100.000		
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	1.850.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4+$C$1			
6	3	=B5+$C$1			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
9	6	=B8+$C$1+500.000			
10	7	=B9+$C$1−500.000			
11	8	=B10+$C$1			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12	=B14+$C$1+500.000			

En la celda A1 escribimos un valor arbitrario y en la celda B1 escribimos la tasa de interés. En la celda B4 escribimos el valor de la primera cuota y en la B5 calculamos el valor de la segunda cuota, la cual copiamos hasta B15, con excepción de las celdas B9 y B15 en las cuales agregamos el valor de la cuota extraordinaria. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E
1	100,00	2,50%	100.000,00		
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				100,00
4	1	1.850.000,00	2,50	1.849.997,50	(1.849.897,50)
5	2	1.950.000,00	(46.247,44)	1.996.247,44	(3.846.144,94)
6	3	2.050.000,00	(96.153,62)	2.146.153,62	(5.992.298,56)
7	4	2.150.000,00	(149.807,46)	2.299.807,46	(8.292.106,02)
8	5	2.250.000,00	(207.302,65)	2.457.302,65	(10.749.408,68)
9	6	2.850.000,00	(268.735,22)	3.118.735,22	(13.868.143,89)
10	7	2.450.000,00	(346.703,60)	2.796.703,60	(16.664.847,49)
11	8	2.550.000,00	(416.621,19)	2.966.621,19	(19.631.468,68)
12	9	2.650.000,00	(490.786,72)	3.140.786,72	(22.772.255,39)
13	10	2.750.000,00	(569.306,38)	3.319.306,38	(26.091.561,78)
14	11	2.850.000,00	(652.289,04)	3.502.289,04	(29.593.850,82)
15	12	3.450.000,00	(739.846,27)	4.189.846,27	(33.783.697,09)

EJERCICIO 5. El dueño de una bodega desea arrendarla durante un año por $ 500.000 mensuales y aumentar cada mes el valor del arriendo en un 0.50%. Como presume que cualquier arrendatario no aceptaría este sistema, ¿cuál debe ser el valor fijo mensual del arriendo, si su tasa de oportunidad es del 2,0% mensual?

Calculamos el valor presente de los arriendos del primer sistema de pagos:

$$P = A\left[\frac{(1+J)^n - (1+i)^n}{(J-i)(1+i)^n}\right]$$

$$P = 500.000\left[\frac{(1+0.005)^{12} - (1+0.02)^{12}}{(0.005-0.02) - (1+0.02)^{12}}\right]$$

$$P = \$\ 5.429.143.02$$

Calculamos el valor de las cuotas mensuales iguales equivalentes:

$$A = P\left[\frac{i(1+i)}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$A = 5.429.143.02\left[\frac{0.02(1+0.02)^{12}}{(1+0.02)^{12} - 1}\right]$$

$$A = \$\ 513.377.57$$

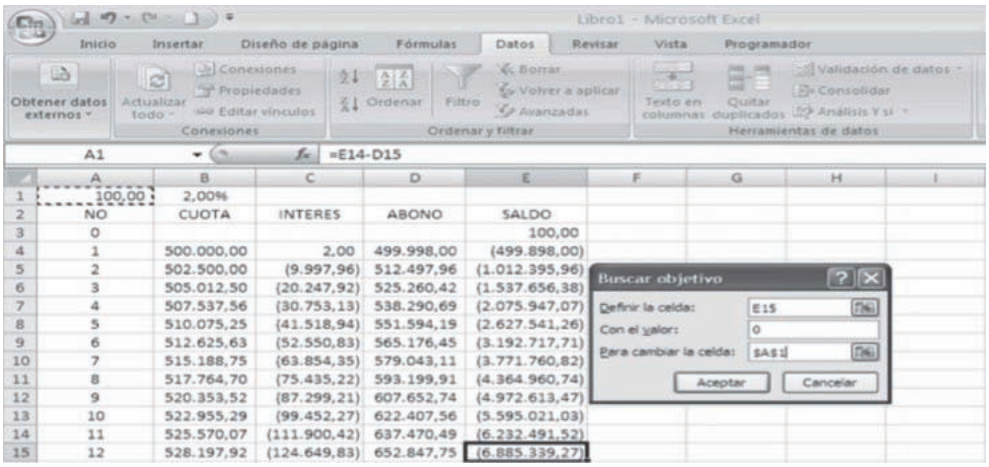
En Excel: = PAGO (2%; 12; 5429143,02)

Lo que significa que es equivalente pagar 12 arriendos mensuales de $ 513.377.57, que pagar 12 arriendos mensuales crecientes en un 0.5% empezando con un valor de $ 500.000.

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	100	2.0%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	500.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4 * 1.005			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12				

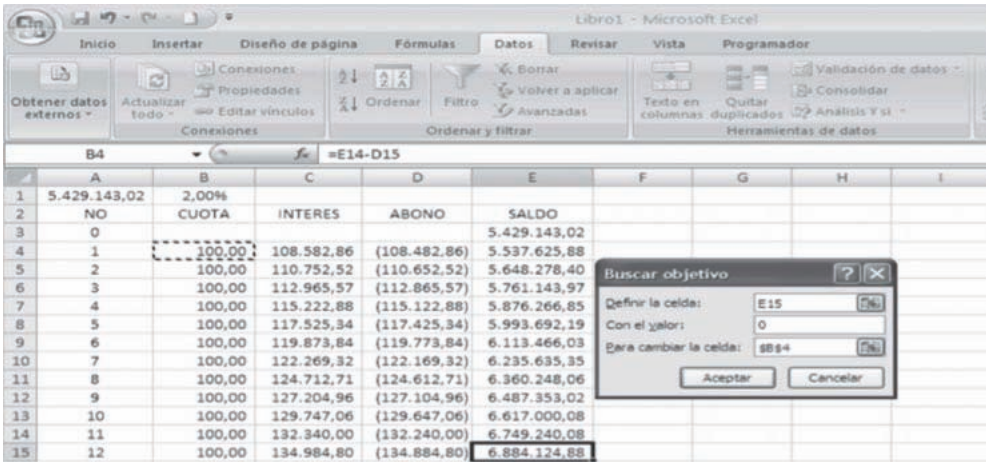
En la celda A1 escribimos un valor arbitrario, que corresponde al valor presente de los 12 arriendos crecientes y en la celda B1 escribimos la tasa de interés del crédito. En la celda B4 escribimos el valor del primer arriendo y en la B5 calculamos el del segundo arriendo y lo copiamos hasta B15. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicamos *Buscar objetivo*.



	A	B	C	D	E
1	100,00	2,00%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				100,00
4	1	500.000,00	2,00	499.998,00	(499.898,00)
5	2	502.500,00	(9.997,96)	512.497,96	(1.012.395,96)
6	3	505.012,50	(20.247,92)	525.260,42	(1.537.656,38)
7	4	507.537,56	(30.753,13)	538.290,69	(2.075.947,07)
8	5	510.075,25	(41.518,94)	551.594,19	(2.627.541,26)
9	6	512.625,63	(52.550,83)	565.176,45	(3.192.717,71)
10	7	515.188,75	(63.854,35)	579.043,11	(3.771.760,82)
11	8	517.764,70	(75.435,22)	593.199,91	(4.364.960,74)
12	9	520.353,52	(87.299,21)	607.652,74	(4.972.613,47)
13	10	522.955,29	(99.452,27)	622.407,56	(5.595.021,03)
14	11	525.570,07	(111.900,42)	637.470,49	(6.232.491,52)
15	12	528.197,92	(124.649,83)	652.847,75	(6.885.339,27)

Calculamos el valor de los arriendos mensuales iguales:

Hoja de cálculo Excel



	A	B	C	D	E
1	5.429.143,02	2,00%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				5.429.143,02
4	1	100,00	108.582,86	(108.482,86)	5.537.625,88
5	2	100,00	110.752,52	(110.652,52)	5.648.278,40
6	3	100,00	112.965,57	(112.865,57)	5.761.143,97
7	4	100,00	115.222,88	(115.122,88)	5.876.266,85
8	5	100,00	117.525,34	(117.425,34)	5.993.692,19
9	6	100,00	119.873,84	(119.773,84)	6.113.466,03
10	7	100,00	122.269,32	(122.169,32)	6.235.635,35
11	8	100,00	124.712,71	(124.612,71)	6.360.248,06
12	9	100,00	127.204,96	(127.104,96)	6.487.353,02
13	10	100,00	129.747,06	(129.647,06)	6.617.000,08
14	11	100,00	132.340,00	(132.240,00)	6.749.240,08
15	12	100,00	134.984,80	(134.884,80)	6.884.124,88

EJERCICIO 6. ¿Cuántos pagos que aumenten en un 5% cada mes, serán necesarios para cancelar una deuda de $ 3.000.000, si el primer pago es de $ 473.767.55 y se cobra una tasa de interés del 2% mensual?

$$P = A\left[\frac{(1+J)^n - (1+i)^n}{(J-i)(1+i)^n}\right]$$

$$3.000.000 = 473.767.55\left[\frac{(1+0.05)^n - (1+0.02)^n}{(0.05-0.02)(1+0.02)^n}\right]$$

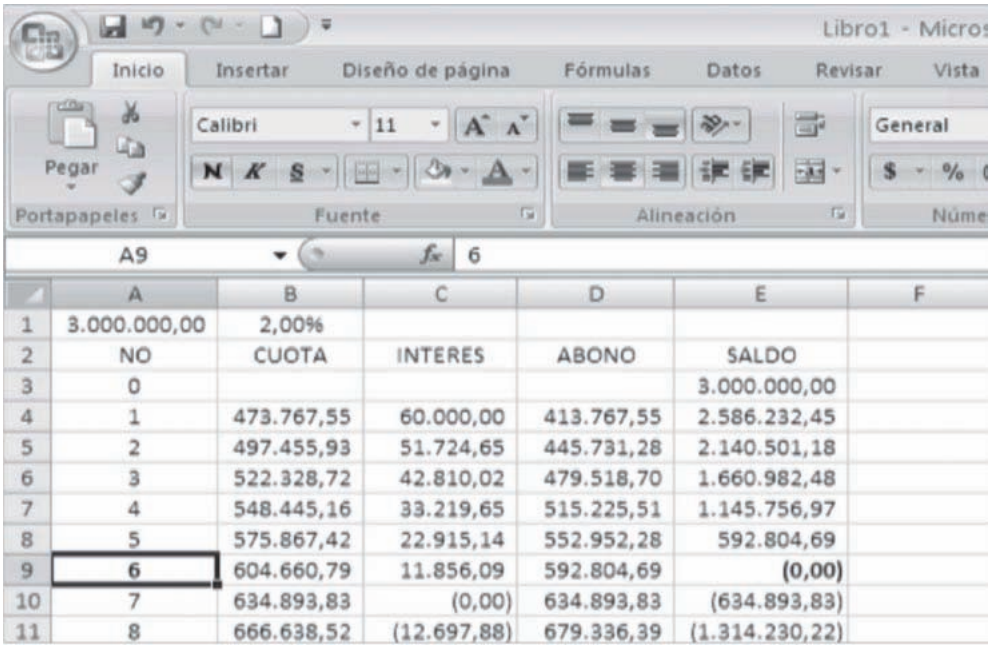
Por interpolación lineal, $n = 6$ pagos.

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1	3.000.000	2,0%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	473.767.55	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4*1.05			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
12	9				

En la celda A1 escribimos el valor de la deuda y en la celda B1 escribimos la tasa de interés del crédito. En la celda B4 escribimos el valor de la primera cuota y en la celda B5 calculamos el valor de la segunda cuota, la cual copiamos hasta la celda B12, por ejemplo. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo. Copiamos

las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E12 y chequeamos hasta cuando encontremos un saldo igual a cero.



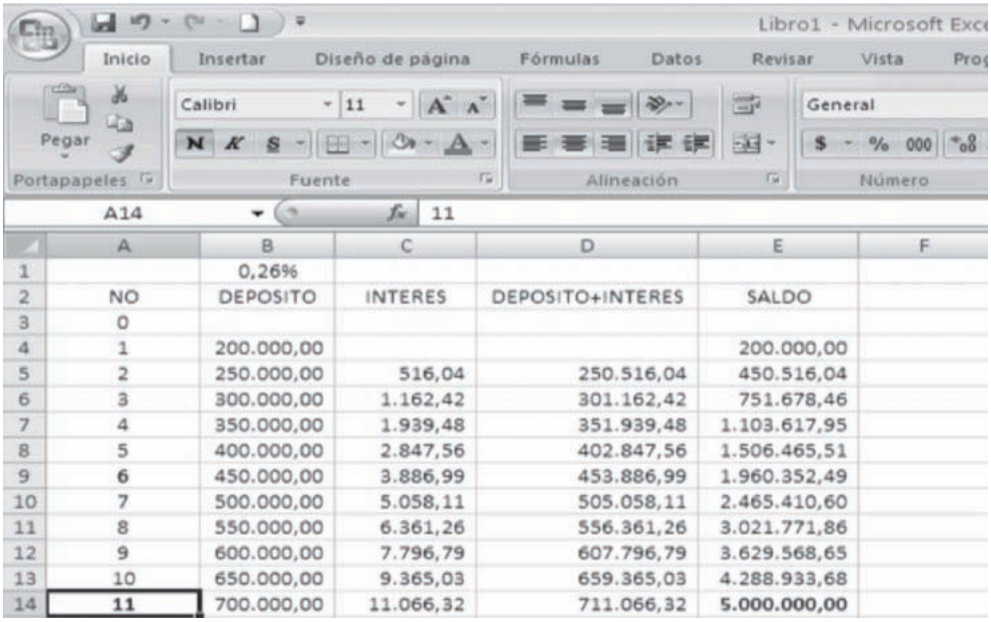
	A	B	C	D	E	F
1	3.000.000,00	2,00%				
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO	
3	0				3.000.000,00	
4	1	473.767,55	60.000,00	413.767,55	2.586.232,45	
5	2	497.455,93	51.724,65	445.731,28	2.140.501,18	
6	3	522.328,72	42.810,02	479.518,70	1.660.982,48	
7	4	548.445,16	33.219,65	515.225,51	1.145.756,97	
8	5	575.867,42	22.915,14	552.952,28	592.804,69	
9	6	604.660,79	11.856,09	592.804,69	(0,00)	
10	7	634.893,83	(0,00)	634.893,83	(634.893,83)	
11	8	666.638,52	(12.697,88)	679.336,39	(1.314.230,22)	

EJERCICIO 7. Un padre de familia necesita disponer de $ 5.000.000 para pagar la matrícula de su hijo, para tal efecto abre una cuenta de ahorros con $ 200.000 y está dispuesto a aumentar el valor de los depósitos mensuales en $ 50.000. Si le reconocen una tasa de interés del 0.26% mensual, ¿en cuánto tiempo tendrá el valor requerido? Utilice la hoja de cálculo Excel.

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1		0.26%			
2	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO+INTERÉS	SALDO
3	0	200.000			=A1
4	1	=B3+50.000	=E3*$B$1	=B4+C4	=E3+D4
.....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12				

En la celda B1 escribimos la tasa de interés. En la celda B3 registramos el valor del depósito inicial y en la celda B4 calculamos el valor del segundo depósito, el cual copiamos hasta la celda B15, por ejemplo. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, depósito más interés y saldo y copiamos las fórmulas en el rango C5:E15. Chequeamos la celda E14 y encontramos un saldo de $ 5.000.000, lo que indica que a los 11 meses se tendrá el saldo requerido.



	A	B	C	D	E	F
1		0,26%				
2	NO	DEPOSITO	INTERES	DEPOSITO+INTERES	SALDO	
3	0					
4	1	200.000,00			200.000,00	
5	2	250.000,00	516,04	250.516,04	450.516,04	
6	3	300.000,00	1.162,42	301.162,42	751.678,46	
7	4	350.000,00	1.939,48	351.939,48	1.103.617,95	
8	5	400.000,00	2.847,56	402.847,56	1.506.465,51	
9	6	450.000,00	3.886,99	453.886,99	1.960.352,49	
10	7	500.000,00	5.058,11	505.058,11	2.465.410,60	
11	8	550.000,00	6.361,26	556.361,26	3.021.771,86	
12	9	600.000,00	7.796,79	607.796,79	3.629.568,65	
13	10	650.000,00	9.365,03	659.365,03	4.288.933,68	
14	11	700.000,00	11.066,32	711.066,32	5.000.000,00	

EJERCICIO 8. Katya Elena inicia hoy una cuenta de ahorros con $ 800.000 y en los próximos 4 meses deposita $ 200.000 cada mes. En el mes 6 deposita $ 400.000 y en los próximos 3 meses incrementa el valor de los depósitos en un 2%. Calcular el saldo a finales del año, si le reconocen una tasa de interés del 0.5% mensual.

Ecuación de valor en el momento cero:

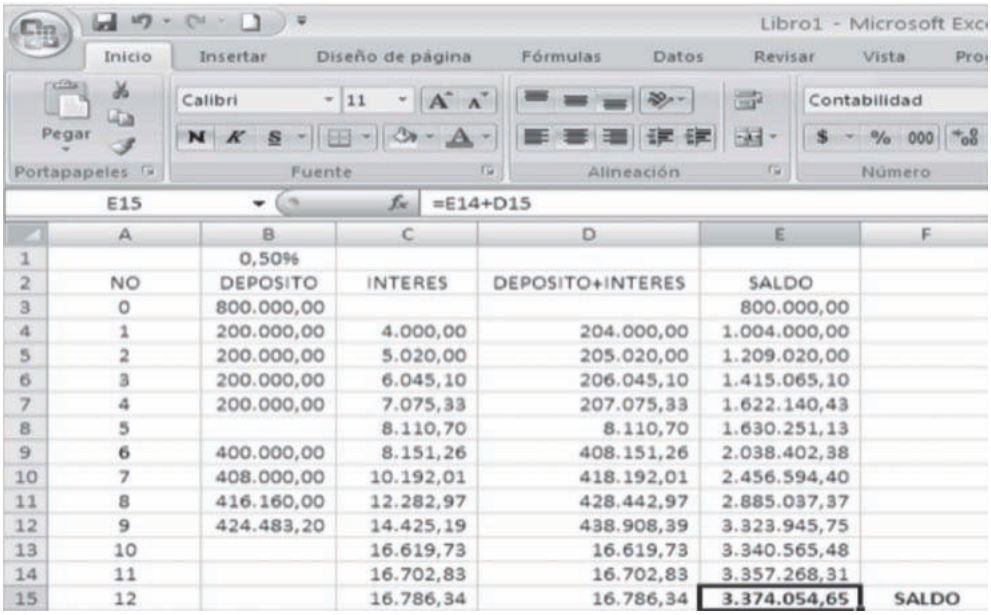
$$800.000+200.000\left[\frac{(1+0.005)^4-1}{0.005(1+0.005)^4}\right]+\frac{400.000\left[\frac{(1+0.02)^4-(1+0.005)^4}{(0.02-0.005)(1+0.005)^4}\right]}{(1+0.005)^5}=\frac{S}{(1.005)^{12}}$$

$$S = \$\ 3.374.054.65$$

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E
1		0.50%			
2	NO	DEPÓSITO	INTERÉS	DEPÓSITO+INTERÉS	SALDO
3	0	800.000			=A1
4	1	200.000	=E3*$B$1	=B4+C4	=E3+D4
5	2	200.000			
6	3	200.000			
7	4	200.000			
8	5				
9	6	400.000			
10	7	=B9*1.02			
11	8	=B10*1.02			
12	9	=B11*1.02			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
15					

En la celda B1 escribimos la tasa de interés. En la celda B3 registramos el valor del depósito inicial y en las celdas B4, B5, B6 y B7 escribimos los depósitos de $ 200.000. En la celda B9 escribimos el valor del nuevo depósito de $ 400.000 y en las celdas B10, B11 y B12 calculamos los nuevos depósitos. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, depósito más interés y saldo y copiamos las fórmulas en el rango C5:E15 y encontramos en la celda E15 un valor de $ 3.374.054.65, que corresponde al saldo.



	A	B	C	D	E	F
1		0,50%				
2	NO	DEPOSITO	INTERES	DEPOSITO+INTERES	SALDO	
3	0	800.000,00			800.000,00	
4	1	200.000,00	4.000,00	204.000,00	1.004.000,00	
5	2	200.000,00	5.020,00	205.020,00	1.209.020,00	
6	3	200.000,00	6.045,10	206.045,10	1.415.065,10	
7	4	200.000,00	7.075,33	207.075,33	1.622.140,43	
8	5		8.110,70	8.110,70	1.630.251,13	
9	6	400.000,00	8.151,26	408.151,26	2.038.402,38	
10	7	408.000,00	10.192,01	418.192,01	2.456.594,40	
11	8	416.160,00	12.282,97	428.442,97	2.885.037,37	
12	9	424.483,20	14.425,19	438.908,39	3.323.945,75	
13	10		16.619,73	16.619,73	3.340.565,48	
14	11		16.702,83	16.702,83	3.357.268,31	
15	12		16.786,34	16.786,34	3.374.054,65	SALDO

EJERCICIO 9. Se reciben dos ofertas de pago por una propiedad que tiene un valor de $ 50.000.000 y se puede financiar al 2% mensual:

a) 12 cuotas mensuales iguales de $ 4.727.979.83.

b) 12 cuotas mensuales crecientes en $ 50.000 cada mes, siendo la primera cuota de $ 4.370.208.13.

¿Qué oferta aceptaría usted?

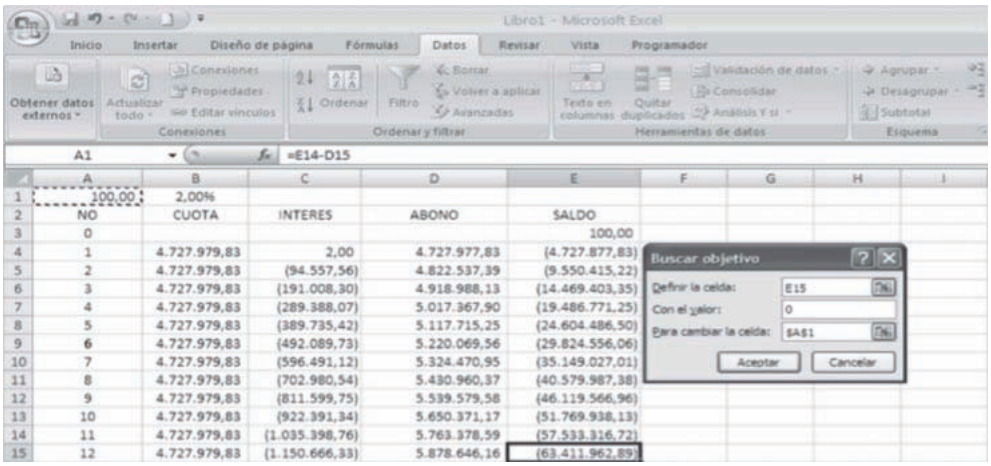
Oferta a: Calculamos el valor presente equivalente de las 12 cuotas mensuales iguales:

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$P = 4.727.979.83\left[\frac{(1+0.02)^{12} - 1}{0.02(1+0.02)^{12}}\right] = \$\ 50.000.000$$

En Excel: $= VA\ (2\%;\ 12;\ -4727979{,}83)$

Hoja de cálculo Excel



	A	B	C	D	E
1	100,00	2,00%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				100,00
4	1	4.727.979,83	2,00	4.727.977,83	(4.727.877,83)
5	2	4.727.979,83	(94.557,56)	4.822.537,39	(9.550.415,22)
6	3	4.727.979,83	(191.008,30)	4.918.988,13	(14.469.403,35)
7	4	4.727.979,83	(289.388,07)	5.017.367,90	(19.486.771,25)
8	5	4.727.979,83	(389.735,42)	5.117.715,25	(24.604.486,50)
9	6	4.727.979,83	(492.089,73)	5.220.069,56	(29.824.556,06)
10	7	4.727.979,83	(596.491,12)	5.324.470,95	(35.149.027,01)
11	8	4.727.979,83	(702.980,54)	5.430.960,37	(40.579.987,38)
12	9	4.727.979,83	(811.599,75)	5.539.579,58	(46.119.566,96)
13	10	4.727.979,83	(922.391,34)	5.650.371,17	(51.769.938,13)
14	11	4.727.979,83	(1.035.398,76)	5.763.378,59	(57.533.316,72)
15	12	4.727.979,83	(1.150.666,33)	5.878.646,16	(63.411.962,89)

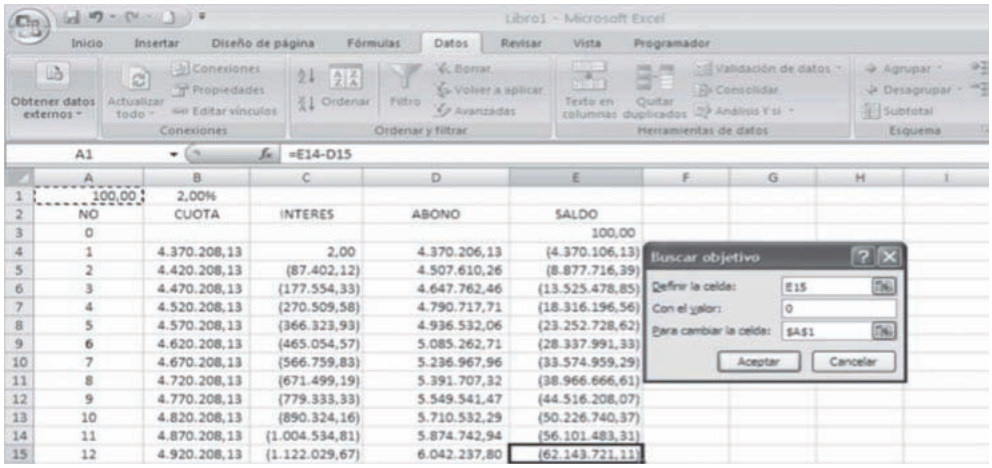
Oferta b: Calculamos el valor presente equivalente de las 12 cuotas mensuales crecientes.

$$P = 4.370.208.13\left[\frac{(1.02)^{12} - 1}{0.02(1.02)^{12}}\right] + \frac{50.000}{0.02}\left[\frac{(1.02)^{12} - 1}{0.02(1.02)^{12}} - \frac{12}{(1.02)^{12}}\right]$$

$$P = \$\ 49.000.000$$

Con base en los resultados de los valores presentes equivalentes, se concluye que la mejor oferta es la primera.

Hoja de cálculo Excel



	A	B	C	D	E
1	100,00	2,00%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				100,00
4	1	4.370.208,13	2,00	4.370.206,13	(4.370.106,13)
5	2	4.420.208,13	(87.402,12)	4.507.610,26	(8.877.716,39)
6	3	4.470.208,13	(177.554,33)	4.647.762,46	(13.525.478,85)
7	4	4.520.208,13	(270.509,58)	4.790.717,71	(18.316.196,56)
8	5	4.570.208,13	(366.323,93)	4.936.532,06	(23.252.728,62)
9	6	4.620.208,13	(465.054,57)	5.085.262,71	(28.337.991,33)
10	7	4.670.208,13	(566.759,83)	5.236.967,96	(33.574.959,29)
11	8	4.720.208,13	(671.499,19)	5.391.707,32	(38.966.666,61)
12	9	4.770.208,13	(779.333,33)	5.549.541,47	(44.516.208,07)
13	10	4.820.208,13	(890.324,16)	5.710.532,29	(50.226.740,37)
14	11	4.870.208,13	(1.004.534,81)	5.874.742,94	(56.101.483,31)
15	12	4.920.208,13	(1.122.029,67)	6.042.237,80	(62.143.721,11)

CAPÍTULO 7

Sistemas de amortización

El dinero y el tiempo son las cargas más pesadas de la vida, y los más infelices de los mortales son aquellos que les sobran las dos cosas, y no tienen tiempo para disfrutarlas.

Samuel Johnson

0. Definición

La amortización* es, desde el punto de vista financiero, el proceso de pago de una deuda y sus intereses mediante una serie de cuotas (periódicas o no), en un tiempo determinado. La palabra amortización proviene del latín *mors*, que significa muerte, por lo tanto, la amortización es el proceso con el que se "mata" una deuda.

1. Sistema de amortización

Cuando se adquiere una obligación, su pago se pacta con una serie de condiciones mínimas que determinan el comportamiento que debe asumir el deudor. Para que se pueda hablar de la existencia de un sistema de amortización, es necesario conocer cuatro datos básicos:

- Valor de la deuda.
- Plazo durante el cual estará vigente la obligación.

* Existe también la amortización contable que hace referencia a la recuperación de una inversión en activos diferidos.

- Costo financiero que debe asumir el deudor en la cancelación de la deuda. Este costo financiero es la tasa de interés cobrada en la operación financiera.
- El patrón de pago del crédito. Se debe especificar la forma de pago de las cuotas.

A partir de los datos anteriores se puede conocer en cualquier momento el estado del crédito: valor de las cuotas por pagar, composición de la cuota y el saldo insoluto de la deuda.

Aunque, en teoría, pueden existir imnumerables sistemas para amortizar una deuda dependiendo de la creatividad del deudor y el acreedor, se estudiarán en este capítulo los sistemas más usados, tanto en el sistema financiero como en los créditos comerciales. También se analizarán, en el solucionario al final del capítulo, sistemas de amortización de créditos de vivienda aprobados por la Superintendencia Financiera.

1.1 Composición de los pagos

Por lo general, cada cuota de pago que amortiza una deuda tiene dos componentes: interés y abono al capital. Existen casos especiales en los cuales al principio del plazo del crédito, las cuotas no cubren el costo financiero y el saldo del crédito se incrementa, por ejemplo, los sistemas de crédito de financiación de vivienda. En estos casos el saldo de la deuda crece en lugar de bajar. Para que la deuda se amortice se requiere que, al menos, algunas cuotas sobrepasen el costo financiero y haya abono al capital. La razón de conocer la composición de cada cuota es puramente financiera. En Colombia los intereses son deducibles de impuestos en un 100% y, por esta razón, interesa saber de cada cuota que se paga, qué porción corresponde a los intereses. El valor de los intereses pagados por un crédito aparece en el Estado de Resultados como gastos financieros, reduciendo la utilidad sobre la cual se liquidan los impuestos.

1.2 Tabla de amortización

Al diseñar un plan de amortización de una deuda se acostumbra construir la tabla de amortización, que registra período a período la forma como va evolucionando el pago de la deuda. Una tabla de amortización debe contener como mínimo 5 columnas: la primera muestra los períodos de pago, la segunda muestra el valor de la cuota periódica, la tercera el valor de los intereses, la cuarta muestra el abono a capital y la quinta columna muestra el saldo de la deuda. Es importante aclarar que no es imprescindible construir una tabla de amortización para conocer la composición de una cuota; basta con calcularle los intereses al capital insoluto del período inmediatamente anterior y restárselos al valor de la cuota, para conocer que parte corresponde a la amortización. Este procedimiento será analizado más adelante al desarrollar los ejercicios.

1.3 Cálculo del saldo insoluto

El saldo de una deuda es lo que se está debiendo en cualquier momento, dentro del plazo. Conocer el saldo de una deuda, en cualquier momento, es de mucha importancia en las operaciones financieras, por razones presupuestales, para hacer proyecciones y control financiero, hacer abonos parciales a una deuda, o conocerlo para cancelar la deuda totalmente.

Como se trató en el capítulo 5, sección 6, son 2 los procedimientos equivalentes para calcular el saldo de una deuda en cualquier momento, que aplicaremos en este capítulo en el desarrollo de algunos ejercicios.

2. Sistemas de amortización

En el pago de un crédito, cualquiera sea su naturaleza, el deudor se compromete a cubrir dos rubros: primero, el costo financiero (pago de intereses), que es el pago por el uso del dinero tomado en préstamo durante el plazo pactado. El segundo, es la restitución del capital recibido en préstamo. De las múltiples formas que existen para restituir el capital prestado, acordadas libremente entre el deudor y el acreedor, surgen los diferentes sistemas o formas de amortización de un préstamo. Para entender éstos, se necesita comparar inicialmente el comportamiento de las cuotas con el costo financiero.

Supóngase el caso de un préstamo por valor de $ 10.000.000, a una tasa de interés del 3% mensual. El valor de los intereses del primer mes, es igual al capital multiplicado por la tasa de interés.

$$\text{Intereses} = P \times i = \$\ 10.000.000 \times 0.03 = \$\ 300.000$$

- **Primera situación**: el valor de las cuotas es mayor que el costo financiero, por ejemplo, una cuota de $350.000. En este caso el saldo de la deuda comienza a disminuir a partir del pago de la primera cuota, porque esta cubre el valor de los intereses y el remanente constituye un abono al capital. Llegará un momento en que el saldo quedará en cero. Este es el caso común de una anualidad, llamado sistema de cuota fija que analizaremos en el apartado 2.2.
- **Segunda situación**: el valor de las cuotas es igual al costo financiero; para nuestro caso, el valor de la cuota es igual a $ 300.000. Aquí, la deuda permanece constante y de no existir un pago extraordinario, la deuda nunca se amortizará. Es el caso de una anualidad perpetua.
- **Tercera situación**: el valor de las primeras cuotas es menor que el valor de los intereses. En este caso el saldo de la deuda comienza a subir. Se requiere, entonces, diseñar un sistema de cuotas que también aumenten periódicamente hasta el momento en que su valor sobrepase el valor de los intereses y abone algo al capital.

No obstante que para el uso de *Buscar objetivo* de Excel ya hemos utilizado las tablas de amortización, a continuación se desarrollarán los sistemas de amortización más utilizados en el sistema financiero y comercial en nuestro país.

2.1 Amortización con pago único del capital al final del plazo

En este sistema, se pagan periódicamente los intereses y al final del plazo del crédito se devuelve el capital prestado.

Ejemplo 7.1

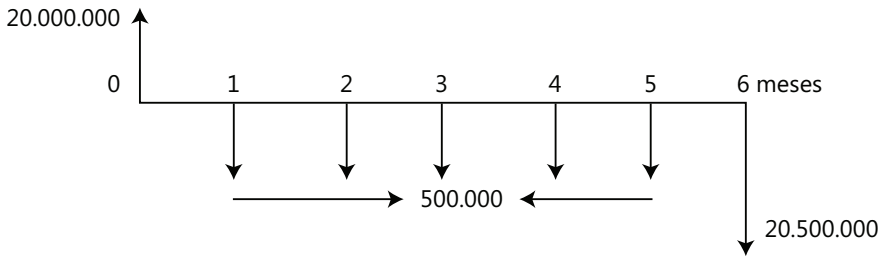
Una deuda de $ 20.000.000 se va a financiar a 6 meses a una tasa de interés del 2.5% mensual. Los pagos mensuales serán únicamente de intereses y el capital se pagará al final del plazo del crédito. Construya la tabla de amortización.

Se calcula el valor de los intereses mensuales.

$$I = P \times i$$

$$I = \$\ 20.000.000 \times 0.025 = \$\ 500.000$$

El flujo de caja del crédito es el siguiente:



La tabla de amortización es la siguiente:

No.	Cuota	Interés	Amortización	Saldo
1	$ 500.000	$ 500.000	0	20.000.000
2	$ 500.000	$ 500.000	0	20.000.000
3	$ 500.000	$ 500.000	0	20.000.000
4	$ 500.000	$ 500.000	0	20.000.000
5	$ 500.000	$ 500.000	0	20.000.000
6	$ 20.500.000	$ 500.000	20.000.000	0

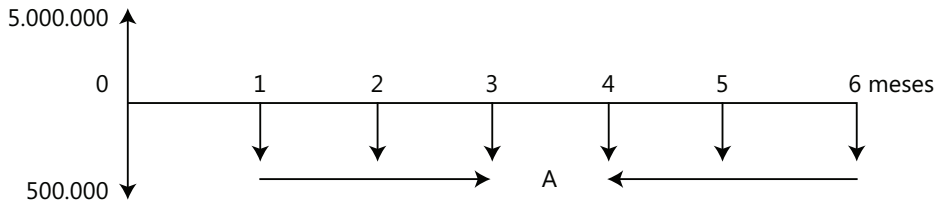
2.2 Sistema de cuota fija

Este sistema, llamado también sistema de amortización simple o crédito plano, tiene la característica que los pagos son iguales y periódicos, o sea, que hace referencia a una anualidad o serie uniforme. En la vida práctica es el sistema más utilizado por los Bancos y casas comerciales para el financiamiento de articulos de consumo, créditos bancarios y de vivienda. Tiene la particularidad que desde el pago de la primera cuota, el saldo de la deuda empieza a disminuir hasta llegar a cero, debido a que siempre el valor de la cuota sobrepasa el costo financiero.

Ejemplo 7.2

Un electrodoméstico que vale de contado $ 5.000.000 se financia de la siguiente forma: una cuota inicial de $ 500.000 y el saldo en 6 cuotas mensuales iguales. Si la tasa de interés de financiación que se cobra es del 30% capitalizable mensualmente, calcular el valor de las cuotas. Construya la tabla de amortización.

Construimos el flujo de caja.



Con fecha focal en el momento cero se plantea la ecuación de valor.

$$5.000.000 = 500.000 + A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

La tasa de interés de la operación está expresada en forma nominal, por lo tanto, tenemos que dividirla para conocer la tasa efectiva periódica equivalente.

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.30}{12} = 0.025 = 2.5\% \text{ mensual}$$

$$5.000.000 = 500.000 + A\left[\frac{(1+0.025)^6 - 1}{0.025(1+0.025)^6}\right]$$

$$A = \$\ 816.974.87$$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENU	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	4.500.000 PV EXE	VDT
4.500.000 PV	4.500.000 PV	SHIFT AC EXE AC	2.5 I % EXE	CLEAR DATA
2.5 i %	2.5 i %	4.500.000 F3	6 n EXE	4.500.000 VA
6 n	6 n	2.5 F2	0 FV EXE	2.5 % IA
COMP PMT	COMP PMT EXE	6 F1	PMT SOLVE	6 N
		COMP F4		PAGO

En Excel: = PAGO (tasa; nper; VA; VF; tipo)
= PAGO (2,5%; 6; −4.500.000; 0)

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

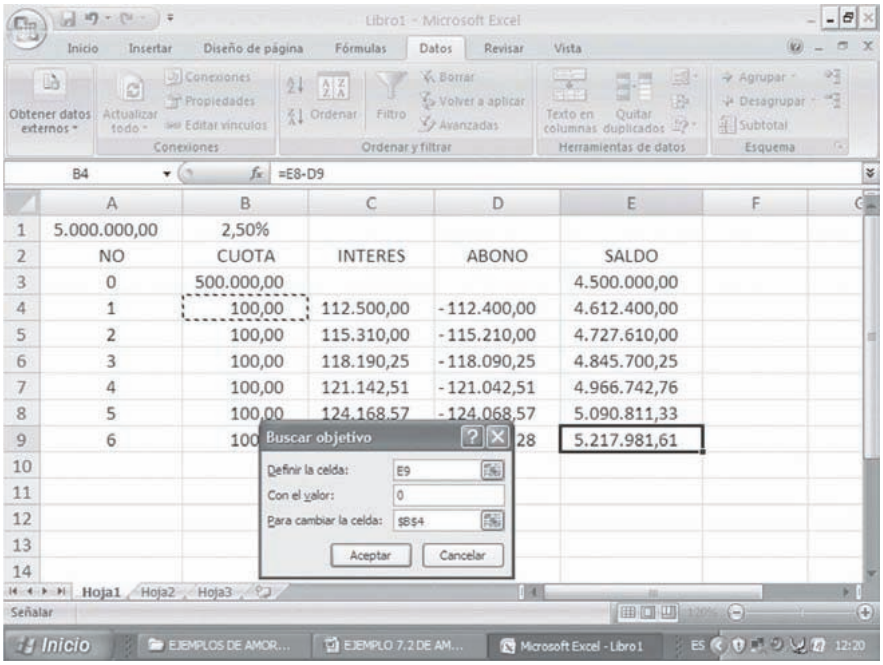
Figura 7.1

	A	B	C	D	E
1	5.000.000	2.5%			
2	N°	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	500.000			=A1−B3
4	1	100	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
9	6				

En la celda A1 escribimos el valor del electrodoméstico y en la B1 la tasa de interés. En la celda B3 registramos la cuota inicial y en la E3 calculamos el saldo insoluto. En la celda B4 escribimos un valor arbitrario de 100 y en B5 calculamos la segunda cuota que es igual a la primera. Copiamos B5 hasta B9. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, abono a capital y saldo insoluto. (Ver figura 7.1).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E9 y aplicando *Buscar objetivo* encontramos en la celda B4 un valor de $ 816.974.87 que corresponde al valor de la cuota mensual. (Ver figura 7.2).

Figura 7.2



	A	B	C	D	E
1	5.000.000,00	2,50%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	500.000,00			4.500.000,00
4	1	100,00	112.500,00	-112.400,00	4.612.400,00
5	2	100,00	115.310,00	-115.210,00	4.727.610,00
6	3	100,00	118.190,25	-118.090,25	4.845.700,25
7	4	100,00	121.142,51	-121.042,51	4.966.742,76
8	5	100,00	124.168,57	-124.068,57	5.090.811,33
9	6	100		28	5.217.981,61

Nótese que desde el pago de la primera cuota el saldo de la deuda comienza a disminuir, debido a que el valor de la cuota sobrepasa el costo financiero. Esta característica hace que este sistema de amortización sea el más utilizado universalmente, ya que el deudor se estimula al observar que cada vez que paga una cuota el saldo de la deuda es menor. El valor de la amortización a la deuda cada mes, resulta de restarle al valor de la cuota el valor de los intereses del período, que a su vez resultan de aplicarle al saldo insoluto la tasa de interés. Es importante recordar que la tasa de interés se aplica sobre el saldo insoluto al principio de cada período.

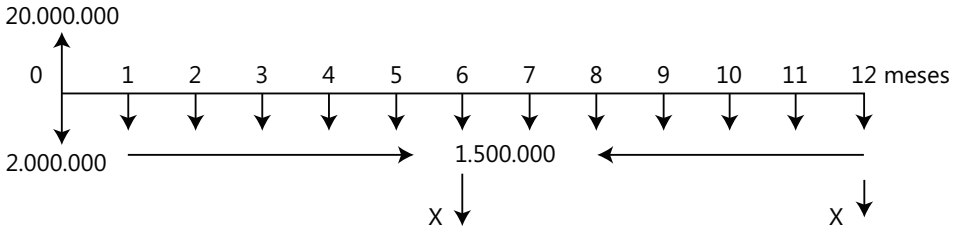
2.3 Sistema de cuota fija con cuotas extraordinarias

Básicamente es el mismo sistema de amortización con cuota fija, analizado en la sección 2.2, pero con la diferencia de que en el plazo del crédito se hacen abonos adicionales al capital, para lograr disminuir el valor de las cuotas periódicas.

Ejemplo 7.3

Un vehículo que tiene un valor de contado de $ 20.000.000 se piensa financiar de la siguiente forma: cuota inicial de $ 2.000.000 y el saldo en 12 cuotas mensuales iguales de $ 1.808.317.54, con una tasa de financiación del 3% mensual. El interesado en la compra del vehículo sólo tiene capacidad para cancelar $ 1.500.000 mensuales y 2 cuotas extraordinarias en los meses 6 y 12. Calcular el valor de las dos cuotas y construir la tabla de amortización.

Construimos el flujo de caja.



Se elige el momento cero como fecha focal para plantear la ecuación de valor.

$$18.000.000 = 1.500.000\left[\frac{(1+0.03)^{12}-1}{0.03(1+0.03)^{12}}\right] + \frac{X}{(1+0.03)^{6}} + \frac{X}{(1+0.03)^{12}}$$

$$18.000.000 = 14.931.005.99 + 0.8375X + 0.7014X$$

$$3.068.994.01 = 1.5389X$$

$$X = \$\ 1.994.324.21$$

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

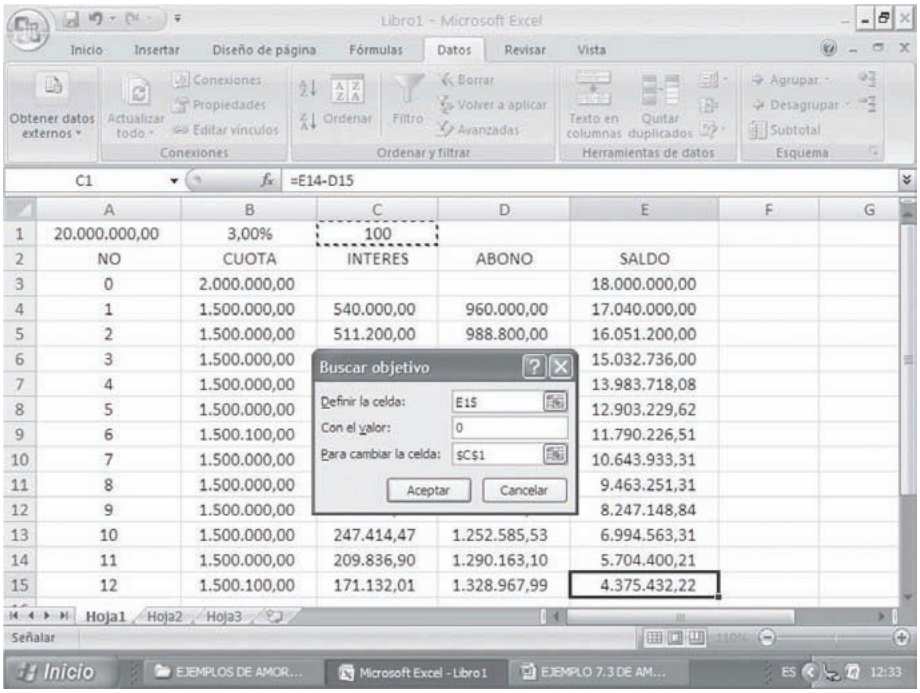
Figura 7.3

	A	B	C	D	E
1	20.000.000	3.0%	100		
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0	2.000.000			=A1−B3
4	1	1.500.000	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
9	6	=B8+C1			
10	7	=B8			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12	=B14+C1			

En la celda A1 escribimos el valor del vehículo, en la B1 la tasa de interés y en la C1 un valor arbitrario de 100 que representa la cuota extraordinaria. En la celda B3 registramos la cuota inicial y en E3 calculamos el saldo insoluto. En la celda B4 escribimos la cuota de $ 1.500.000 y copiamos B4 hasta B8. En la celda B9 calculamos la sexta cuota que es igual a la cuota normal de $ 1.500.000 (B8) más la cuota extraordinaria (C1). En la celda B10 registramos la cuota normal de pago y copiamos B10 hasta B14. La cuota 12 la calculamos sumándole a la cuota anterior (B14) la cuota extraordinaria (C1). En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, abono a capital y saldo insoluto. (Ver figura 7.3).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E15 y aplicando *Buscar objetivo* encontramos en la celda C1 un valor de $ 1.994.324.21 que corresponde al valor de las cuotas extraordinarias. En los meses 6 y 12, además de la cuota normal de $ 1.500.000 se paga la cuota extraordinaria, para una cuota total de $ 3.494.324.21. (Ver figura 7.4).

Figura 7.4



	A	B	C	D	E
1	20.000.000,00	3,00%	100		
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	2.000.000,00			18.000.000,00
4	1	1.500.000,00	540.000,00	960.000,00	17.040.000,00
5	2	1.500.000,00	511.200,00	988.800,00	16.051.200,00
6	3	1.500.000,00			15.032.736,00
7	4	1.500.000,00			13.983.718,08
8	5	1.500.000,00			12.903.229,62
9	6	1.500.100,00			11.790.226,51
10	7	1.500.000,00			10.643.933,31
11	8	1.500.000,00			9.463.251,31
12	9	1.500.000,00			8.247.148,84
13	10	1.500.000,00	247.414,47	1.252.585,53	6.994.563,31
14	11	1.500.000,00	209.836,90	1.290.163,10	5.704.400,21
15	12	1.500.100,00	171.132,01	1.328.967,99	4.375.432,22

2.4 Sistema de cuota fija con período de gracia

El período de gracia o tiempo muerto es un período en el cual no hay amortización de capital, pero si hay causación de intereses. Si los intereses se pagan periódicamente, el capital inicial permanece constante y sobre éste mismo se calculan las cuotas. Si los intereses causados no se pagan, estos se capitalizan y la deuda habrá aumentado al final del período de gracia y sobre este nuevo capital se calculan las cuotas de amortización.

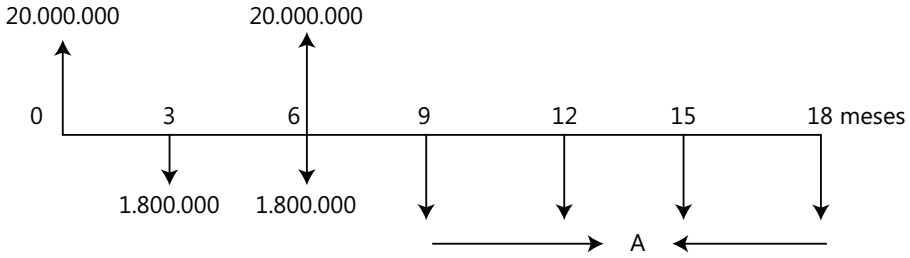
Ejemplo 7.4

Una deuda de $ 20.000.000 se va a cancelar con 4 pagos trimestrales iguales, a una tasa de interés del 9% trimestral, con un período de gracia de 6 meses. Calcular el valor de las cuotas trimestrales y construir la tabla de amortización, suponiendo:

a. Durante el período de gracia los intereses causados se pagan periódicamente

b. Los intereses causados durante el período de gracia se capitalizan.

Primer caso: los intereses se pagan periódicamente. En este caso, cada trimestre se deben pagar los intereses causados por la obligación inicial a la tasa de interés pactada. Como los intereses se pagan, el capital inicial no cambia.



El valor de los intereses pagados durante el período de gracia es igual a:

$$I = P \times i$$

$$I = 20.000.000 \times 0.09$$

$$I = \$\ 1.800.000 \text{ trimestrales}$$

Calculamos el valor de la cuota trimestral (A):

$$A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$A = 20.000.000\left[\frac{0.09(1+0.09)^4}{(1+0.09)^4 - 1}\right]$$

$$A = \$\ 6.173.373.24$$

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

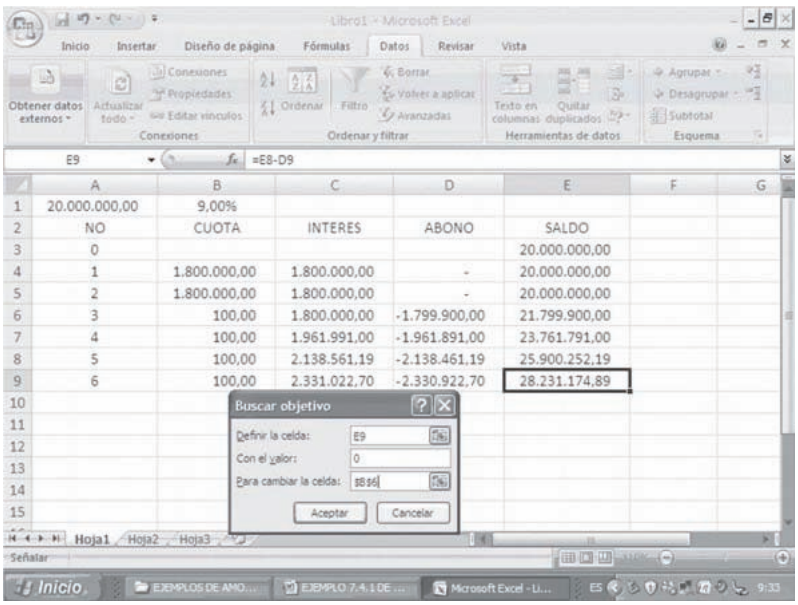
Figura 7.5

	A	B	C	D	E
1	20.000.000	9.0%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	=C4	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=C4			
6	3	100			
7	4	=B6			
8	5				
9	6				

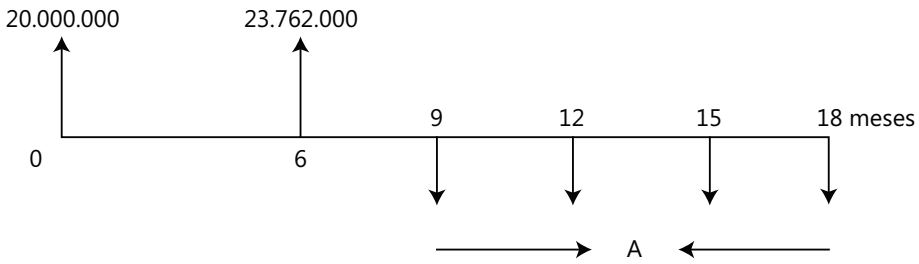
En la celda A1 escribimos el valor de la deuda y en la B1la tasa de interés. Durante el período de gracia se paga solamente el valor de los intereses, de tal forma que en las celdas B4 y B5, como valor de la cuota, debe aparecer el valor de los intereses. En la celda B6 escribimos un valor arbitrario de 100 y en la celda B7 calculamos la segunda cuota que es igual a la primera, y copiamos B7 hasta B9. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, abono a capital y saldo insoluto. (Ver figura 7.5).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E9 y aplicando *Buscar objetivo* encontramos en la celda B6 un valor de $ 6.173.373.24 que corresponde al valor de las cuotas trimestrales. (Ver figura 7.6).

Figura 7.6



Segundo caso: los intereses causados periódicamente se capitalizan. Este caso despierta confusión entre los usuarios de un préstamo, porque al no hacer el pago periódico de cuotas durante el período de gracia creen que siempre están debiendo el capital inicial. En verdad, al no pagar los intereses durante el período de gracia, estos se capitalizan aumentando nominalmente el valor del préstamo sobre el cual se hará el cálculo de las cuotas periódicas. Los economistas dicen que *no hay almuerzo gratis*. Aquí aplica esa cita. Es absurdo, siquiera, pensar que una entidad financiera preste un dinero, cuyo poder adquisitivo se va deteriorando con el transcurso del tiempo y al final de algún período se le deba el mismo valor nominal.



Los intereses causados durante el período de gracia se capitalizan de tal forma que, al final del mes 6 el capital inicial se ha transformado en $ 23.762.000.

$$F = P(1 + i)^n$$

$$F = 20.000.000(1 + 0.09)^2$$

$$F = \$\ 23.762.000$$

Con este nuevo capital calculamos el valor de cada una de las cuotas trimestrales.

$$A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$A = 23.762.000\left[\frac{0.09(1+0.09)^4}{(1+0.09)^4 - 1}\right]$$

$$A = \$\ 7.334.584.75$$

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

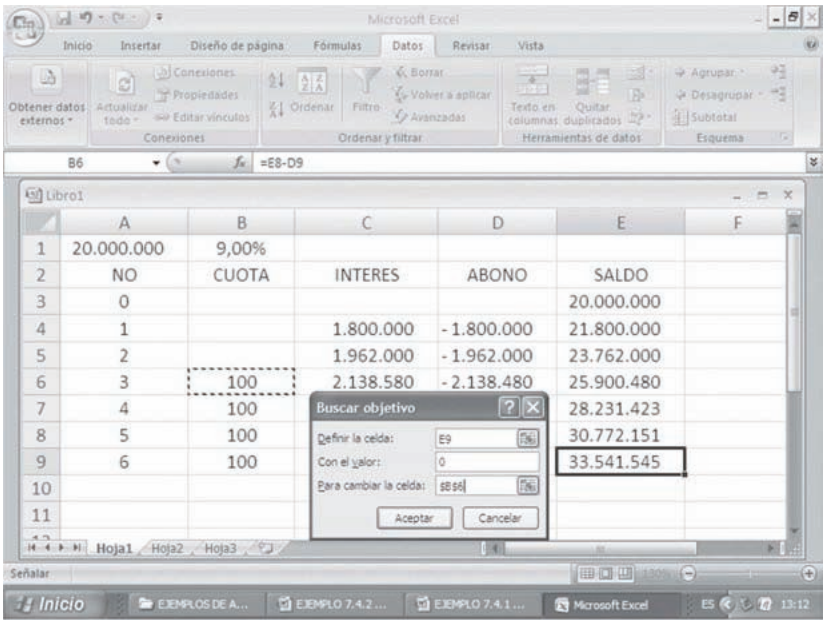
Figura 7.7

	A	B	C	D	E
1	20.000.000	9.0%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	0	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	0			
6	3	100			
7	4	=B6			
8	5				
9	6				

En la celda A1 escribimos el valor de la deuda y en la B1 la tasa de interés. En las celdas B4 y B5 escribimos cero, para indicar que en estos períodos no hay pago de intereses ni de capital. En la celda B6 escribimos un valor arbitrario de 100 y en la B7 calculamos la segunda cuota que es igual a la primera, y copiamos B7 hasta B9. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos los intereses, abono a capital y saldo insoluto. (Ver figura 7.7).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E9 y aplicando *Buscar objetivo* encontramos en la celda B6 un valor de $ 7.334.584.75 que corresponde al valor de las cuotas trimestrales. (Ver figura 7.8).

Figura 7.8



2.5 Sistema de abono constante a capital

Este es uno de los sistemas de amortización utilizados por los bancos para sus créditos ordinarios y de consumo, como también para la amortización de los créditos de vivienda. Aunque los intereses pueden ser cobrados en forma vencida o anticipada, la amortización al capital es constante, es decir, cada período se abona al capital una cantidad constante igual al monto del préstamo dividido entre el número de períodos de pago.

Con un mismo ejemplo, analizaremos los dos casos que se presentan con relación al pago de intereses, es decir, cuando los intereses se pagan en forma vencida y en forma anticipada.

Con intereses vencidos

Ejemplo 7.5

El Banco Ganadero concede un crédito por valor de $ 100.000.000 a una tasa de interés del 36% trimestre vencido, con un plazo de 1 año. La restitución del capital se hará en 4 cuotas trimestrales iguales. Calcular el valor de las cuotas y construir la tabla de amortización.

- La cuota de amortización a capital es igual a:

$$\text{Cuota} = \frac{P}{n} = \frac{100.000.000}{4} = \$\ 25.000.000$$

Este es el valor que se le paga al banco cada trimestre como abono al capital

- Dividimos la tasa nominal del préstamo para conocer la tasa efectiva periódica.

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.36}{4} = 0.09 = 9\% \text{ trimestral}$$

- La primera cuota es igual:

$$C_1 = \frac{P}{n} + Pi$$

$$C_1 = 25.000.000 + 100.000.000 \times 0.09$$

$$C_1 = \$\ 34.000.000$$

- La segunda cuota es igual:

$$C_2 = \frac{P}{n} + \left[P - \frac{P}{n}\right] i$$

$$C_2 = \frac{P}{n} + Pi\left[1 - \frac{1}{n}\right]$$

$$C_2 = 25.000.000 + 100.000.000 \times 0.09\left[1 - \frac{1}{4}\right]$$

$$C_2 = \$\ 31.750.000$$

- La tercera cuota es igual:

$$C_3 = \frac{P}{n} + \left[P - \frac{2P}{n}\right] i$$

$$C_3 = \frac{P}{n} + Pi\left[1 - \frac{2}{n}\right]$$

$$C_3 = 25.000.000 + 100.000.000 \times 0.09\left[1 - \frac{2}{4}\right]$$

$$C_3 = \$\ 29.500.000$$

- La cuarta cuota es:

$$C_4 = \frac{P}{n} + \left[P - \frac{3P}{n}\right] i$$

$$C_4 = \frac{P}{n} + Pi\left[1 - \frac{3}{n}\right]$$

$$C_4 = 25.000.000 + 100.000.000 \times 0.09\left[1 - \frac{3}{4}\right]$$

$$C_4 = \$\ 27.250.000$$

Apoyados en la forma de cálculo de cada una de las cuotas, podemos diseñar una expresión general, así:

$$C_K = \frac{P}{n} + Pi\left[1 - \frac{(K-1)}{n}\right] \qquad (7.1)$$

Registramos la expresión (7.1) en el menú RESOL:

CUOTABONOCONSTANTE: CK = (P/N) + P × *i* × (1 − (K − 1)/N)

Procedimiento con la calculadora financiera Hewlett Packard 17 y 19 B II

- Oprima RESOL
- Localice la fórmula CUOTABONOCONSTANTE
- Oprima CALC
- Ingrese 100.000.000 P
- Ingrese 4 N
- Ingrese 0.09 I
- Ingrese 1K
- Oprima CK y obtiene un valor de 34.000.000
- Ingrese 2 K

- Oprima CK y obtiene un valor de 31.750.000
- Ingrese 3 K
- Oprima CK y obtiene un valor de 29.500.000
- Ingrese 4 K
- Oprima CK y obtiene un valor de 27.250.000

La primera parte de la expresión (7.1) corresponde al valor de amortización del capital y la segunda parte al valor de los intereses, por lo tanto, el valor de los intereses de cada cuota, para un préstamo con n cuotas de amortización, viene dado por la siguiente expresión.

$$IK = Pi\left[1 - \frac{(K-1)}{n}\right] \tag{7.2}$$

Registramos la expresión (7.2) en el menú RESOL de la calculadora financiera.

INTERESABONOCONSTANTE: $IK = P \times i \times (1 \times (K - 1)/N)$

Ejemplo 7.6

Para el ejemplo 7.5, calcular el valor de los intereses de cada cuota, utilizando la calculadora financiera.

Los intereses pagados por un crédito son deducibles de impuestos en un 100%, razón por la cual es importante conocer de la cuota que se paga periódicamente, cuál es la parte que corresponde a los intereses. Este cálculo se realiza aplicando la fórmula (7.2) o directamente utilizando el menú RESOL, como se propone en este ejercicio.

Procedimiento con la calculadora financiera Hewlett Packard 17 y 19 B II

- Oprima RESOL
- Localice la fórmula INTERESABONOCONSTANTE
- Oprima CALC
- Ingrese 100.000.000 P
- Ingrese 0.09 I
- Ingrese 4 N
- Ingrese 1 K
- Oprima IK y obtiene un valor de 9.000.000 que son los intereses de la primera cuota
- Ingrese 2 K
- Oprima IK y obtiene un valor de 6.750.000 que son los intereses de la segunda cuota
- Ingrese 3 K
- Oprima IK y obtiene un valor de 4.500.000 que son los intereses de la tercera cuota
- Ingrese 4 K
- Oprima IK y obtiene un valor de 2.250.000 que son los intereses de la cuarta cuota.

Por razones expuestas anteriormente, es importante conocer el saldo de la deuda después de pagada cualquier cuota. Nos apoyamos en el ejercicio y con el siguiente análisis lograremos diseñar una expresión para el cálculo del saldo en cualquier momento.

$$S_1 = P - \frac{P}{4}$$

$$S_2 = P - \frac{2P}{4}$$

$$S_3 = P - \frac{3P}{4}$$

$$S_4 = P - \frac{4P}{4}$$

Para un préstamo con *n* cuotas de amortización:

Siendo: S = saldo de la deuda

K = número de cuota

P = valor del préstamo

n = número de cuotas de amortización

$$SK = P - \frac{KP}{n} \tag{7.3}$$

La fórmula (7.3) se registra en el menú RESOL de la calculadora financiera, de la siguiente forma:

SALDOABONOCONSTANTE:SK = P − K × P/*n*

Para el ejercicio 7.5, calcular el saldo después de pagada cada una de las cuotas.

$$S_1 = 100.000.000 - 1 \times \frac{100.000.000}{4} \qquad S_1 = \$\ 75.000.000$$

$$S_2 = 100.000.000 - 2 \times \frac{100.000.000}{4} \qquad S_2 = \$\ 50.000.000$$

$$S_3 = 100.000.000 - 3 \times \frac{100.000.000}{4} \qquad S_3 = \$\ 25.000.000$$

$$S_4 = 100.000.000 - 4 \times \frac{100.000.000}{4} \qquad S_4 = 0$$

Procedimiento con la calculadora financiera Hewlett Packard 17 y 19 B II

- Oprima RESOL
- Localice la fórmula SALDOABONOCONSTANTE
- Oprima CALC

- Ingrese 100.000.000 P
- Ingrese 4 N
- Ingrese 1 K
- Oprima SK y obtiene un valor de 75.000.000
- Ingrese 2 K
- Oprima SK y obtiene un valor de 50.000.000
- Ingrese 3 K
- Oprima CK y obtiene un valor de 25.000.000
- Ingrese 4 K
- Oprima CK y obtiene un valor de 0

Solución con la hoja de cálculo Excel

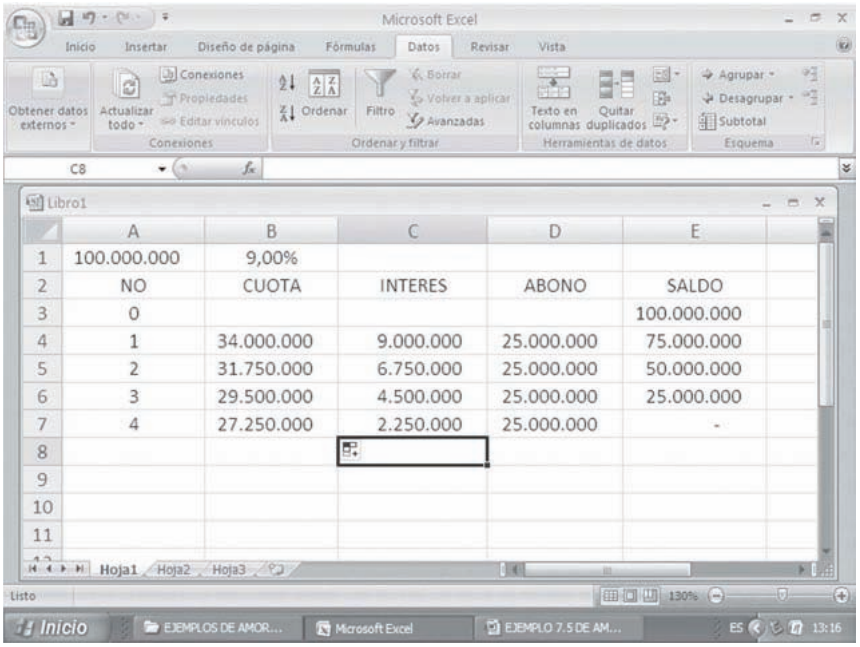
Figura 7.9

	A	B	C	D	E
1	100.000.000	36%/4			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	=C4+D4	=E3*$B$1	=$E$3/4	=E3−D4
.....	.....	.....	.....	.....	.....
7	4	=C7+D7			

En la celda A1 escribimos el valor del préstamo y en la B1 la tasa de interés. En la celda D4 calculamos el valor del abono constante a capital, dividiendo el valor del préstamo (E3) entre el número de cuotas (4) y copiamos hasta D7. En la celda C4 calculamos los intereses y en la B4 el valor de la cuota sumando intereses (C4) más abono a capital (D4). (Ver figura 7.9).

Copiamos las fórmulas de las celdas B4, C4, D4 y E4 en el rango B5:E7 y obtenemos en la columna B (celdas B4, B5….B7) el valor de las cuotas. (Ver figura 7.10).

Figura 7.10



	A	B	C	D	E
1	100.000.000	9,00%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				100.000.000
4	1	34.000.000	9.000.000	25.000.000	75.000.000
5	2	31.750.000	6.750.000	25.000.000	50.000.000
6	3	29.500.000	4.500.000	25.000.000	25.000.000
7	4	27.250.000	2.250.000	25.000.000	-
8					
9					
10					
11					

Con intereses anticipados

Ejemplo 7.7

Con los datos del ejemplo 7.5, calcular el valor de las cuotas, valor de intereses y construir la tabla de amortización, pero asumiendo una tasa del 36% trimestre anticipado.

Este es el caso utilizado con mayor frecuencia por los bancos para amortizar los créditos a corto plazo. La amortización del capital se hace con cuotas constantes pagaderas al final del período, pero los intereses son cobrados en forma anticipada.

- Dividimos la tasa nominal.

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.36}{4} = 9\% \text{ trimestral anticipada}$$

- En el momento de hacer el desembolso del préstamo, momento 0, se cobran los intereses, cuyo valor es:

$$I = Pi = 100.000.000 \times 0.09 = \$\ 9.000.000$$

Puesto que en este momento no hay abono al capital, el valor de la cuota es el mismo valor de los intereses.

- Al final del primer trimestre, el valor de la cuota será igual al abono constante más los intereses anticipados del saldo del préstamo en ese momento.

$$C_1 = \frac{P}{n} + \left[P - \frac{P}{n}\right] i$$

$$C_1 = \frac{P}{n} + Pi\left[1 - \frac{1}{n}\right]$$

$$C_1 = 25.000.000 + 100.000.000 \times 0.09\left[1 - \frac{1}{4}\right]$$

$$C_1 = \$\ 31.750.000$$

- El valor de la cuota al final del segundo trimestre será igual a:

$$C_2 = \frac{P}{n} + Pi\left[1 - \frac{2}{n}\right]$$

$$C_2 = 25.000.000 + 100.000.000 \times 0.09\left[1 - \frac{2}{4}\right]$$

$$C_2 = \$\ 29.500.000$$

- El valor de la cuota al final del tercer trimestre será igual a:

$$C_3 = \frac{P}{n} + Pi\left[1 - \frac{3}{n}\right]$$

$$C_3 = 25.000.000 + 100.000.000 \times 0.09\left[1 - \frac{3}{4}\right]$$

$$C_3 = \$\ 27.250.000$$

- El valor de la cuarta cuota será igual al abono al capital.

$$C_4 = \$\ 25.000.000$$

- Generalizando para cualquier número de cuotas de amortización y con base en el análisis del ejercicio, el valor de cualquier cuota será igual a:

$$CK = \frac{P}{n} + Pi\left[1 - \frac{K}{n}\right] \tag{7.4}$$

En el menú RESOL, registramos la fórmula (7.4) de la siguiente manera:

CUOTABONOCONSTANTEANTICIPADO: CK = (P/N) + P × *i* × (1 − (K/N))

Procedimiento con la calculadora Hewlett Packard 17 y 19 B II

- Oprima RESOL
- Localice la fórmula CUOTABONOCONSTANTEANTICIPADA
- Oprima CAL
- Ingrese 100.000.000 P

- Ingrese 4 N
- Ingrese 0.09 I
- Ingrese 1 K
- Oprima CK y obtiene un valor de 31.750.000
- Ingrese 2 K
- Oprima CK y obtiene un valor de 29.500.000
- Ingrese 3 K
- Oprima CK y obtiene un valor de 27.250.000
- Ingrese 4 K
- Oprima CK y obtiene un valor de 25.000.000

El valor de los intereses de cada cuota, para cualquier préstamo con *n* cuotas de amortización, es:

$$IK = Pi\left[1 - \frac{K}{n}\right] \tag{7.5}$$

En el menú RESOL, registramos la expresión (7.5) de la siguiente forma:

INTERESABONOCONSTANTEANT: IK = P × *i* × (1 − (K/N))

Procedimiento con la calculadora Hewlett Packard 17 y 19 B II

- Oprima RESOL
- Localice la fórmula INTERESABONOCONSTANTEANT
- Oprima CALC
- Ingrese 100.000.000 P
- Ingrese 0.09 I
- Ingrese 4 N
- Ingrese 0 K
- Oprima IK y obtiene un valor de 9.000.000, que corresponde a los intereses anticipados cobrados en el momento del desembolso del préstamo.
- Ingrese 1 K
- Oprima IK y obtiene un valor de 6.750.000 que son los intereses pagados al final del primer trimestre como parte de $C_1 = 31.750.000$
- Ingrese 2 K
- Oprima IK y obtiene un valor de 4.500.000 que corresponden a los intereses pagados al final del segundo trimestre como parte de $C_2 = 29.500.000$
- Ingrese 3 K
- Oprima IK y obtiene un valor de 2.250.000 que son los intereses pagados al final del tercer trimestre como parte de $C_3 = 27.250.000$
- Ingrese 4 K
- Oprima IK y obtiene un valor de 0, porque la cuarta cuota sólo tiene abono al capital de 25.000.000

El procedimiento de cálculo de saldos, cuando el préstamo se hace con una tasa de interés anticipada, es similar al procedimiento utilizado en el ejercicio 7.5, porque el cobro de la tasa de interés no afecta la forma de abono al capital principal.

Solución con la hoja de cálculo Excel

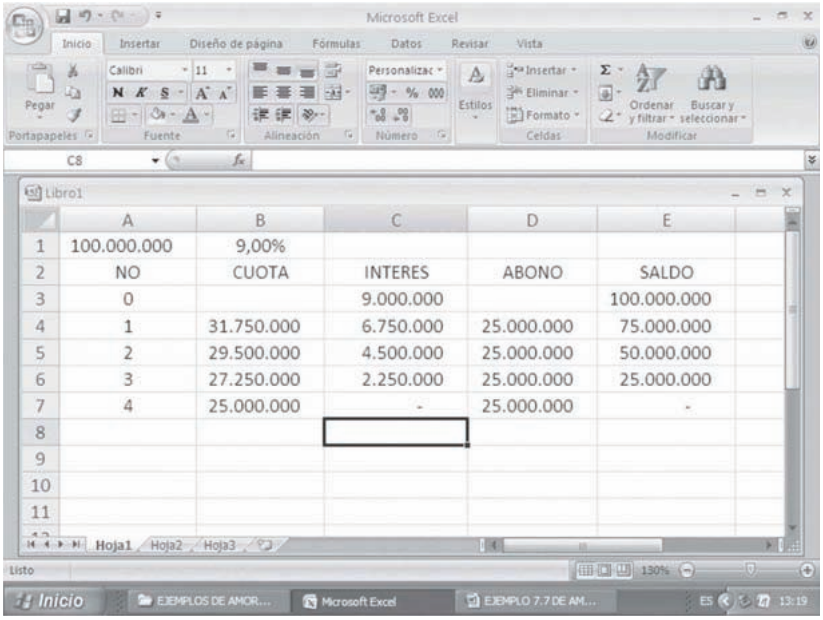
Figura 7.11

	A	B	C	D	E
1	100.000.000	36%/4			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0		=E3*$B$1	0	=A1
4	1	=C4+D4	=E4*$B$1	=$E$3/4	=E3−D4
.....	.....	.....	.....	.....	.....
7	4	=C7+D7			

En la celda A1 escribimos el valor del préstamo y en la B1 la tasa de interés. En la celda D4 calculamos el valor del abono constante a capital, dividiendo el valor del préstamo (E3) entre el número de cuotas (4) y copiamos D4 hasta D7. En la celda C3 calculamos los intereses anticipados del primer trimestre. En la celda C4 calculamos los intereses anticipados del segundo trimestre y en la B4 el valor de la cuota sumando intereses (C4) más abono a capital (D4). (Ver figura 7.11).

Copiamos las fórmulas de las celdas B4, C4, D4 y E4 en el rango B5:E7 y obtenemos en la columna B (celdas B4, B5....B7) el valor de las cuotas. (Ver figura 7.12).

Figura 7.12



2.6 Sistema de cuota fija con interés global

Este sistema de pagos ya fue analizado ampliamente en el capítulo de anualidades, en el acápite 5. Se mencionó que su principal defecto está en que a pesar que en cada pago periódico se abonaba una porción al capital, los intereses se seguían cobrando sobre el capital prestado inicialmente. Ahora es importante diseñar la tabla de amortización para observar el comportamiento del crédito.

Ejemplo 7.8

Se propone prestar $ 10.000.000 para cancelarlos por medio de 4 cuotas trimestrales iguales con interés global del 6% trimestral. Calcular el valor de las cuotas y diseñar la tabla de amortización.

El valor de las cuotas trimestrales viene dado por la siguiente expresión:

$$A = \frac{P}{n} + Pi = \frac{10.000.000}{4} + 10.000.000 \times 0.06$$

$$A = \$\ 3.100.000$$

Solución con la hoja de cálculo Excel

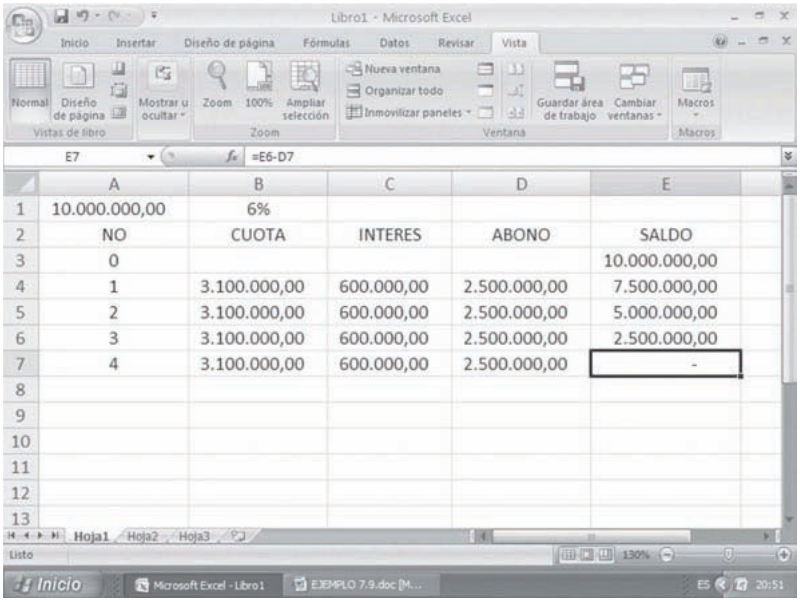
Figura 7.13

	A	B	C	D	E
1	100.000.000	6%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	=C4+D4	=$E$3*$B$1	=$E$3/4	=E3−D4
.....	.....	.....	.....	.....	.....
7	4	=C7+D7			

En la celda A1 escribimos el valor del préstamo y en la B1 la tasa de interés. En la celda D4 calculamos el valor del abono constante a capital, dividiendo el valor del préstamo (E3) entre el número de cuotas (4) y copiamos D4 hasta D7. En la celda C4 calculamos los intereses (para cada período se calculan sobre el capital inicial) y en la B4 el valor de la cuota sumando intereses (C4) más abono a capital (D4). (Ver figura 7.13).

Copiamos las fórmulas de las celdas B4, C4, D4 y E4 en el rango B5:E7 y obtenemos en la columna B (celdas B4, B5....B7) el valor de las cuotas. (Ver figura 7.14).

Figura 7.14



	A	B	C	D	E
1	10.000.000,00	6%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				10.000.000,00
4	1	3.100.000,00	600.000,00	2.500.000,00	7.500.000,00
5	2	3.100.000,00	600.000,00	2.500.000,00	5.000.000,00
6	3	3.100.000,00	600.000,00	2.500.000,00	2.500.000,00
7	4	3.100.000,00	600.000,00	2.500.000,00	-
8					
9					
10					
11					
12					
13					

Nótese que los intereses tienen el mismo valor, calculado sobre el capital prestado, a pesar que en cada período se abonan al capital $ 2.500.000.

A continuación se presenta la relación existente entre los sistemas de amortización: Cuota fija, interés global y abono constante a capital.

	Cuota fija	**Interés global**	**Abono constante a capital**
Cuota	Igual	Igual	Decreciente
Intereses	Sobre saldos	Sobre capital inicial	Sobre saldos
Abono a capital	Variable	Constante	Constante

2.7 Sistema de cuotas crecientes en forma lineal

Hace referencia al sistema de un gradiente lineal creciente, en el que las cuotas aumentan cada período en una cantidad fija. Este sistema de amortización de créditos no es muy común en nuestro país, posiblemente debido a la falta de cultura financiera. En general, los sistemas de cuotas crecientes no tienen aceptación entre los colombianos, que más bien los miran como sistemas usurarios.

Ejemplo 7.9

Una deuda por valor de $ 10.000.000 a una tasa del 2.5% mensual, se va a cancelar con 6 cuotas mensuales que crecen $ 10.000 cada mes. Calcular el valor de las cuotas y diseñar la tabla de amortización.

Recordemos que el sistema de gradientes está en función de la primera cuota. Para calcularla recurrimos a la expresión (6.1).

$$10.000.000 = A\left[\frac{(1.025)^6 - 1}{0.025(1.025)^6}\right] + \frac{10.000}{0.025}\left[\frac{(1.025)^6 - 1}{0.025(1.025)^6} - \frac{6}{(1.025)^6}\right]$$

$$A = \$\ 1.791.219.64$$

Este valor corresponde a la primera cuota. Las cuotas restantes se calculan aplicando la expresión (6.1).

$$C2 = 1.791.219.64 + (2 - 1)10.000$$

$$C2 = \$\ 1.801.219.64$$

$$C3 = \$\ 1.811.219.64$$

$$C4 = \$\ 1.821.219.64$$

$$C5 = \$\ 1.831.219.64$$

$$C6 = \$\ 1.841.219.64$$

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

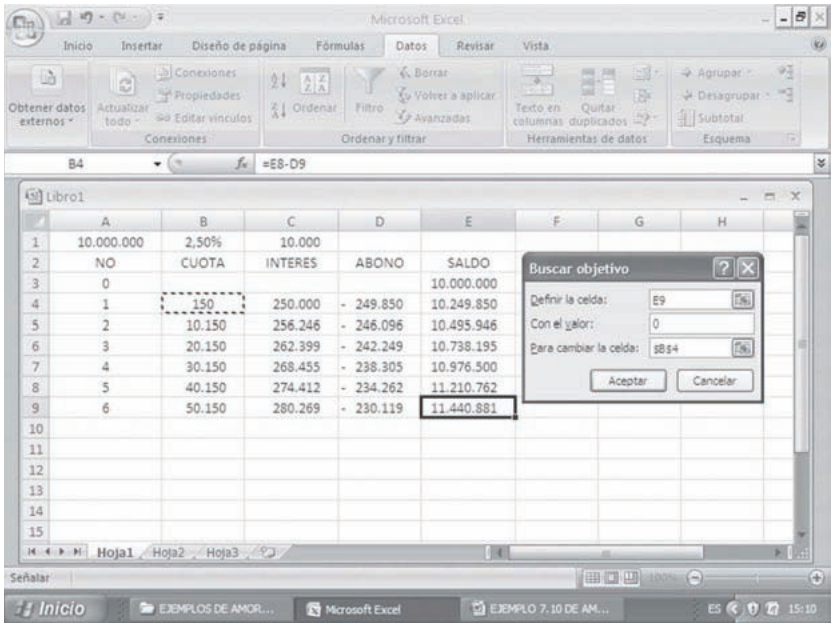
Figura 7.15

	A	B	C	D	E
1	10.000.000	2.5%	10.000		
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	150	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4+$C$1			
6	.....	.....	.....	.....	.....
9	6				

En la celda A1 escribimos 10.000.000, en la B1 2.5%, que es la tasa de interés y en la C1 escribimos 10.000 que es el aumento mensual de las cuotas. En la celda B4 escribimos un valor arbitrario de 150 y en la B5 calculamos la segunda cuota que es igual a la primera (B4) incrementada en $ 10.000 (C1). Copiamos la celda B5 hasta la celda B9. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo insoluto. (Ver figura 7.15).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E9 y aplicando *Buscar objetivo* encontramos en la celda B4 un valor de $ 1.791.219.64 y en las celdas B5 hasta B9 el valor de las cuotas subsiguientes. (Ver figura 7.16).

Figura 7.16



	A	B	C	D	E
1	10.000.000	2,50%	10.000		
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				10.000.000
4	1	150	250.000	- 249.850	10.249.850
5	2	10.150	256.246	- 246.096	10.495.946
6	3	20.150	262.399	- 242.249	10.738.195
7	4	30.150	268.455	- 238.305	10.976.500
8	5	40.150	274.412	- 234.262	11.210.762
9	6	50.150	280.269	- 230.119	11.440.881

Observamos que las cuotas crecen cada mes en $ 10.000 y que el saldo de la deuda baja desde el pago de la primera cuota. El comportamiento del saldo no siempre es así. Antes por el contrario, este sistema de cuotas crecientes se utiliza para la amortización de créditos a largo plazo en los que el saldo de la obligación comienza a crecer, a pesar de que las cuotas aumentan cada mes. Esto es precisamente lo que despierta confusión entre los usuarios de los créditos. El cliente se pregunta: Si cada mes pago $ 10.000 más, ¿por qué aumenta, al mismo tiempo, el saldo de la deuda? Para resolver esta inquietud, aumentemos el plazo del crédito, por ejemplo, a 60 meses?

$$10.000.000 = A\left[\frac{(1.025)^{60}-1}{0.025(1.025)^{60}}\right] + \frac{10.000}{0.025}\left[\frac{(1.025)^{60}-1}{0.025(1.025)^{60}} - \frac{120}{(1.025)^{60}}\right]$$

$$A = \$\ 100.015.46$$

Resuelva el lector este caso utilizando *Buscar objetivo* de Excel

El cliente comienza pagando una cuota por valor de $ 100.015.46, que ni siquiera cubre el valor de los intereses ($ 250.000). En consecuencia, el saldo de la deuda empieza a crecer debido a la capitalización de los intereses dejados de pagar, hasta el momento en que la cuota haya subido a un valor que sobrepase el costo financiero y el saldo comience a bajar hasta llegar a cero. Miremos la tabla de amortización para las 10 primeras cuotas.

No.	Cuota	Interés	Amortización	Saldo
0				10.000.000.00
1	100.015.46	250.000.00	(149.984.54)	10.149.984.54
2	110.015.46	253.749.61	(143.734.15)	10.293.718.69
3	120.015.46	257.342.97	(137.327.51)	10.431.046.20
4	130.015.46	260.776.15	(130.769.69)	10.561.806.89
5	140.015.46	264.045.17	(124.029.71)	10.685.836.60
6	150.015.46	267.145.91	(117.130.45)	10.802.967.05
7	160.015.46	270.074.18	(110.058.72)	10.913.025.77
8	170.015.46	272.825.64	(102.810.18)	11.015.835.95
9	180.015.46	275.395.90	(95.380.44)	11.111.216.39
10	190.015.46	277.780.41	(87.764.95)	11.198.981.34

El saldo de la deuda comienza a crecer y surge nuevamente una preocupación para el cliente: Si cada vez pago más y la deuda en lugar de bajar, crece cada mes; ¿cuándo termino de pagar la deuda? En el plazo pactado, 60 meses en este caso. Las fórmulas matemáticas diseñadas para calcular las cuotas tienen en cuenta este hecho. Cuando se presenta la tercera situación analizada en la sección 2, es decir, cuando el valor de las cuotas no cubre el costo financiero se produce la capitalización de intereses. Además, como notamos en este ejercicio, este hecho se produjo al aumentar el plazo del crédito. Podemos concluir, que en los sistemas de pagos con cuotas crecientes no siempre hay capitalización de intereses, sino que esta es función del plazo del crédito y del gradiente (variación de las cuotas). En este ejercicio, para plazos mayores a 38 meses hay capitalización de intereses. Si las cuotas aumentaran $ 20.000 en lugar de $ 10.000, habría capitalización de intereses para un plazo mayor a 28 meses. Para plazos menores, desde el pago de la primera cuota hay amortización al capital y, por consiguiente, el saldo comienza a bajar hasta llegar a cero. A continuación, en la sección 2.8, se desarrolla un ejemplo similar, pero asumiendo un incremento porcentual en las cuotas, con el ánimo de darle al lector una visión más amplia sobre este tema tan controvertido.

2.8 Sistema de cuotas crecientes en forma geométrica

Hace referencia al sistema de un gradiente geométrico creciente, ampliamente analizado en la sección 5, cap. 6, y que corresponde a una serie de cuotas periódicas que aumentan en un porcentaje fijo. Las cuotas crecen cada período en progresión geométrica o exponencial. Cuando el plazo del crédito es muy largo, las primeras cuotas son bajas en comparación con el costo financiero lo que implica la capitalización de intereses. En comparación con el sistema de cuotas crecientes en forma lineal, éste último tuvo mayor aplicación en el sistema de vivienda UPAC como sistema de amortización de los créditos de vivienda.

Ejemplo 7.10

Construya la tabla de amortización que muestre el comportamiento de un crédito por valor de $ 5.000.000 financiado a una tasa de interés del 2.0% mensual, por medio de 8 cuotas mensuales que crecen un 1.0% cada mes.

Es necesario, en primer lugar, calcular el valor de la primera cuota del sistema de pagos. Reconoce el lector que se hace referencia a la primera cuota de un gradiente geométrico creciente.

$$P = A\left[\frac{(1+J)^n - (1+i)^n}{(J-i)(1+i)^n}\right]$$

$$5.000.000 = A\left[\frac{(1.01)^8 - (1.02)^8}{(0.01-0.02)(1.02)^8}\right]$$

$$A = \$\ 659.698.24$$

El valor de las cuotas restantes se calcula aplicando un incremento del 1.0% sobre la cuota anterior. O, simplemente con la fórmula (6.9):

$$Cn = A\ (1 + J)^{n-1}$$

$$C2 = 659.698.24(1 + 0.01)^{2-1} = \$\ 666.295.22$$

$$C3 = \$\ 672.958.17$$

$$C4 = \$\ 679.687.76$$

$$C5 = \$\ 686.484.63$$

$$C6 = \$\ 693.349.48$$

$$C7 = \$\ 700.282.97$$

$$C8 = \$\ 707.285.80$$

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

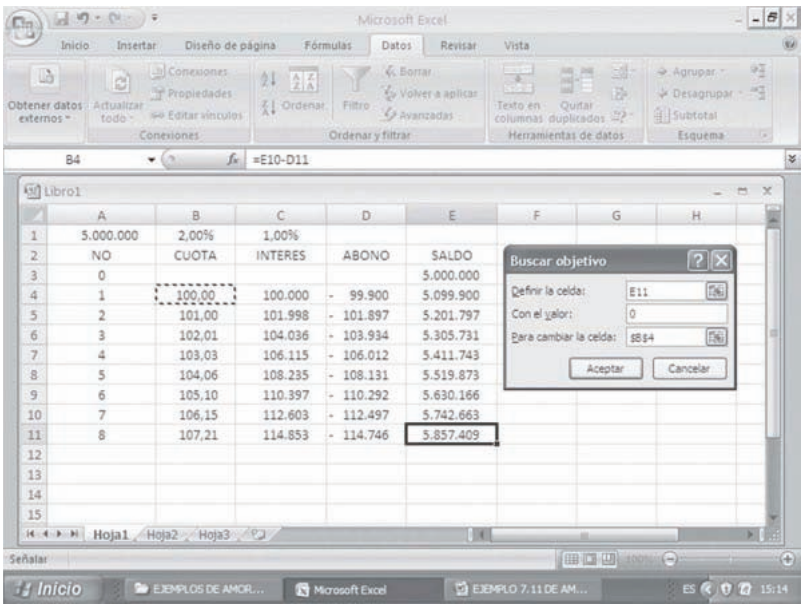
Figura 7.17

	A	B	C	D	E
1	5.000.000	2.00%	1.00%		
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	100	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4*(1+$C$1)			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
11	8				

A la celda A1 le asignamos el valor del crédito, a la B1 la tasa de interés y a la C1 la tasa de incremento de las cuotas mensuales. En la celda B4 escribimos un valor arbitrario de 100 y en la B5 calculamos la segunda cuota que es igual a la primera (B4) incrementada en un 2,00% (C1). Copiamos la celda B5 hasta B11. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y el saldo. (Ver figura 7.17).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E11 y aplicando *Buscar objetivo* obtenemos en B4 un valor de $ 659.698.24. (Ver figura 7.18).

Figura 7.18



	A	B	C	D	E
1	5.000.000	2,00%	1,00%		
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				5.000.000
4	1	100,00	100.000	- 99.900	5.099.900
5	2	101,00	101.998	- 101.897	5.201.797
6	3	102,01	104.036	- 103.934	5.305.731
7	4	103,03	106.115	- 106.012	5.411.743
8	5	104,06	108.235	- 108.131	5.519.873
9	6	105,10	110.397	- 110.292	5.630.166
10	7	106,15	112.603	- 112.497	5.742.663
11	8	107,21	114.853	- 114.746	5.857.409

Las cuotas se incrementan en un 1.0% cada mes y el saldo de la deuda baja desde el pago de la primera cuota, lo que indica que no hay capitalización de intereses. Lo mismo que en el sistema de amortización con cuotas crecientes en forma lineal, explicado en la sección anterior, al aumentar el número de cuotas de amortización se puede presentar la capitalización de intereses. Por ejemplo, para este caso en particular, para un plazo de 71 meses, la primera cuota tendría un valor de $ 99.369.44 que es inferior al costo financiero ($100.000) y, por lo tanto, el saldo de la deuda aumenta por la capitalización de los intereses.

2.9 Amortización con cuotas mensuales fijas, crecientes anualmente en un porcentaje fijo

Hace referencia al gradiente escalonado o en escalera, analizado en el acápite 6, cap. 6. Es un sistema de amortización mixto compuesto por una anualidad (cuotas fijas mensuales) y un gradiente geométrico creciente (cuotas que aumentan en un porcentaje fijo cada año). Para el autor, si no existiera la prohibición de la capitalización de intereses en los créditos de vivienda, este sistema sería el ideal para los empleados remunerados

con un salario fijo. Las entidades financieras establecen una relación cuota ingreso cuando se analiza la posibilidad de conceder un crédito de vivienda. Se estima que el empleado debe dedicar entre un 25% y un 33% del valor de su salario para el pago de la cuota. Con la garantía de que el incremento del valor de las cuotas cada fin de año no supere la tasa de inflación, el empleado nunca perdería capacidad de pago, pues se supone que su salario también debe ser incrementado en esa misma proporción.

Ejemplo 7.11

Una propiedad con un valor de $ 30.000.000 se financia con una tasa del 3.0% mensual a 2 años, con cuotas mensuales iguales que crecen al final del año un 10%. Calcular el valor de las cuotas y construya la tabla de amortización.

Para el cálculo de las cuotas del primer año aplicamos la expresión (6.15)

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]\left[\frac{(1+\text{TEA})^E - (1+J)^E}{(1+\text{TEA})^E(\text{TEA} - J)}\right]$$

$$30.000.000 = A\left[\frac{(1.03)^{12} - 1}{0.03}\right]\left[\frac{(1+0.4258)^2 - (1+0.10)^2}{(1+0.4258)^2(0.4258 - 0.10)}\right]$$

$$A = \$\ 1.701.288.27$$

Este es el valor de las cuotas del primer año. En el segundo año se pagarán cuotas de $ 1.701.288.27 × 1.10 = $ 1.871.417.09.

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

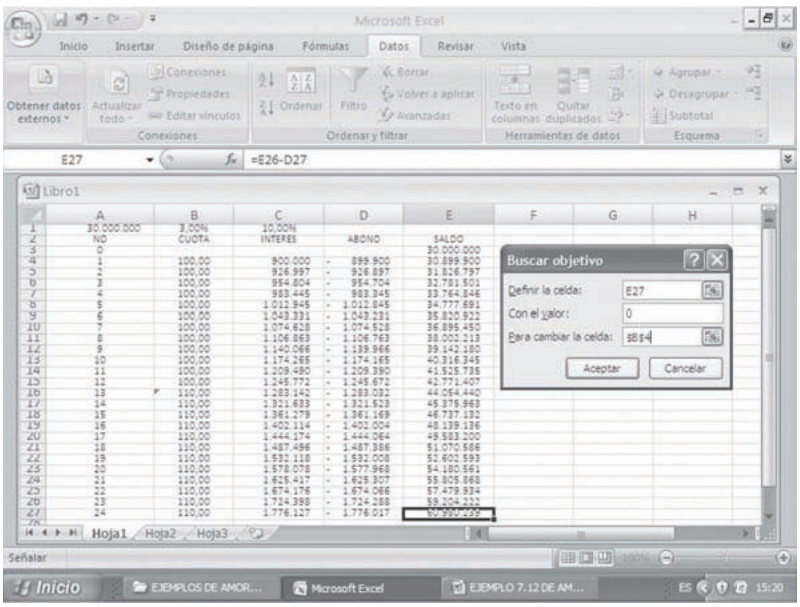
Figura 7.19

	A	B	C	D	E
1	30.000.000	3.00%	10.00%		
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO
3	0				=A1
4	1	100	=E3*$B$1	=B4−C4	=E3−D4
5	2	=B4			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
15	12	=B14			
16	13	=B15*(1+$C$1)			
17	14	=B16			
.....	.....	.....	.....	.....	.....
27	24	=B26			

En la celda A1 escribimos el valor de la propiedad, en B1 la tasa de interés y en C1 el valor del incremento anual de las cuotas. En la celda B4 escribimos 100 como valor arbitrario y en B5 calculamos la segunda cuota que es igual a la primera. Copiamos B5 hasta B15. En la celda B16 calculamos la cuota del mes 13 (segundo año) incrementando la cuota del mes 12 (B15) en un 10% (C1) y calculamos la cuota del mes 14 que es igual a la cuota 13. Copiamos B17 hasta B27. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo al final del período. (Ver figura 7.19).

Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E27 y aplicando *Buscar objetivo* obtenemos en B4 un valor de $ 1.701.355.27 que corresponde a las cuotas mensuales del primer año y en B16 un valor de $ 1.871.490.80 de las cuotas mensuales del segundo año. (Ver figura 7.20).

Figura 7.20



En los ejemplos anteriores hemos analizado diferentes sistemas de amortización de créditos en los cuales la tasa de interés cobrada cada período permanece constante. Es práctico suponer situaciones financieras en las que la tasa de interés varía periódicamente debido a las fluctuaciones del mercado financiero. A continuación entraremos a desarrollar dos sistemas de amortización de créditos, ya analizados en los acápites anteriores, pero ahora suponiendo una tasa variable.

2.10 Sistema de cuota fija con tasa variable (D.T.F.)

En Colombia, la gran mayoría de los créditos bancarios y comerciales se pactan con la tasa D.T.F y ésta cambia de valor cada semana según el comportamiento de las captaciones que hace el sistema financiero a través de los CDT_s a 90 días. Esta situación presupone que la cuota de pago periódica no puede ser constante porque la tasa de interés no permanece fija sino que varía cada período. Sin embargo, se puede construir

la tabla de amortización con cuotas fijas desde el primer período hasta el penúltimo y una cuota de ajuste en el último.

Ejemplo 7.12

Se concede un crédito bancario por $ 5.000.000 a la DTF + 10% (EA) con un plazo de 6 meses, para amortizarlo por medio de cuotas mensuales fijas. Calcular las cuotas mensuales y construya la tabla de amortización. La tasa DTF, expresada como tasa efectiva periódica mensual y su variación esperada se presentan en la siguiente tabla:

Figura 1

PERÍODO	1	2	3	4	5	6
TASA	1.50%	1.60%	1.70%	1.80%	1.90%	2.00%

NOTA: La tasa DTF la calcula semanalmente el Banco de la República y la expresa como nominal trimestre anticipado y como efectiva anual. En la figura 1 aparece expresada la DTF como tasa efectiva periódica mensual, ya realizada la respectiva conversión. Para conocer la tasa efectiva periódica que aplicará para cada período tenemos que sumarle a la DTF los puntos porcentuales adicionales (10% EA) expresados en términos efectivos mensuales. Haciendo la conversión, una tasa del 10% EA es equivalente a 0.80% mensual, de tal forma que la tasa que aplicará para cada período mensual resulta de sumar 0.8% más la DTF de cada período, según aparece en la siguiente tabla:

Tasa del crédito

PERÍODO	1	2	3	4	5	6
TASA	2.30%	2.40%	2.50%	2.60%	2.70%	2.80%

Para construir la tabla de amortización del crédito, en primer lugar, calculamos el valor de las 6 cuotas fijas mensuales utilizando la tasa de interés del primer período como sí la tasa fuera a permanecer constante durante todo el plazo del crédito. Es el caso común de una anualidad vencida.

$$A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$A = 5.000.000\left[\frac{0.023(1+0.023)^6}{(1+0.023)^6 - 1}\right]$$

$$A = \$\ 901.687.46$$

En Excel: = PAGO (tasa; nper; va; vf, tipo)

= PAGO (2,30%; 6; −5.000.000) = $ 901.687.46

Solución con la hoja de cálculo Excel

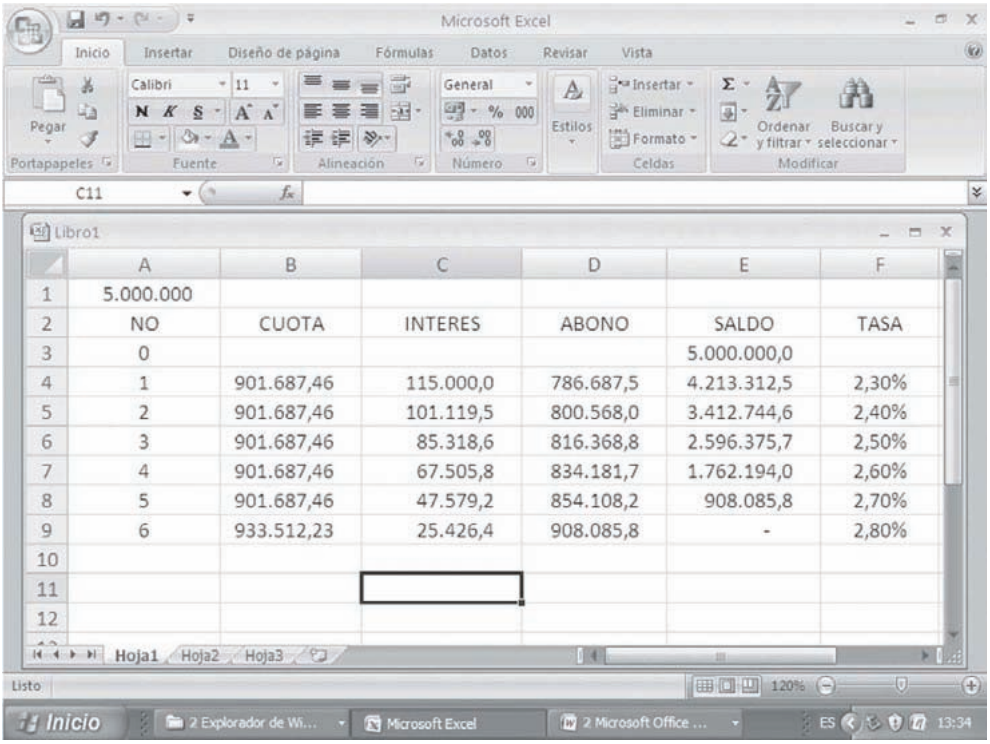
Figura 7.21

	A	B	C	D	E	F
1	5.000.000	3.00%	10.00%			
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO	TASA
3	0				=A1	
4	1	$ 901.687.46	=E3*F4	=B4−C4	=E3−D4	2.30%
5	2	$ 901.687.46				2.40%
6	3	$ 901.687.46				2.50%
7	4	$ 901.687.46				2.60%
8	5	$ 901.687.46				2.70%
9	6	=C9+D9 CUOTA DE AJUSTE	=E8*F9	=E8 ABONO	=E8−D9	2.80%

Se construye la tabla de amortización normalmente desde el primer período hasta el penúltimo. Desde la celda B4 hasta la celda B8 (penúltimo período) escribimos $ 901.687.46 como valor de la cuota. En la celda C4 calculamos los intereses del primer período multiplicando el valor del préstamo (E3) por la tasa de interés del primer período (F4) y en las celdas C5 hasta C8 calculamos los intereses multiplicando el saldo del período anterior por la tasa de cada período (esto lo podemos hacer copiando la fórmula de la celda C4). Copiamos las fórmulas de las celdas D4 y E4 en el rango C5:E8. (Ver figura 7.21).

Para calcular la cuota 6 (cuota de ajuste) procedemos de la siguiente forma: el abono a capital del último período (D9) será igual al saldo del período anterior (E8) y la cuota 6 (B9) será igual al abono a capital (D9) más los intereses del período 6 (C9) con un valor de $ 933.512.23. (Ver figura 7.22).

Figura 7.22



	A	B	C	D	E	F
1	5.000.000					
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO	TASA
3	0				5.000.000,0	
4	1	901.687,46	115.000,0	786.687,5	4.213.312,5	2,30%
5	2	901.687,46	101.119,5	800.568,0	3.412.744,6	2,40%
6	3	901.687,46	85.318,6	816.368,8	2.596.375,7	2,50%
7	4	901.687,46	67.505,8	834.181,7	1.762.194,0	2,60%
8	5	901.687,46	47.579,2	854.108,2	908.085,8	2,70%
9	6	933.512,23	25.426,4	908.085,8	-	2,80%
10						
11						
12						

2.11 Sistema de abono constante a capital con tasa variable (D.T.F.)

Otro sistema de amplia aplicación en el sistema financiero y comercial es el del abono constante a capital con la tasa D.T.F. En este sistema de amortización lo que permanece constante cada período es el abono a capital, mientras que la tasa de interés cambia cada período dependiendo del comportamiento de la tasa D.T.F.

Ejemplo 7.13

Con la misma información del ejemplo 7.12, calcular el valor de las cuotas para cada uno de los 6 meses.

Tasa del crédito

PERÍODO	1	2	3	4	5	6
TASA	2.30 %	2.40%	2.50 %	2.60 %	2.70 %	2.80 %

Solución con la hoja de cálculo Excel

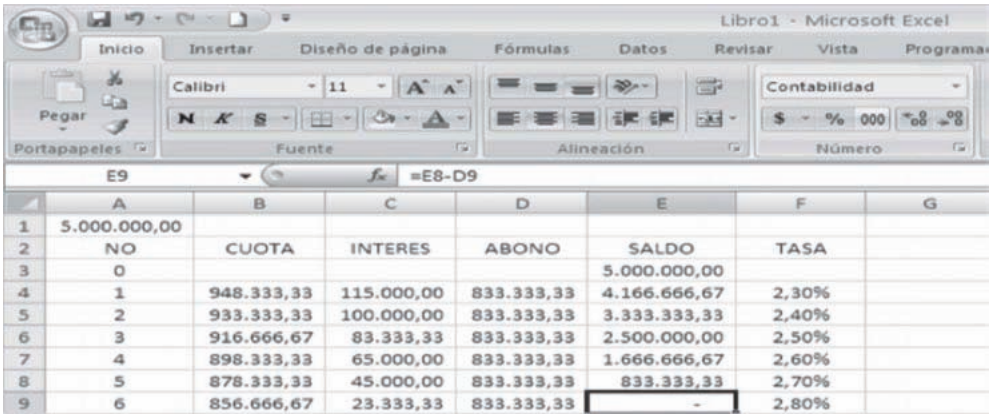
Figura 7.22

	A	B	C	D	E	F
1	5.000.000					
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO	TASA
3	0				=A1	
4	1	=C4+D4	=E3*F4	=$E$3/6	=E3−D4	2.30%
5	2					2.40%
6	3					2.50%
7	4					2.60%
8	5					2.70%
9	6					2.80%

En la celda C4 calculamos los intereses del primer mes multiplicando el valor del préstamo (E3) por la tasa de interés del primer período (F4). El abono a capital para cada mes es el mismo y el saldo al final de cada mes es igual saldo anterior menos el abono a capital. El valor de cada cuota es igual al valor de los intereses más el abono a capital. Ver figura (7.22).

Copiamos las fórmulas de las celdas B4, C4, D4 y E4 en el rango B5:E9, y obtenemos el valor de cada una de las cuotas mensuales que amortizan el crédito. (Ver figura 7.23).

Figura 7.23



	A	B	C	D	E	F	G
1	5.000.000,00						
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO	TASA	
3	0				5.000.000,00		
4	1	948.333,33	115.000,00	833.333,33	4.166.666,67	2,30%	
5	2	933.333,33	100.000,00	833.333,33	3.333.333,33	2,40%	
6	3	916.666,67	83.333,33	833.333,33	2.500.000,00	2,50%	
7	4	898.333,33	65.000,00	833.333,33	1.666.666,67	2,60%	
8	5	878.333,33	45.000,00	833.333,33	833.333,33	2,70%	
9	6	856.666,67	23.333,33	833.333,33	-	2,80%	

SOLUCIONARIO CAPÍTULO 7

EJERCICIO 1. Una obligación bancaria se está financiando por medio de 12 cuotas mensuales de $ 1.000.000 cada. Si la tasa de interés cobrada es del 20% capitalizable mensualmente, calcular el valor de la obligación y diseñar la tabla de amortización.

Calculamos la tasa efectiva de la obligación:

$$i = \frac{J}{n} = \frac{0.20}{12} = 1.67\% \text{ mensual}$$

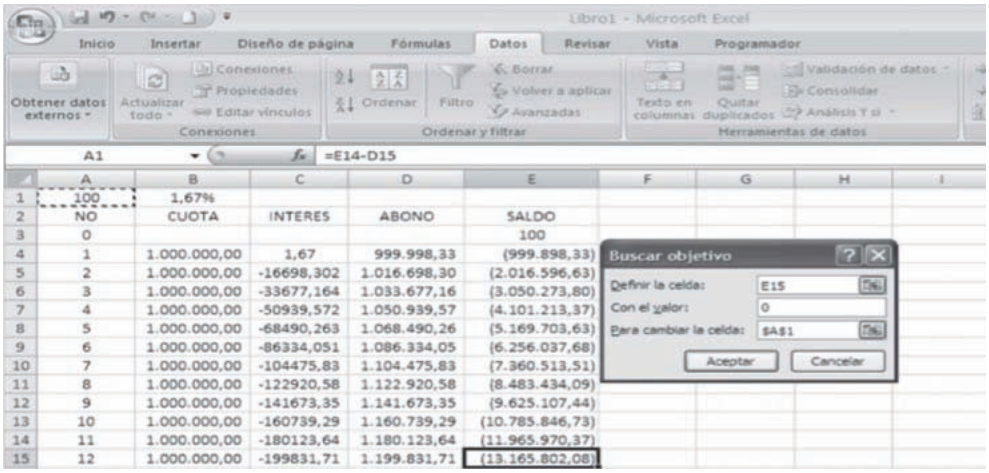
$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$P = 1.000.000\left[\frac{(1+0.0167)^{12} - 1}{0.0167(1+0.0167)^{12}}\right]$$

$$A = \$\ 10.792.882.85$$

En Excel: $= VA\ (1{,}67\%;\ 12;\ -1.000.000)$

Hoja de cálculo Excel



	A	B	C	D	E
1	100	1,67%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				100
4	1	1.000.000,00	1,67	999.998,33	(999.898,33)
5	2	1.000.000,00	-16698,302	1.016.698,30	(2.016.596,63)
6	3	1.000.000,00	-33677,164	1.033.677,16	(3.050.273,80)
7	4	1.000.000,00	-50939,572	1.050.939,57	(4.101.213,37)
8	5	1.000.000,00	-68490,263	1.068.490,26	(5.169.703,63)
9	6	1.000.000,00	-86334,051	1.086.334,05	(6.256.037,68)
10	7	1.000.000,00	-104475,83	1.104.475,83	(7.360.513,51)
11	8	1.000.000,00	-122920,58	1.122.920,58	(8.483.434,09)
12	9	1.000.000,00	-141673,35	1.141.673,35	(9.625.107,44)
13	10	1.000.000,00	-160739,29	1.160.739,29	(10.785.846,73)
14	11	1.000.000,00	-180123,64	1.180.123,64	(11.965.970,37)
15	12	1.000.000,00	-199831,71	1.199.831,71	(13.165.802,08)

EJERCICIO 2. Le aprueban un crédito de vivienda por valor de $ 50.000.000 a la UVR + 12% EA, con un plazo de 15 años, por medio del sistema de cuotas fijas en UVR. Calcular el valor de la cuota en UVR y construya la tabla de amortización, en UVR, para los primeros 9 meses.

El valor de la UVR el día del desembolso del crédito = $ 190.4324

Calculamos el valor del crédito en UVR: $P = \frac{50.000.000}{190.4324} = 262.560.36$ UVR

Le están haciendo un crédito de 262.560.36 UVR al 12% EA (equivalente al 0.95% efectiva mensual) durante 15 años (180 meses).

$$A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

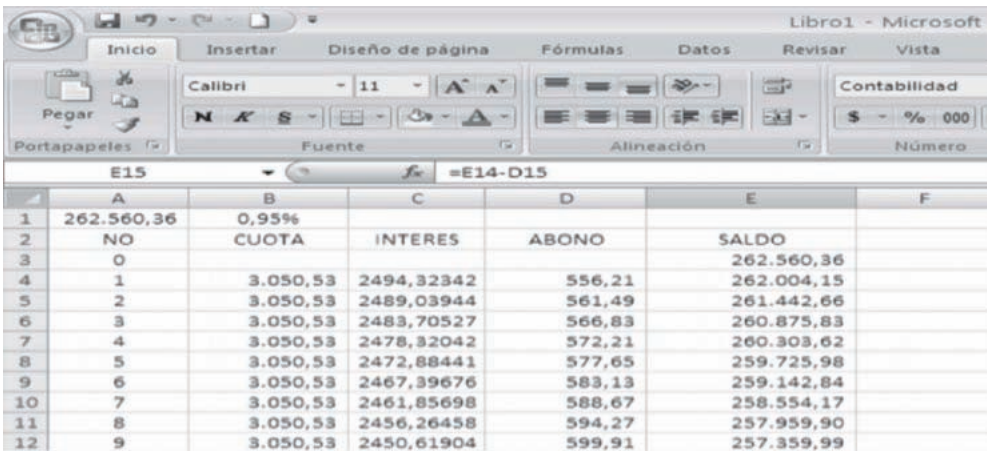
$$A = 262.560.36\left[\frac{0.0095(1+0.0095)^{180}}{(1+0.0095)^{180} - 1}\right]$$

$$A = 3.050.53 \text{ UVR}$$

En Excel: $= \text{PAGO}(0{,}95\%; 180; -262560{,}36)$

Significa que usted cada mes tiene que pagar una cuota de 3.050.53 UVR, durante 180 meses.

Hoja de cálculo Excel



	A	B	C	D	E	F
1	262.560,36	0,95%				
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO	
3	0				262.560,36	
4	1	3.050,53	2494,32342	556,21	262.004,15	
5	2	3.050,53	2489,03944	561,49	261.442,66	
6	3	3.050,53	2483,70527	566,83	260.875,83	
7	4	3.050,53	2478,32042	572,21	260.303,62	
8	5	3.050,53	2472,88441	577,65	259.725,98	
9	6	3.050,53	2467,39676	583,13	259.142,84	
10	7	3.050,53	2461,85698	588,67	258.554,17	
11	8	3.050,53	2456,26458	594,27	257.959,90	
12	9	3.050,53	2450,61904	599,91	257.359,99	

EJERCICIO 3. Con la misma información del ejercicio anterior, calcular el valor de las tres primeras cuotas y la cuota No 180 pero, ahora, bajo el sistema de pago de abono constante a capital en UVR. Construya la tabla de amortización para el primer año.

$$C_K = \frac{P}{n} + P * i\left[1 - \frac{K-1}{n}\right]$$

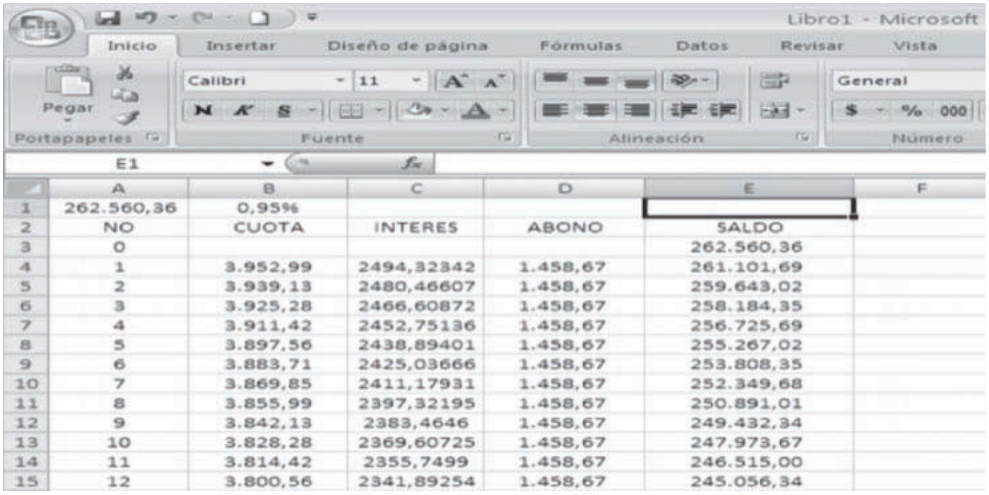
Cuota 1: $$C_1 = \frac{262.560.36}{180} + 262.560.36 * 0.0095\left[1 - \frac{(1-1)}{180}\right] = 3.952.99 \text{ UVR}$$

Cuota 2: $$C_2 = \frac{262.560.36}{180} + 262.560.36 * 0.0095\left[1 - \frac{(2-1)}{180}\right] = 3.939.13 \text{ UVR}$$

Cuota 3: $C_3 = \frac{262.560.36}{180} + 262.560.36 * 0.0095\left[1 - \frac{(3-1)}{180}\right] = 3.925.28$ UVR

Cuota 180: $C_{180} = \frac{262.560.36}{180} + 262.560.36 * 0.0095\left[1 - \frac{(180-1)}{180}\right] = 1.472.53$ UVR

Hoja de cálculo Excel



	A	B	C	D	E	F
1	262.560,36	0,95%				
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO	
3	0				262.560,36	
4	1	3.952,99	2494,32342	1.458,67	261.101,69	
5	2	3.939,13	2480,46607	1.458,67	259.643,02	
6	3	3.925,28	2466,60872	1.458,67	258.184,35	
7	4	3.911,42	2452,75136	1.458,67	256.725,69	
8	5	3.897,56	2438,89401	1.458,67	255.267,02	
9	6	3.883,71	2425,03666	1.458,67	253.808,35	
10	7	3.869,85	2411,17931	1.458,67	252.349,68	
11	8	3.855,99	2397,32195	1.458,67	250.891,01	
12	9	3.842,13	2383,4646	1.458,67	249.432,34	
13	10	3.828,28	2369,60725	1.458,67	247.973,67	
14	11	3.814,42	2355,7499	1.458,67	246.515,00	
15	12	3.800,56	2341,89254	1.458,67	245.056,34	

EJERCICIO 4. Se aprueba un crédito bancario por $ 2.000.000 a la D.T.F. + 10 % EA, con un plazo de 8 meses. Calcular el valor de las cuotas mensuales, utilizando el sistema de cuotas fijas, si la D.T.F. la semana del crédito es del 3.4% EA y se espera un aumento del 0.2% cada mes.

Calculamos el costo inicial del crédito: 3.4% EA + 10% EA = 13.40% EA, equivalente al 1.05% mensual.

PERÍODO	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
TASA	1.05%	1.25%	1.45%	1.65%	1.85%	2.05%	2.25%	2.45%

Calculamos el valor de las cuotas fijas utilizando la tasa de interés del primer mes, como si la tasa fuera a permanecer constante durante todo el plazo del crédito.

$$A = 2.000.000\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] = 2.000.000\left[\frac{0.0105(1+0.0105)^8}{(1+0.0105)^8 - 1}\right]$$

$A = \$\ 261.956.43$

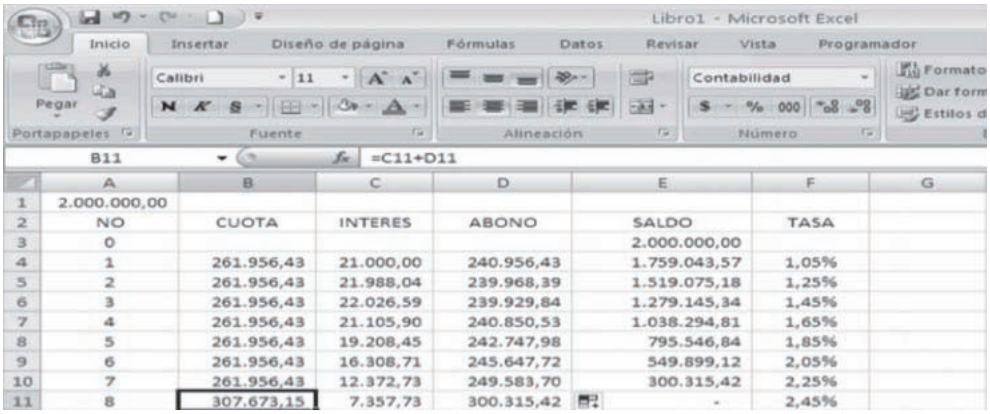
En Excel: = PAGO (1,05%; 8; −2.000.000)

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E	F
1	2.000.000					
2	NO	CUOTA	INTERÉS	ABONO	SALDO	TASA
3	0				=A1	
4	1	261.956.43	=E3*F4	B4−C4	E3−D4	1.05%
5	2	261.956.43				1.25%
6	3	261.956.43				1.45%
7	4	261.956.43				1.65%
8	5	261.956.43				1.85%
9	6	261.956.43				2.05%
10	7	261.956.43				2.25%
11	8	=C11+D11	=E10*F11	=E10	E10−D11	2.45%

Cuota de ajuste

Se construye la tabla de amortización normalmente desde el primer período hasta el penúltimo. Desde la celda B4 hasta la B10 escribimos el valor de la cuota mensual. En las celdas C4, D4 y E4 calculamos intereses, abono a capital y saldo al final del período. Copiamos las fórmulas de las celdas C4, D4 y E4 en el rango C5:E10. Para calcular la cuota de ajuste (cuota del mes 8) procedemos de la siguiente forma: el abono a capital del último período (D11) será igual al saldo del mes anterior (E10) y la cuota 8(B11) será igual al abono a capital (D11) más el valor de los intereses del mes 8 (C11). La cuota del mes 8 (cuota de ajuste) es de $ 307.673.15.



	A	B	C	D	E	F	G
1	2.000.000,00						
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO	TASA	
3	0				2.000.000,00		
4	1	261.956,43	21.000,00	240.956,43	1.759.043,57	1,05%	
5	2	261.956,43	21.988,04	239.968,39	1.519.075,18	1,25%	
6	3	261.956,43	22.026,59	239.929,84	1.279.145,34	1,45%	
7	4	261.956,43	21.105,90	240.850,53	1.038.294,81	1,65%	
8	5	261.956,43	19.208,45	242.747,98	795.546,84	1,85%	
9	6	261.956,43	16.308,71	245.647,72	549.899,12	2,05%	
10	7	261.956,43	12.372,73	249.583,70	300.315,42	2,25%	
11	8	307.673,15	7.357,73	300.315,42	-	2,45%	

EJERCICIO 5. Con la misma información del ejercicio anterior, calcular el valor de las cuotas si el sistema de amortización es el del abono constante a capital.

Hoja de cálculo Excel

	A	B	C	D	E	F
1	2.000.000					
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO	TASA
3	0				=A1	
4	1	=C4+D4	=E3*F4	=$A$1/8	E3−D4	1.05%
5	2					1.25%
6	3					1.45%
7	4					1.65%
8	5					1.85%
9	6					2.05%
10	7					2.25%
11	8					2.45%

En la celda A1 escribimos el valor del crédito. En la celda D4 calculamos el abono a capital y lo copiamos hasta la celda D11. En la celda C4 calculamos los intereses y copiamos la fórmula hasta la celda C11. En la celda B4 calculamos el valor de la primera cuota y copiamos hasta la celda B11. En la celda E4 calculamos el saldo y lo copiamos hasta la celda E11.

	A	B	C	D	E	F	G
1	2.000.000,00						
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO	TASA	
3	0				2.000.000,00		
4	1	271.000,00	21.000,00	250.000,00	1.750.000,00	1,05%	
5	2	271.875,00	21.875,00	250.000,00	1.500.000,00	1,25%	
6	3	271.750,00	21.750,00	250.000,00	1.250.000,00	1,45%	
7	4	270.625,00	20.625,00	250.000,00	1.000.000,00	1,65%	
8	5	268.500,00	18.500,00	250.000,00	750.000,00	1,85%	
9	6	265.375,00	15.375,00	250.000,00	500.000,00	2,05%	
10	7	261.250,00	11.250,00	250.000,00	250.000,00	2,25%	
11	8	256.125,00	6.125,00	250.000,00	-	2,45%	

CAPÍTULO 8

Evaluación de alternativas de inversión

¿Dónde está la utilidad
de nuestras utilidades?
volvamos a la verdad
vanidad de vanidades.

Antonio Machado

0. Introducción

Una inversión, desde el punto de vista financiero, es la asignación de recursos en el presente con el fin de obtener unos beneficios en el futuro (Vélez, 1998). Así, se puede concebir como inversión no sólo el hecho de desembolsar una determinada cantidad de dinero sino también, por ejemplo, el tiempo que alguien dedica a formarse en una universidad.

Las decisiones de inversión son muy importantes pues implican la asignación de grandes sumas de dinero y por un plazo largo (*García, 1998*). Estas decisiones pueden significar el éxito o fracaso de una empresa o de un inversionista. Son importantes también, porque resulta difícil retractarse ante una decisión de esta índole, en contraste con otras decisiones financieras como las de financiación o las de reparto de utilidades.

En la mente de cualquier inversionista, el esquema que se plantea para tomar la decisión de invertir es: ¿*Convendrá la inversión*? Una inversión conviene a menos que se pueda recuperar con intereses y deje un excedente. Esto significa que el inversionista necesita, en primer lugar, recuperar la inversión inicial que realiza y obtener sobre ella unos beneficios que satisfagan sus expectativas de rendimiento y quede un excedente para que aumente su riqueza. Para tomar esta importante decisión de inversión, el inversionista debe contar:

- Con una tasa de interés que le sirva como referencia para poder decidir si invierte o no. Esta tasa de interés se conoce como tasa de oportunidad del inversionista, o sea, aquella tasa máxima que podría obtener dentro de las diversas posibilidades que se le presentan para invertir su dinero.
- Con técnicas o métodos de análisis que le permitan comprobar que con la inversión que hace en el presente y los beneficios futuros, se va a ganar, al menos, su tasa de oportunidad (*Baca, 1994*).

Este es el propósito del presente capítulo: desarrollar las técnicas necesarias para realizar este tipo de análisis y poder tomar decisiones de inversión en forma acertada.

Aunque debemos asumir que muchos de los proyectos que adelantan los inversionistas son como apuestas, por estar sujetos a la incertidumbre de los resultados, existen dos métodos de reconocida aceptación universal utilizados para evaluar proyectos de inversión: *valor presente neto (VPN)* y la *tasa interna de retorno (TIR)*.

1. Tasa de descuento

La *tasa de descuento* es el precio que se paga por los fondos requeridos para cubrir la inversión de un proyecto (*Zapag, 2000*). El valor de la inversión inicial de un proyecto tiene un costo, cualquiera sea la fuente de donde provenga, que es la tasa de descuento. Un proyecto de inversión *convencional o normal* está constituido por una inversión inicial y por beneficios futuros. Aunque parezca obvio, conviene recordar que una inversión es buena cuando los beneficios son mayores que los costos, comparados en una misma fecha, que convencionalmente se ha elegido el momento de la inversión inicial o momento cero. La tasa de interés que se utiliza para trasladar los ingresos y/o egresos al momento cero, es la que denominamos tasa de descuento.

Los fondos requeridos para cubrir la inversión inicial pueden provenir de diferentes fuentes:

- *Recursos propios*. El costo de su utilización corresponde al costo de oportunidad del dinero del inversionista o tasa de oportunidad, que es la mayor rentabilidad que dejaría de obtener por invertir en el proyecto.
- *Préstamo de terceros*. Su costo corresponde a la tasa de interés que pagaría el inversionista por la obtención del préstamo. Esta clase de proyectos financiados en su totalidad por recursos externos se conocen como *proyectos de saliva*.
- *Combinación de recursos propios y préstamo de terceros*. Esta es la forma que generalmente se utiliza para financiar la inversión inicial de un proyecto. Su costo corresponde a una tasa de interés promedio ponderada, que involucra la tasa de oportunidad del inversionista y el costo del préstamo. Esta tasa se conoce como *Costo de Capital*.

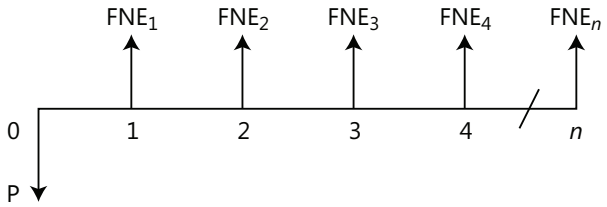
2. Valor presente neto (VPN)

El valor presente neto es una cifra monetaria que resulta de comparar el valor presente de los ingresos con el valor presente de los egresos. En términos concretos, calcular el valor presente neto consiste en comparar los ingresos con los egresos en pesos de la misma fecha. Por convencionalismo, se ha determinado el momento cero para hacer esta comparación, pero es perfectamente válido hacerla en cualquiera otra fecha.

No basta con que las empresas generen utilidades, ya que esto no garantiza su permanencia en el mercado. Las utilidades, por si solas, son una medida engañosa sobre su desempeño, porque no tienen en cuenta el monto de la inversión que las genera. En una economía capitalista solamente sobreviven en el largo plazo las empresas rentables y líquidas. ¿Cómo se sabe si una empresa es rentable? aparentemente, cuando al comparar las utilidades obtenidas en un período contable con la inversión que las genera, el resultado obtenido (rentabilidad operativa) es al menos igual al costo de la inversión. Pero esta medida es estática. Las finanzas modernas (*Sallenave, 1994*) evitan la trampa de las medidas estáticas, buscando índices dinámicos de desempeño que consideren el valor del dinero en el tiempo y cuyo cálculo se apoye en los flujos netos de efectivo[1]. De estos índices, uno de los más utilizados es el VPN.

Si se tiene una inversión inicial P y unos flujos netos de efectivo (FNE), el flujo de caja sería el siguiente:

La ecuación del VPN se plantea de la siguiente forma:



$$VPN_{(T.O)} = -P + \frac{FNE_1}{(1+T.O)^1} + \frac{FNE_2}{(1+T.O)^2} + \ldots + \frac{FNE_n}{(1+T.O)^n} \qquad (8.1)$$

Al plantear la ecuación del VPN observamos lo siguiente:

- Estamos comparando el valor de los egresos (inversión inicial P) con los ingresos futuros (FNE) en una misma fecha; para este caso, en el momento cero por conveniencia. Estamos midiendo el proyecto en pesos del mismo día.
- La tasa de descuento utilizada para trasladar los FNE del futuro al presente es la tasa de oportunidad del inversionista, llamada también *costo de capital simple*. Estamos asumiendo que el inversionista aporta todos los recursos que requiere la inversión inicial. En caso de existir varias fuentes de financiamiento la tasa de oportunidad se reemplaza por el costo de capital
- Estamos planteando un proyecto convencional o normal: proyecto con inversión inicial y con beneficios futuros.

Una forma más sencilla de expresar la ecuación para el cálculo del VPN, es la siguiente:

$$VPN_{(T.O.)} = VPI - VPE$$

[1] En evaluación financiera de proyectos, los beneficios futuros que arroja el proyecto no son utilidades contables sino Flujos Netos de Efectivo (FNE), que constituyen la disponibilidad real de efectivo de cada período.

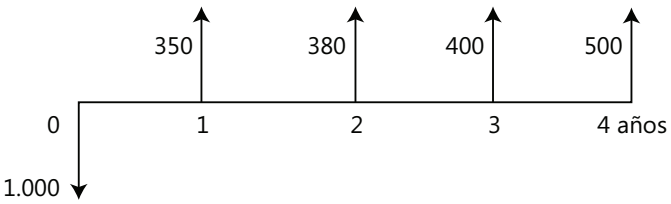
Donde: VPI = Valor presente de ingresos. Representa en la ecuación el valor actualizado de todos los flujos netos de efectivo.

VPE = Valor presente de egresos, representado en la ecuación (8.1) por la inversión inicial P.

T.O. = Tasa de oportunidad del inversionista.

Ejemplo 8.1

(Un ejercicio similar es presentado por Gabriel Baca en su libro Fundamentos de Ingeniería Económica). A dos inversionistas, en forma independiente, se les plantea la posibilidad de emprender un proyecto de inversión, que requiere de una inversión inicial de $ 1.000 y que arrojaría los siguientes flujos netos de efectivo, al final de cada año, tal y como lo muestra el flujo de caja. ¿Qué decisión debe tomar cada inversionista?



La tasa de oportunidad del inversionista A = 20% anual y la del inversionista B = 30% anual.

El inversionista A estaría dispuesto a invertir su dinero siempre y cuando el proyecto de inversión le arroje un rendimiento mínimo del 20% anual, que es la máxima rentabilidad que él podría obtener en el mercado financiero en que se desenvuelve. Lo mismo plantea el inversionista B; él estaría dispuesto a invertir su dinero si el proyecto le arroja un rendimiento mínimo del 30% anual.

La pregunta que se hace cada inversionista individualmente es: ¿me conviene invertir en este proyecto?

Si estuviéramos en la época de Adán y Eva[2], en la cual no existía la inflación, el interés, el costo de oportunidad y el riesgo, podríamos tomar una decisión calculando la utilidad que arroja el proyecto restándole a la suma aritmética de los ingresos el valor de la inversión inicial, obteniendo el siguiente resultado:

$$\text{Utilidad neta} = (350 + 380 + 400 + 500)1.000 = 630$$

El proyecto debería ser aceptado por cualquier inversionista, dado que se obtiene una utilidad de $ 630, después de recuperar la inversión de $ 1.000. Pero hoy las condiciones son totalmente diferentes, ya que existen todos los factores mencionados arriba, que hemos supuesto no existían en la época del paraíso terrenal. Los recursos necesarios para hacer la inversión inicial tienen un costo, el cual se le cobra al proyecto de inversión. Este costo es del 20% anual para el inversionista A y del 30% anual para el inversionista B. En la época de Adán y Eva, como no existía la escasez, los recursos no tenían ningún valor.

[2] Un ejemplo similar fue desarrollado por Ramiro Gamboa Velásquez, en su libro Finanzas, editorial Norma,1991.

Para responderles esta pregunta a los inversionistas utilicemos el VPN como criterio de análisis.

- Calculamos el VPN para el inversionista A:

$$VPN_{(0.20)} = -1.000 + \frac{350}{(1+0.20)^1} + \frac{380}{(1+0.20)^2} + \frac{400}{(1+0.20)^3} + \frac{500}{(1+0.20)^4}$$

$$VPN = -1.000 + 291.67 + 263.89 + 231.48 + 241.13$$

$$VPN = \$\ 28.16$$

Uso de la calculadora financiera

Para calcular el VPN con la calculadora financiera se utiliza el menú Flujo de Caja.

Calculadora FC 100

En la Casio FC 100, para hacer el cálculo del VPN se debe oprimir la tecla MODE y el número 4, y debe aparecer en la parte superior de la pantalla el símbolo CF. Antes de ingresar los datos se deben borrar las memorias financieras, para lo cual se oprimen las teclas SHIFT AC. Las teclas CFj y Nj, ubicadas en la segunda fila del cuerpo de la calculadora, se usan para ingresar los datos correspondientes a los flujos netos de efectivo; CFj es el valor del flujo neto de efectivo *i* Nj es el número de veces que se repite. Si el flujo neto de efectivo es único basta con ingresar su valor y oprimir solamente CFj. La inversión inicial se ingresa con signo negativo. La calculadora financiera procesa la información que se le ingresa, lo que indica que para obtener una respuesta exacta se le debe ingresar correctamente la información; en los períodos donde no haya egresos ni ingresos se debe ingresar el número 0. Antes de pedir el cálculo del VPN, se debe ingresar la tasa de descuento.

Calculadora FC 200

En esta calculadora el cálculo del VPN se realiza en el menú FIN, de tal forma que basta con oprimir la tecla MODE y el número 4. Para el ingreso de los flujos netos de efectivo se dispone de las mismas teclas CFj y Nj. El procedimiento de ingreso de datos y de cálculo es exactamente igual al de la calculadora FC 100.

Calculadora FC 1.000

El cálculo del VPN en esta calculadora se realiza en el menú D.C.F (flujo de caja descontado), para lo cual se debe oprimir la tecla MENU y F5. En la parte inferior de la pantalla aparecen los rótulos *i*% (F1), CFj (F2), Nj (F3) y NXT (F5). Los datos se ingresan de la misma forma que en las anteriores calculadoras. Para calcular el VPN, luego de ingresada la información referente a los flujos netos de efectivo, se oprime la tecla F5 y aparecen nuevos rótulos en la parte inferior de la pantalla, entre los cuales está NPV (F3) que corresponde al VPN. Recuérdese que en las calculadoras FC 200 y FC 1.000 es necesario oprimir la tecla COMP (computar, calcular) antes de pedir el resultado de la variable desconocida.

Calculadoras FC 100V y FC 200V

Para hacer el cálculo del VPN en las calculadoras Casio 100V y Casio 200V, se entra al menú Flujo de Caja (CASH FLOW) oprimiendo la tecla CASH. Con la tecla REPLAY nos ubicamos en Csh=D. Editor x y oprimimos EXE para entrar a la matriz de datos. Se registran los ingresos con signo positivo y los egresos con signo negativo. En la matriz, el período cero comienza en 1. Después de ingresar la información del flujo de caja se oprime la tecla CASH y con la tecla REPLAY nos ubicamos en NPV y oprimimos la tecla SOLVE, para obtener el valor del VPN. Antes de realizar cualquier cálculo financiero es necesario borrar la lista anterior, para lo cual debe seguir el siguiente procedimiento: oprima SHIFT 9 y D. EDITOR EXE, EXE y AC.

Calculadora Hewlett Packard 17 BII y 19 B II

Para entrar al menú flujo de caja de la calculadora H.P. 17 B II y 19 BII desde el menú principal, oprimimos FIN y luego F. CAJA. Si no ha usado previamente el menú F. CAJA, la calculadora exhibe una lista vacía, pero si se ha realizado un cálculo anterior es necesario borrar las memorias financieras, para lo cual oprimimos CLEAR DATA seguido de SI. Para ingresar los flujos netos de efectivo, hacemos lo siguiente: ingresamos el valor del flujo de efectivo inicial, que corresponde a la inversión inicial acompañado del signo +/− por ser un egreso, seguido de IMPUT. Aparece en pantalla F.CAJA(1), que corresponde al valor siguiente en el flujo de caja (puede ser negativo o positivo, por lo tanto, es necesario recordar las convenciones de signos, negativo para egreso y positivo para ingreso). El puntero señala ahora el número de veces en que aparece el flujo neto de efectivo en forma consecutiva; si es un flujo único simplemente oprimimos nuevamente IMPUT (el número de veces aparece especificado en 1). Si se repite el flujo neto de efectivo un número de veces, es necesario indicarlo oprimiendo ese número de veces e IMPUT. El procedimiento se repite hasta completar el ingreso de la información del flujo de caja de la operación financiera. Luego de ingresada la información, se oprime CALC y se ingresa la tasa de descuento oprimiendo el valor de ésta y oprimiendo % I, y luego se pide el valor del VAN (valor actual neto o valor presente neto).

A continuación presentamos el cuadro de cálculo del VPN, utilizando las diferentes calculadoras.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 4 (CF)	MODE 4	MENU F5 (DCF)	CASH	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	SHIFT AC EXE AC	Csh=D.EDITOR X EXE	F:CAJA
1.000 +/- CFj	(-) 1.000 CFj	(-) 1.000 F2	(-) 1.000 EXE	CLEAR DATA
350 CFj	350 CFj	350 F2	350 EXE	1.000 +/- INPUT INPUT
380 CFj	380 CFj	380 F2	380 EXE	350 INPUT INPUT
400 CFj	400 CFj	400 F2	400 EXE	380 INPUT INPUT
500 CFj	500 CFj	500 F2	500 EXE	400 INPUT INPUT
20 i %	20 i %	20 F1 F5	CASH	500 INPUT INPUT
COMP NPV	COMP NPV EXE	COMP F3	20 I%	CALC
			En NPV oprima SOLVE	Ingresamos 20 % y VAN

- Calculamos el VPN para el inversionista B:

En la misma ecuación del VPN para el inversionista A, reemplazamos la tasa de oportunidad por el 30%.

$$VPN_{(0.30)} = -1.000 + \frac{350}{(1+0.30)^1} + \frac{380}{(1+0.30)^2} + \frac{400}{(1+0.30)^3} + \frac{500}{(1+0.30)^4}$$

$$VPN = -1.000 + 269.23 + 224.85 + 182.07 + 175.06$$

$$VPN = \$ -148.79$$

Con el flujo de caja registrado en la calculadora financiera, proceda así:

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
30 i %	30 i %	30 F1, F5	30 I %	CALC 30 I%
COMP NPV	COMP NPV EXE	COMP F3	En NPV oprima SOLVE	VAN

Hemos mencionado que el proyecto debe pagar el costo de financiamiento de la inversión inicial, debido a que el uso del dinero no es gratuito; vale decir, emprender un proyecto de inversión consiste en prestarle dinero al interés a una cosa que se llama proyecto. En el proceso de descuento, que consiste en calcular el valor presente de los flujos de efectivo colocados en el futuro, se le cobran estos intereses al proyecto.

Para el cálculo del VPN, Excel tiene la función VNA. Para su correcta aplicación se recomienda registrar en la hoja de cálculo el flujo de caja libre y escribir en las celdas los valores, teniendo en cuenta que Excel es consistente con la convención de los signos: ingresos con signo positivo y egresos (inversión) con signo negativo.

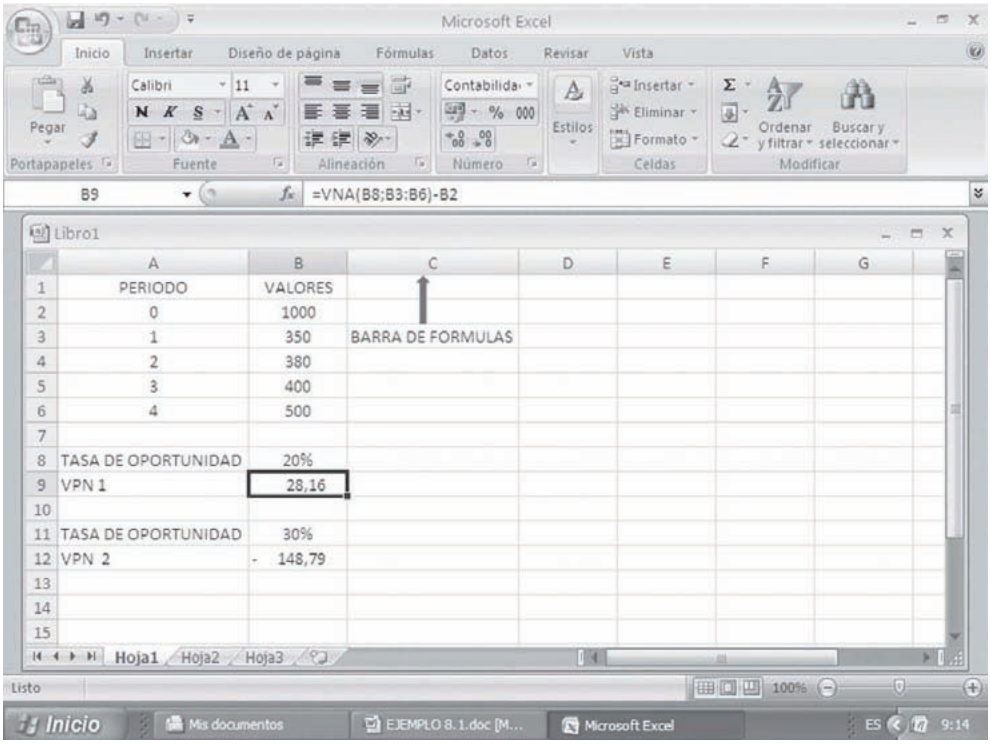
La sintaxis es:

VNA (tasa; valores) − P

El rango de valores debe iniciarse en la celda correspondiente al período 1 y terminar en el período n y si en el flujo de caja analizado se encuentra un período con valor cero, debe escribirse como tal, ya que Excel no considera una celda en blanco como cero. El valor calculado con VNA es la suma de los valores presentes de todos los flujos futuros, de tal forma que para encontrar el valor del VPN se debe restar el valor de la inversión inicial. Ver figura 8.1.

Solución con la hoja de cálculo Excel

Figura 8.1



2.1 Criterios para seleccionar alternativas usando el VPN

- Cuando el VPN es mayor que cero la alternativa se debe aceptar.
- Cuando el VPN es igual a cero es indiferente aceptar o no la alternativa
- Cuando el VPN es menor que cero, la alternativa se debe rechazar.

Según estos criterios de selección, el inversionista A debe aceptar el proyecto, mientras que el inversionista B debe rechazarlo. Esto nos indica que un proyecto de inversión no es ni bueno ni malo en si, sino que depende de las exigencias económicas del inversionista.

Ejemplo 8.2

El señor Pablo invierte hoy $ 3.500.000 y al final del año recibe $ 4.200.000. Si su tasa de oportunidad es del 2.5% mensual, ¿hizo buen negocio?

Por solución directa, aplicando la fórmula del interés compuesto, se tiene que la tasa de interés corriente que se gana el inversionista es del 1.53% mensual.

$$F = P(1 + i)^n$$

$$4.200.000 = 3.500.000(1 + i)^{12}$$

$$i = 1.53\% \text{ mensual}$$

En Excel:

$$= \text{TASA (nper; pago;VA; VF; tipo)}$$

$$= \text{TASA (12; 0; } -3.500.000\text{; 4.200.000)}$$

Lo que indica que el señor Pablo debe rechazar el proyecto, porque el rendimiento que alcanza es inferior a su tasa de oportunidad, que es del 2.5% mensual.

La tasa de rendimiento obtenida se conoce como la TIR (tasa interna de rendimiento), la cual será analizada en la sección siguiente.

Utilizando el método del VPN, se tiene:

$$VPN_{(0.025)} = -3.500.000 + \frac{4.200.000}{(1 + 0.025)^{12}}$$

$$VPN = \$ -377.065.28$$

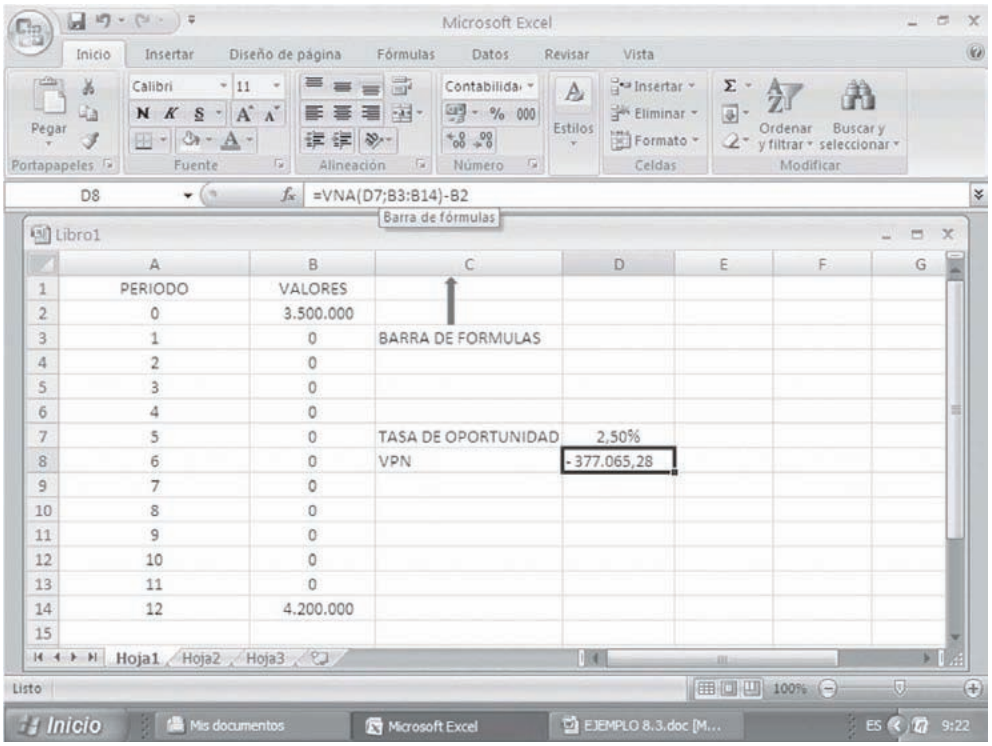
Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 4 (CF)	MODE 4	MENU F5 (DCF)	CASH	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	SHIFT AC EXE AC	Csh=D.EDITOR X EXE	F:CAJA
3.500.000 +/- CFj	(-) 3.500.000 CFj	(-) 3.500.000 F2	En 1, (-) 3.500.000 EXE	CLEAR DATA
0 CFj	0 CFj	0 F2	En 2, 0 EXE. En la matriz se repite el cero hasta el 12	3.500.000 +/- INPUT
11 Nj	11 Nj	11 F3	CASH	0 INPUT
4.200.000 CFj	4.200.000 CFj	4.200.000 F2	2.5 I%	11 INPUT
2.5 i%	2.5 i%	2.5 F1, F5	En NPV oprima SOLVE	4.200.000 INPUT INPUT
COMP NPV	COMP NPV EXE	COMP F3		CALC 2.5 I%
				VAN

NOTA: En las calculadoras FC 100V y FC 200V en la matriz de valores (Csh = D. EDITOR X) no existe período cero, sino que el rango de valores comienza en 1, de tal forma que si son 11 períodos en los cuales no hay ingresos ni egresos, el último cero debe registrarse en 12 y no en 11.

El señor Pablo hizo un mal negocio, porque el VPN es menor que cero. Conviene aclarar que cuando se obtiene un valor del VPN menor que cero, esto no indica ninguna pérdida económica, simplemente, el inversionista además de recuperar su inversión no obtiene el rendimiento deseado. Para este ejercicio, faltan $ 377.065.28 en pesos del momento cero, para que el inversionista recupere su inversión y obtenga un rendimiento del 2.5% mensual. Ver figura 8.2.

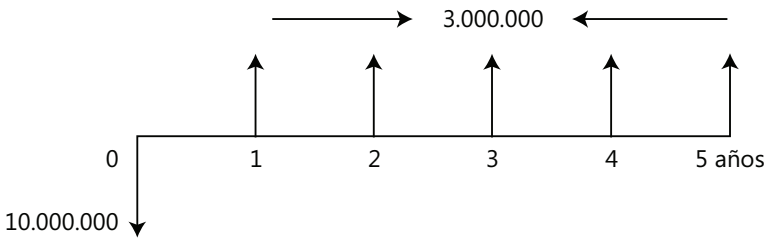
Solución con la hoja de cálculo Excel

Figura 8.2



Ejemplo 8.3

A un inversionista le proponen invertir $ 10.000.000 y le aseguran que en los próximos 5 años recibirá $ 3.000.000 cada año. Si su tasa de oportunidad es del 20% anual, ¿le conviene aceptar el negocio?



Observamos que los beneficios esperados conforman una anualidad vencida, cuyo valor presente está dado por la fórmula 5.2, analizada ampliamente en el capítulo 5, sección 4.1.

$$VPN_{(0.20)} = -10.000.000 + 3.000.000\left[\frac{(1.20)^5 - 1}{0.20(1.20)^5}\right]$$

$$VPN = \$\ -1.028.163.58$$

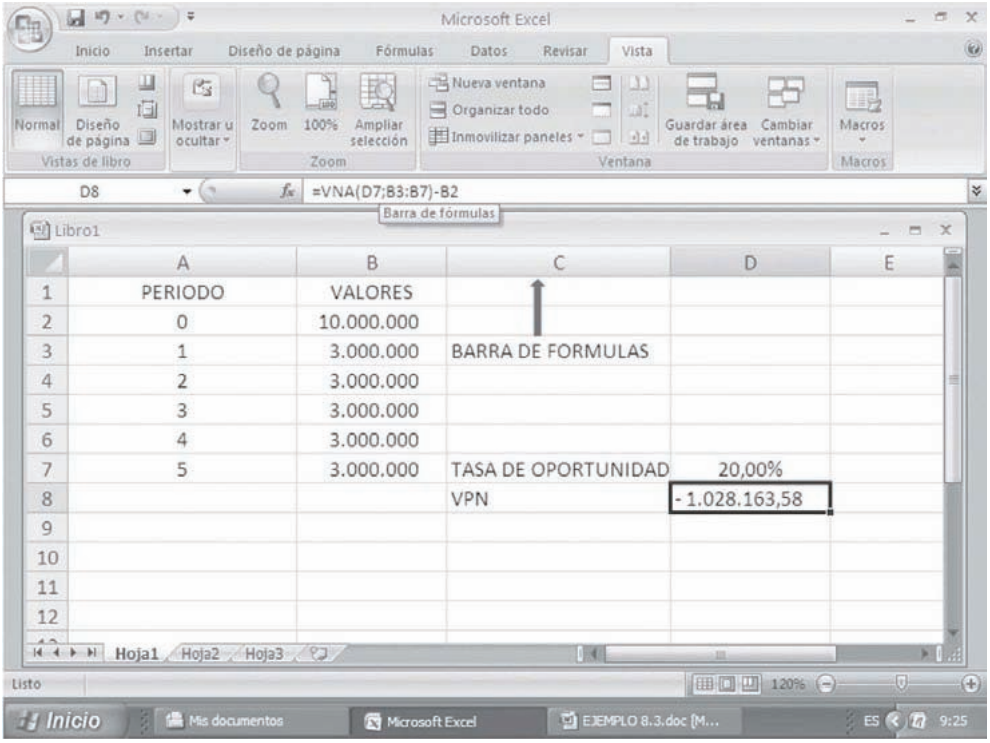
Por ser el VPN menor que cero, el proyecto se debe rechazar.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 4 (CF)	MODE 4	MENU F5 (DCF)	CASH	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	SHIFT AC EXE AC	Csh=D.EDITOR X EXE	F:CAJA
10.000.000 +/- CFj	(-) 10.000.000 CFj	(-) 10.000.000 F2	En 1, (-) 10.000.000 EXE,	CLEAR DATA
3.000.000 CFj	3.000.000 CFj	3.000.000 F2	En 2, 3.000.000 EXE. En la matriz se repite 3.000.000 hasta el 6	10.000.000 +/- INPUT
5 Nj	5 Nj	5 F3	CASH	3.000.000 INPUT
20 i%	20 i%	20 F1, F5	20 I%	5 INPUT
COMP NPV	COMP NPV EXE	COMP F3	En NPV oprima SOLVE	CALC
				20 I%
				VAN

NOTA: En las calculadoras FC 100V y FC 200V en la matriz de valores (Csh = D. EDITOR X) no existe período cero, sino que el rango de valores comienza en 1, de tal forma que si son 5 períodos en los cuales el ingreso es de $ 3.000.000, este valor debe registrarse hasta 6.

Solución con la hoja de cálculo Excel

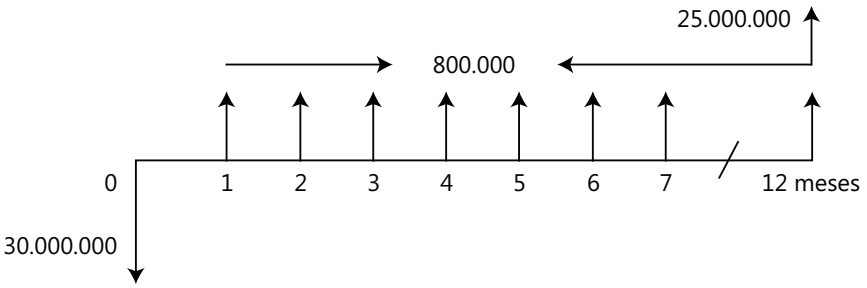
Figura 8.3



Ejemplo 8.4

Pedro compra un camión de carga hoy por $ 30.000.000 para arrendárselo a una empresa de transporte durante un año por $ 800.000 mensuales, libres de gastos de mantenimiento. Si al final del año le proponen comprarle el camión por $ 25.000.000 y su tasa de oportunidad es del 3.0% mensual, ¿debe aceptar el negocio?

El flujo de caja del proyecto es el siguiente:



Para tomar una decisión, nos apoyamos en el valor presente neto.

$$VPN_{(T.O)} = VPI - VPE$$

El valor presente de los egresos es el valor de compra del camión.

$$VPE = \$\ 30.000.000$$

El valor presente de los ingresos es el valor presente de la anualidad conformada por los 12 pagos mensuales de arriendo, más el valor presente de la venta del camión.

$$VPI = 800.000\left[\frac{(1.03)^{12}-1}{0.03(1.03)^{12}}\right] + \frac{25.000.000}{(1.03)^{12}}$$

$$VPI = \$\ 25.497.700.20$$

$$VPN_{(0.03)} = \$\ 25.497.700.20 - \$\ 30.000.000$$

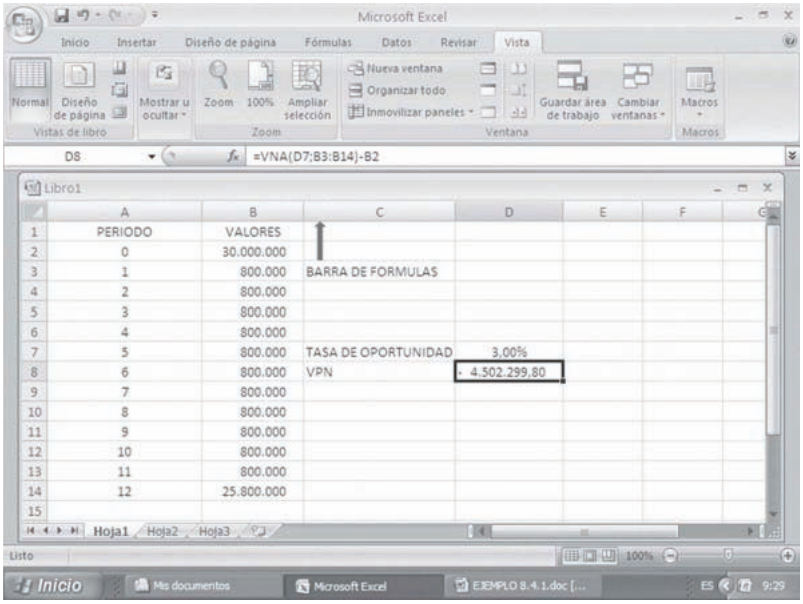
$$VPN_{(0.03)} = \$\ -4.502.299.80 \text{ menor que cero}$$

El negocio debe ser rechazado por Pedro, porque no satisface sus expectativas de rendimiento.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 4 (CF)	MODE 4	MENU F5 (DCF)	CASH	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	SHIFT AC EXE AC	Csh=D.EDITOR X EXE	F:CAJA
30.000.000 +/- CFj	(-) 30.000.000 CFj	(-) 30.000.000 F2	En 1, (-) 30.000.000 EXE,	CLEAR DATA
800.000 CFj	800.000 CFj	800.000 F2	En 2, 800.000 EXE. En la matriz se repite 800.000 hasta el 12	10.000.000 +/- INPUT
11Nj	11 Nj	11 F3	En 13, 25.800.000 EXE	3.000.000 INPUT
25.800.000 CFj	25.800.000 CFj	25.800.000 F2	CASH	5 INPUT
3 i%	3 i%	3 F1, F5	3 I%	CALC
COMP NPV	COMP NPV EXE	COMP F3	En NPV oprima SOLVE	20 I%
				VAN

Solución con la hoja de cálculo Excel

Figura 8.4



¿Cuál debe ser el precio mínimo del camión al final del año para que Pedro acepte el negocio?

La solución la plantea una ecuación de valor que haga el valor presente neto (VPN) = 0, en la que la incógnita sea el valor del camión.

$$VPN_{(3\%)} = VPI - VPE$$

Haciendo el VPN = 0, se tiene:

$$30.000.000 = 800.000\left[\frac{(1.03)^{12} - 1}{0.03(1.03)^{12}}\right] + \frac{X}{(1.03)^{12}}$$

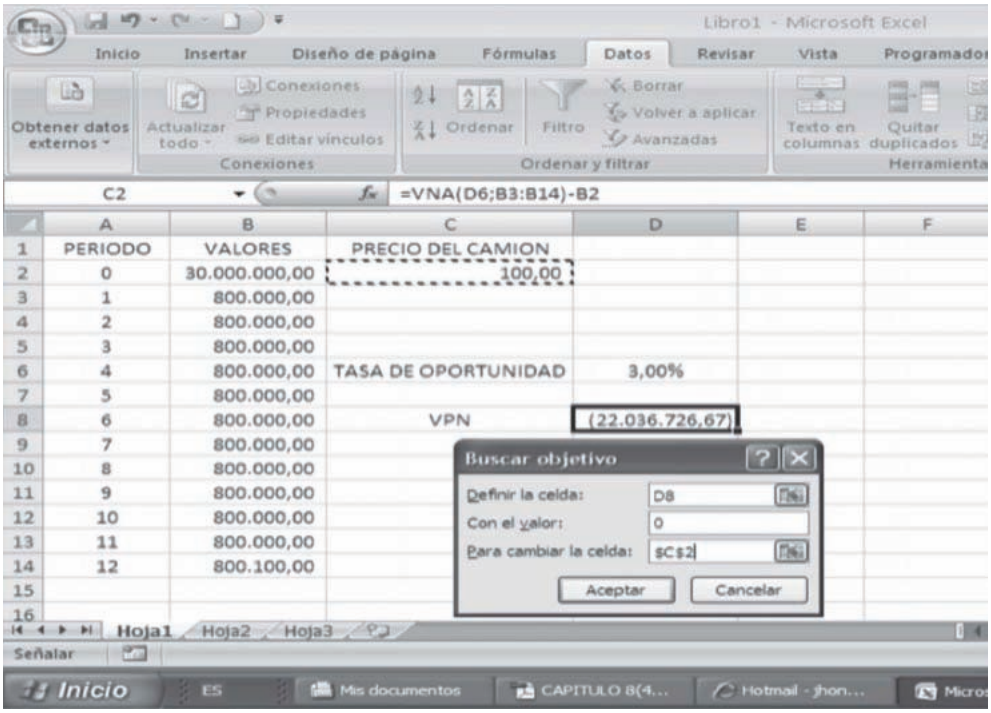
$$X = \$\ 31.419.202.96$$

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

	A	B	C
1	PERÍODO	VALORES	PRECIO DEL CAMIÓN
2	0	30.000.000	100
3	1	800.000	
4	2	800.000	
5	3	800.000	
.....	.....	.....	.....
13	11	800.000	
14	12	=800.000+C2	

En la columna A registramos los períodos y en la B los valores. En la celda B2 escribimos el valor del camión. Desde la celda B3 hasta B13 registramos el valor del arriendo mensual. En la celda C2 escribimos un valor arbitrario de 100 que corresponde al precio mínimo del camión al final del año. En la celda B14 registramos el valor del arriendo más el precio del camión (C2). Aplicando la función VNA se obtiene un VPN de $ −22.036.726.67. Aplicando *Buscar objetivo* y haciendo el VPN igual a cero encontramos en C2 un precio del camión al final del año de $ 31.419.202.96. (Ver figura 8.4.2).

Figura 8.4.2



Si acepta vender el camión al final del año en $ 25.000.000, ¿cuál debe ser el valor del arriendo mensual para aceptar el negocio?

Nuevamente la solución al problema la plantea una ecuación de valor que iguale el valor presente de los ingresos con el valor presente de los egresos, es decir, que haga el VPN = 0 y en la que la incógnita sea el valor del arriendo (A).

$$30.000.000 = A\left[\frac{(1.03)^{12}-1}{0.03(1.03)^{12}}\right] + \frac{25.000.000}{(1.03)^{12}}$$

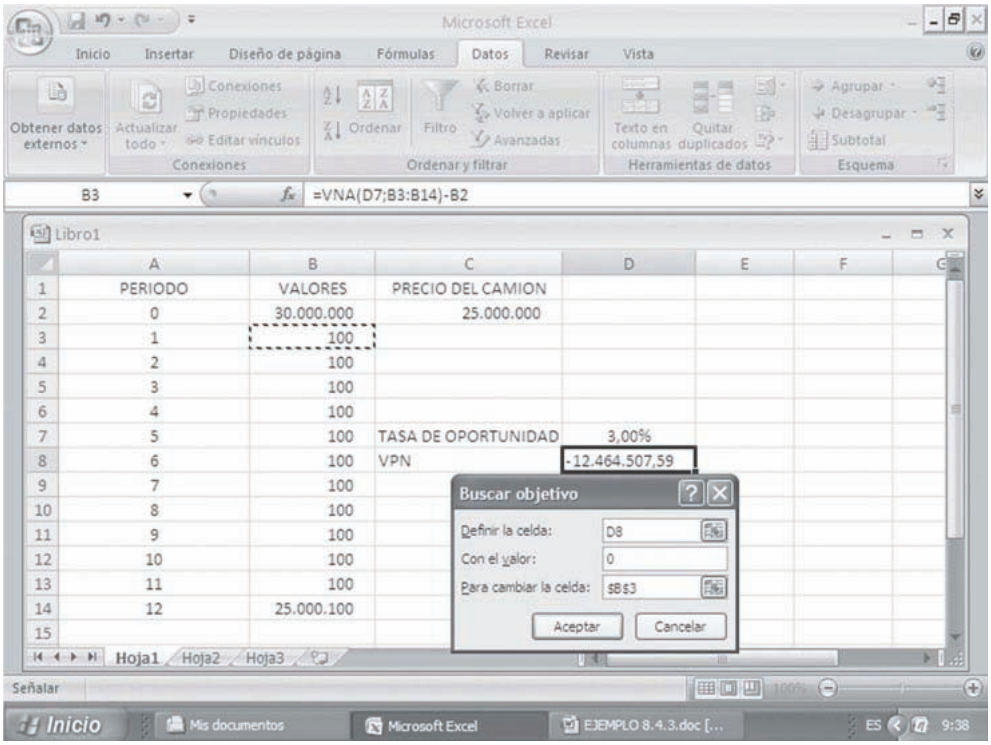
$$A = \$\ 1.252.310$$

Solución con *Buscar objetivo* de Excel

	A	B	C
1	PERÍODO	VALORES	PRECIO DEL CAMIÓN
2	0	30.000.000	25.000.000
3	1	100	
4	2	=B3	
5	3	=B4	
.....	.....	.....	.....
13	11	=B12	
14	12	=B13+C2	

En la columna A registramos los períodos y en la B los valores. En la celda C2 registramos el precio del camión. En la celda B3 escribimos un valor arbitrario de 100, que corresponde al valor del arriendo mensual que vamos a calcular y en la celda B4 calculamos el arriendo del segundo mes que es igual al primero, y copiamos B4 hasta B13. En la celda B14 calculamos el valor del ingreso que es igual al valor del arriendo más el precio de venta del camión (C2). Con *Buscar objetivo* de Excel, haciendo el VPN igual a cero encontramos en B3 un valor de $ 1.252.310, que corresponde al valor del arriendo mensual. (Ver figura 8.4.3).

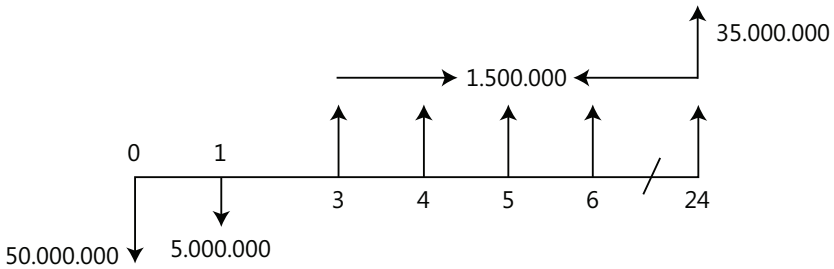
Figura 8.4.3



Ejemplo 8.5

Se compra una bodega por $ 50.000.000 y en el primer mes se le hacen reparaciones por $ 5.000.000. Se espera arrendarla a partir del tercer mes por $ 1.500.000 mensuales hasta finales del segundo año, cuando se espera venderla por $ 35.000.000. Si la tasa de oportunidad es del 20% efectiva anual, ¿se hizo un buen negocio?

El flujo de caja del proyecto es el siguiente:



Al evaluar proyectos de inversión, todos los gastos e ingresos se reflejan al final del período en que se presentan.

La tasa de interés está expresada como efectiva anual. Utilizando el procedimiento analítico de conversión de tasas equivalentes, o con la calculadora financiera, se llega a una tasa de l .53% mensual ⇔ 20% E.A.

Para determinar si se hizo un buen o mal negocio nos apoyamos en el criterio del VPN.

Elegimos como fecha focal el momento cero para comparar los ingresos con los egresos.

Cálculo del valor presente de los ingresos: es igual al valor presente del valor de venta de la bodega más el valor presente de los arriendos. Estos últimos conforman una anualidad diferida, porque el primer ingreso se encuentra en el mes 3 y la fecha focal la hemos tomado en el momento cero. Al calcular el valor presente de la anualidad, este queda ubicado en el mes 2, por lo tanto, este valor debemos trasladarlo al momento cero.

$$VPI = \frac{35.000.000}{(1+0.0153)^{24}} + \frac{1.500.000\left[\dfrac{(1+0.0153)^{22}-1}{0.0153(1+0.0153)^{22}}\right]}{(1+0.0153)^{2}}$$

$$VPI = 24.305.825.88 + 27.005.613.93$$

$$VPI = \$\ 51.311.439.81$$

Cálculo del valor presente de los egresos: es igual al valor de compra de la bodega, que ya está ubicado en el momento cero, más el valor presente del valor de las reparaciones realizadas en el primer mes.

$$VPE = 50.000.000 + \frac{5.000.000}{(1 + 0.0153)}$$

$$VPE = \$\ 54.924.652.81$$

El VPN es igual al valor presente de los ingresos menos el valor presente de los egresos:

$$VPN = \$\ 51.311.439.81 - \$\ 54.924.652.81$$

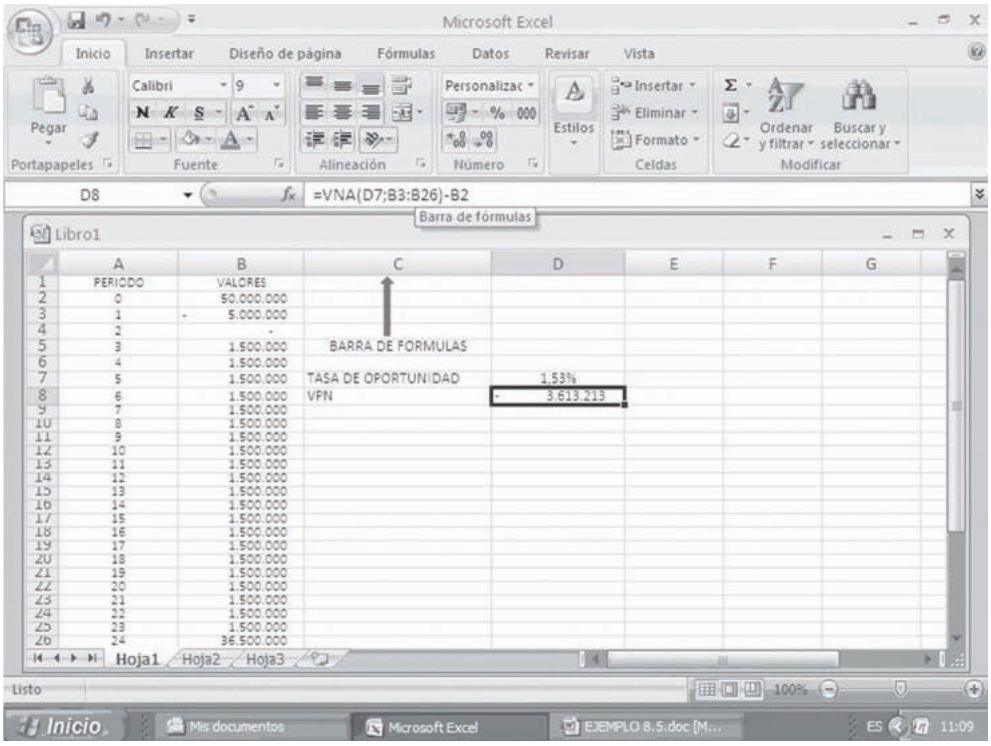
$$VPN = \$\ -3.613.213$$

Por ser negativo el VPN, se hizo un mal negocio.

Solución con la hoja de cálculo Excel

El Excel es consistente con la convención de los signos: ingresos con signo positivo y egresos con signo negativo. En este ejercicio, además de la inversión inicial existe una inversión adicional en el mes 1 que se debe registrar en el flujo de caja como un egreso, por tal razón aparece en la celda B3 con signo negativo. (Ver figura 8.5).

Figura 8.5



2.2 ¿Qué muestra el VPN?

Generalmente, se presentan confusiones en la interpretación del VPN, que a su vez, conllevan a tomar decisiones de inversión equivocadas.

Analicemos las más relevantes.

- El rendimiento que el inversionista exige no se recibe sobre la inversión inicial, sino sobre el saldo de la inversión no recuperado. En el caso del inversionista A (Ejemplo 8.1), el 20% de rendimiento que exige como mínimo sobre su inversión de $ 1.000, lo obtiene sobre el saldo no recuperado de su inversión.
- Si el VPN es igual a cero, el inversionista gana lo que quería ganar después de recuperar la inversión.
- Si el VPN es mayor que cero, el inversionista gana más de lo que quería ganar. El VPN le muestra en pesos del presente, cuanto más ganó sobre lo que quería ganar.
- Si el VPN es menor que cero, esto no indica ninguna pérdida, sino la cantidad de dinero en pesos de hoy que faltó para que el inversionista ganara lo que quería ganar.

Demostremos que el rendimiento que obtiene el inversionista es sobre el saldo pendiente de recuperar y no sobre la inversión inicial. Para este propósito, analicemos el flujo de caja del ejercicio 8.1, considerando la situación del inversionista A que tiene una tasa de oportunidad igual al 20% anual. Para esta demostración nos apoyamos en la siguiente tabla de amortización.

No.	CUOTA	INTERÉS	AMORTIZACIÓN	SALDO
0				1.000.00
1	350.00	200.00	150.00	850.00
2	380.00	170.00	210.00	640.00
3	400.00	128.00	272.00	368.00
4	500.00	73.60	426.40	−58.40
EXCEDENTE				58.40

A primera vista, el excedente de $ 58.40 no coincide con el VPN de $ 28.16. La diferencia está solamente en que el VPN se expresó en el momento cero, mientras que el excedente está en el año 4. Pero si calculamos el valor presente de $ 58.40 en el momento cero, se obtendrá:

$$P = \frac{F}{(1+i)^4}$$

$$P = \frac{58.40}{(1+0.20)^4}$$

$$P = \$\ 28.16$$

2.3 Conclusiones sobre el VPN

- Es un método de fácil aplicación.
- La inversión y los beneficios futuros (flujos de efectivo), se transforman en pesos de hoy y así se puede ver si los ingresos son mayores que los egresos.
- Considera el valor del dinero en el tiempo.
- Se necesita conocer la tasa de descuento para poder evaluar los proyectos. Este es el factor determinante en la aplicación del método. Cualquier error en su determinación repercute en la decisión de aceptar o rechazar un proyecto.

2.4 Valor presente neto no periódico (VPN.NO.PER)

Es la función financiera que, dada una tasa de descuento determinada, calcula el valor presente neto de una inversión cuyos flujos netos de efectivo no tienen que ser necesariamente periódicos.

En los ejercicios precedentes hemos calculado el VPN, conocida la tasa de descuento periódica y una serie de flujos netos de efectivo con la característica de ser periódicos, es decir, que se presentan a intervalos iguales de tiempo. En algunos de ellos la tasa de descuento no coincidía con los períodos de los flujos netos de efectivo y aplicando los conceptos de conversión de tasas de interés calculamos la tasa equivalente para llevarla al período de tiempo de los flujos. Así, si los flujos netos de efectivo son mensuales, la tasa de descuento tiene que ser efectiva mensual, etc. Es práctico suponer que durante la vida útil de una inversión se presentarán ingresos y egresos en períodos menores al año y que, generalmente, no se presentan con la misma periodicidad. En este último caso, el VPN recibe el nombre de VPN.NO.PER.

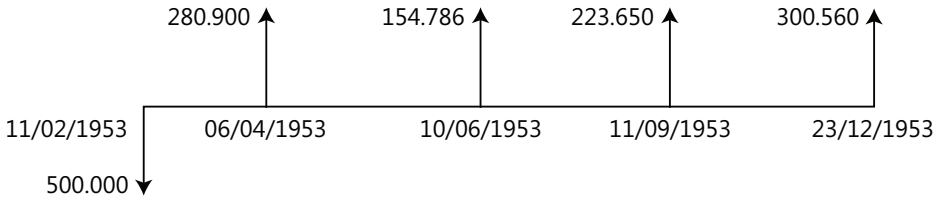
Ejemplo 8.6

Se hizo una inversión por $ 500.000 el 11 de febrero de 1953 y se recibieron los siguientes beneficios:

Fecha	Valor
06/04/53	$ 280.900
10/06/53	$ 154.786
11/09/53	$ 223.650
23/12/53	$ 300.560

Si la tasa de oportunidad del inversionista es del 18% EA, diga si fue acertada la inversión.

Se observa que los flujos netos de efectivo no son periódicos. La solución matemática consiste en trasladar, a la tasa de oportunidad del inversionista, todos los flujos netos de efectivo a la fecha inicial de la inversión y compararla con ésta. Debemos usar el interés real (año de 365 días) para ser consistentes con el tipo de interés utilizado por Excel. Se hace necesario, además, calcular el número de días calendarios que hay entre la fecha de cada flujo neto de efectivo y la fecha de la inversión (ver en el capítulo 2, tabla para calcular el número exacto de días).



$$VPI = 500.000$$

$$VPI = \frac{280.900}{(1+0.18)^{\frac{54}{365}}} + \frac{154.786}{(1+0.18)^{\frac{119}{365}}} + \frac{223.650}{(1+0.18)^{\frac{212}{365}}} + \frac{300.560}{(1+0.18)^{\frac{315}{365}}}$$

$$VPI = \$\ 884.463.52$$

$$VPN = VPI - VPE$$

$$VPN = \$\ 884.463.52 - \$\ 500.000$$

$$VPN = \$384.463.52 \text{ mayor que cero, la inversión fue acertada}$$

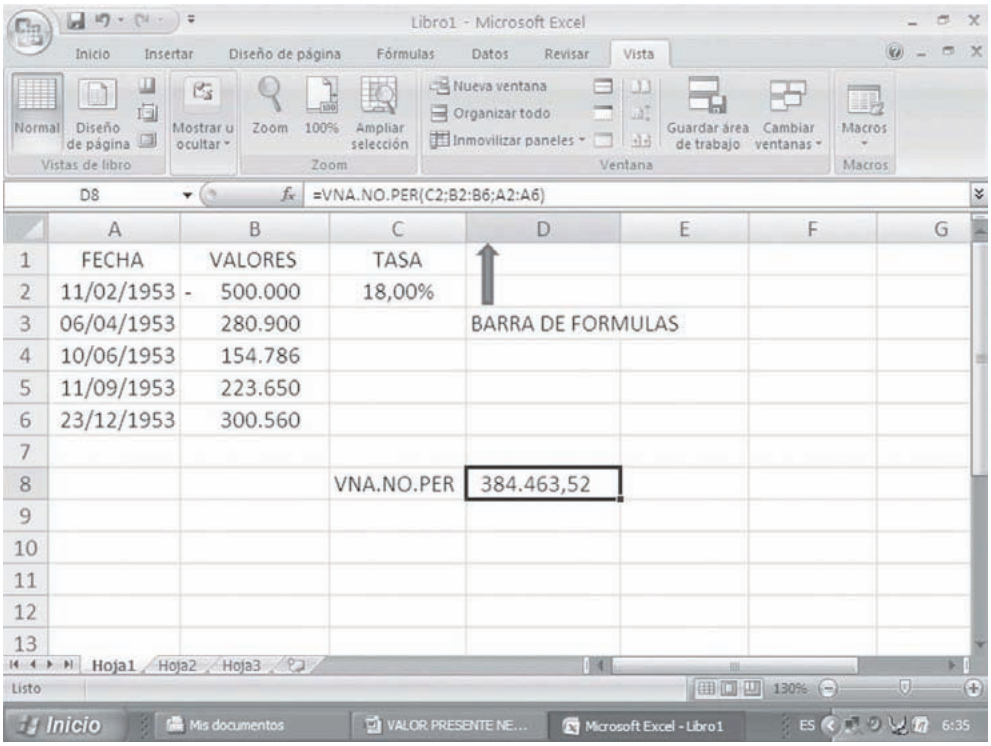
Para calcular el VPN no periódico el Excel tiene la función VNA.NO.PER, cuya sintaxis es:

VNA.NO.PER (tasa; valores; fechas)

Para aplicarla en la hoja de cálculo, registramos las fechas que deben estar en el formato números y no en el formato de fechas, porque nos permite usar cómodamente rangos; registramos los valores (que no tienen que ser necesariamente periódicos) que corresponden a los flujos netos de efectivo, con sus respectivos signos (ingresos con signo positivo y egresos con signo negativo) y registramos la tasa de descuento que tiene que ser una tasa efectiva anual. Aplicamos la función VNA.NO.PER escribiendo el signo igual y su notación, abrimos paréntesis y escribimos la tasa, el rango de valores y el rango de fechas y cerramos paréntesis. Al dar ENTER, obtenemos un valor de $ 384.463.52. (Ver figura 8.6).

Solución con la hoja de cálculo Excel

Figura 8.6

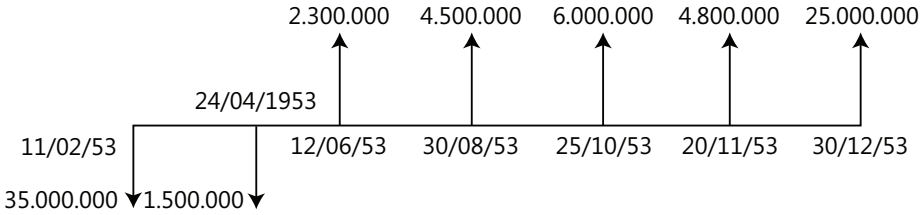


En forma contraria al cálculo del VPN con flujos netos de efectivo periódicos, en este caso en el rango de valores se incluye la inversión inicial con signo negativo.

Ejemplo 8.7

El día 11 de Febrero de 1953 Juan David compró una máquina recolectora de algodón por $ 35.000.000. Para poderla poner en operación se le hicieron reparaciones el día 24 de Abril de 1953 por $ 1.500.000. Se recibieron los siguientes beneficios en sus respectivas fechas:

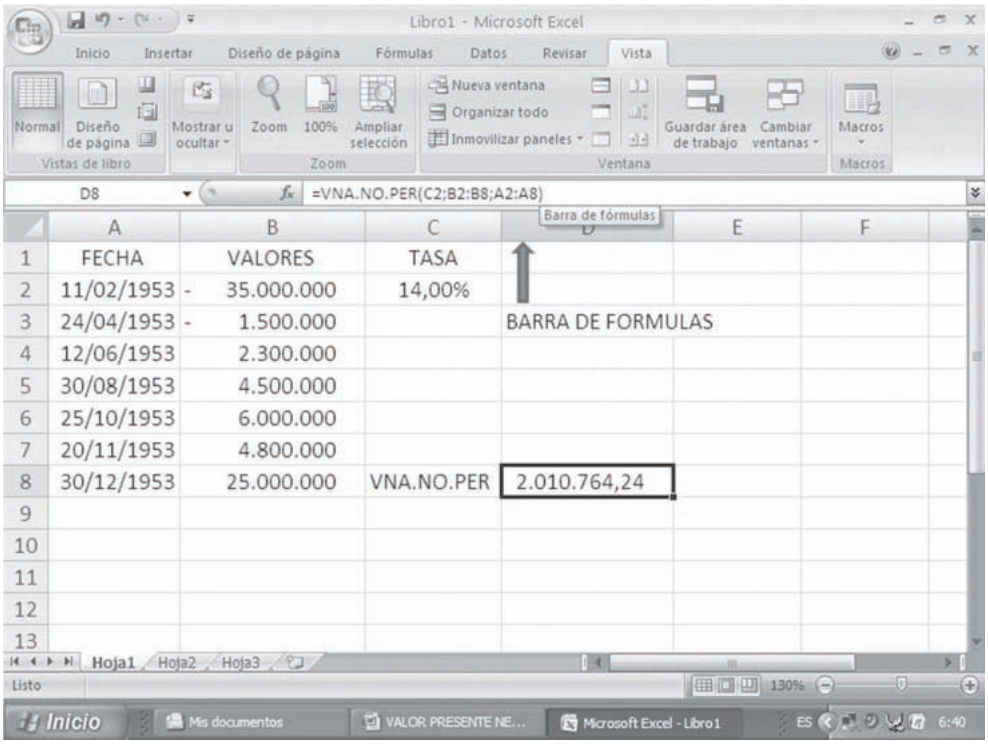
Fecha	Beneficios
12/06/53	$ 2.300.000
30/08/53	$ 4.500.000
25/10/53	$ 6.000.000
20/11/53	$ 4.800.000



El día 30 de Diciembre de 1953 se vendió por $ 25.000.000. Si la tasa de oportunidad de Juan David es del 14% EA, diga si hizo un buen negocio. Utilice la hoja de cálculo Excel.

Calculamos el VPN utilizando la hoja de cálculo Excel. El valor de compra de la máquina y el de las reparaciones deben registrarse con signo negativo. (Ver figura 8.7).

Figura 8.7



El VPN es igual a $ 2.010.764.24, mayor que cero, lo que indica que Juan David hizo un buen negocio.

3. TASA INTERNA DE RETORNO (TIR)

Al analizar el VPN pudimos observar que su resultado dependía fundamentalmente de la tasa de descuento. Esto lo apreciamos al desarrollar el ejemplo de los dos inversionistas. Un mismo proyecto era recomendable para el inversionista A y no lo era para el inversionista B. La selección del proyecto depende, entonces, de la tasa de descuento cuando utilizamos el método del VPN.

Vamos a analizar, ahora, un indicador que es independiente de la tasa de descuento para su cálculo, y es una característica propia del proyecto.

En el ejemplo de los dos inversionistas (Ejemplo 8.1) pudimos apreciar que el inversionista A exigía un rendimiento del 20% y el proyecto le entregaba eso y $ 28.16 más, medidos en pesos del momento cero, o sea, que el proyecto le entregaba un rendimiento mayor. El inversionista B exigía un rendimiento del 30% y el proyecto no se lo podía entregar. Probablemente, si el inversionista A exigiera un rendimiento mayor, el proyecto se lo podría dar. La TIR indica hasta cuánto podría el inversionista A aumentar su rendimiento exigido, para ello se buscará aquella tasa que haga el VPN = 0 y para que esto sea así, la diferencia entre el valor presente de los flujos de efectivo descontados y la inversión, debe ser también igual a cero, o sea, el valor presente de los flujos descontados debe ser igual a la inversión.

Podemos definir, entonces, la TIR como la tasa de interés que hace el VPN = 0 o, también, la tasa de interés que iguala el valor presente de los flujos descontados con la inversión.

Una interpretación importante de la TIR es que ella es la máxima tasa de interés a la que un inversionista estaría dispuesto a pedir prestado dinero para financiar la totalidad del proyecto, pagando con los beneficios (flujos netos de efectivo) la totalidad del capital y de sus intereses, sin perder un sólo centavo.

Para el caso de los dos inversionistas del ejemplo 8.1, esa tasa de interés debe estar entre el 20% y el 30%. Más cerca del 20% que del 30%, porque $ 28.17 está más cerca a cero que $ 148.79.

Podemos, entonces, plantear la ecuación de la TIR de la siguiente forma

$$VPN = 0 = -P + \frac{FNE_1}{(1 + TIR)^1} + \frac{FNE_2}{(1 + TIR)^2} + \ldots + \frac{FNE_n}{(1 + TIR)^n}$$

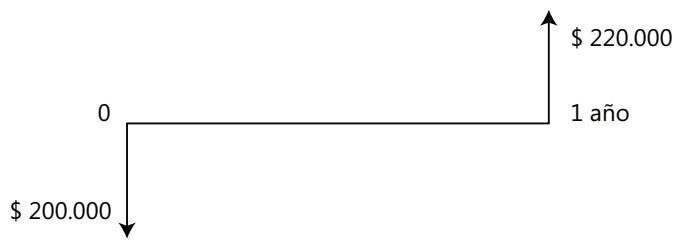
Ordenando la ecuación, se tiene:

$$P = \frac{FNE_1}{(1 + TIR)^1} + \frac{FNE_2}{(1 + TIR)^2} + \ldots + \frac{FNE_n}{(1 + TIR)^n}$$

En efecto, los siguientes casos ilustran lo anterior.

Ejemplo 8.8

Se invierten $ 200.000 y después de un año se reciben $ 220.000. Calcular la TIR anual.



La TIR es la tasa de interés que hace el VPN = 0

Se plantea la ecuación del VPN.

$$VPN = -200.000 + \frac{220.000}{(1+i)^1} \quad (8.1)$$

Haciendo el VPN = 0, se tiene:

$$200.000 = \frac{220.000}{(1+i)}$$

$$(1+i) = \frac{220.000}{200.000} = 1.10$$

$$i = 0.10 = 10\% \text{ anual} = TIR$$

Se observa que al hacer el VPN = 0, la ecuación resultante es una ecuación de valor con fecha focal en el momento 0.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 4 (CF)	MODE 4	MENU F5 (DCF)	CASH	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	SHIFT AC EXE AC	Csh=D.EDITOR X EXE	F:CAJA
200.000 +/- CFj	(-) 200.000 CFj	(-) 200.000 F2	SHIFT CLR. D.EDITOR EXE. EXE. AC	CLEAR DATA
220.000 CFj	200.000 CFj	220.000 F2	En 1, (-) 200.000 EXE	200.000 +/- INPUT
IRR	IRR EXE	F5, F2	En 2, 220.000 EXE	220.000 INPUT INPUT
			CASH	CALC
			En IRR oprima SOLVE	TIR

En Excel, la TIR se calcula utilizando la función TIR, para lo cual se recomienda construir el flujo de caja libre y escribir en las celdas los valores de ingresos y egresos. Al utilizar la función TIR en la hoja de cálculo se ingresan las celdas y no los valores.

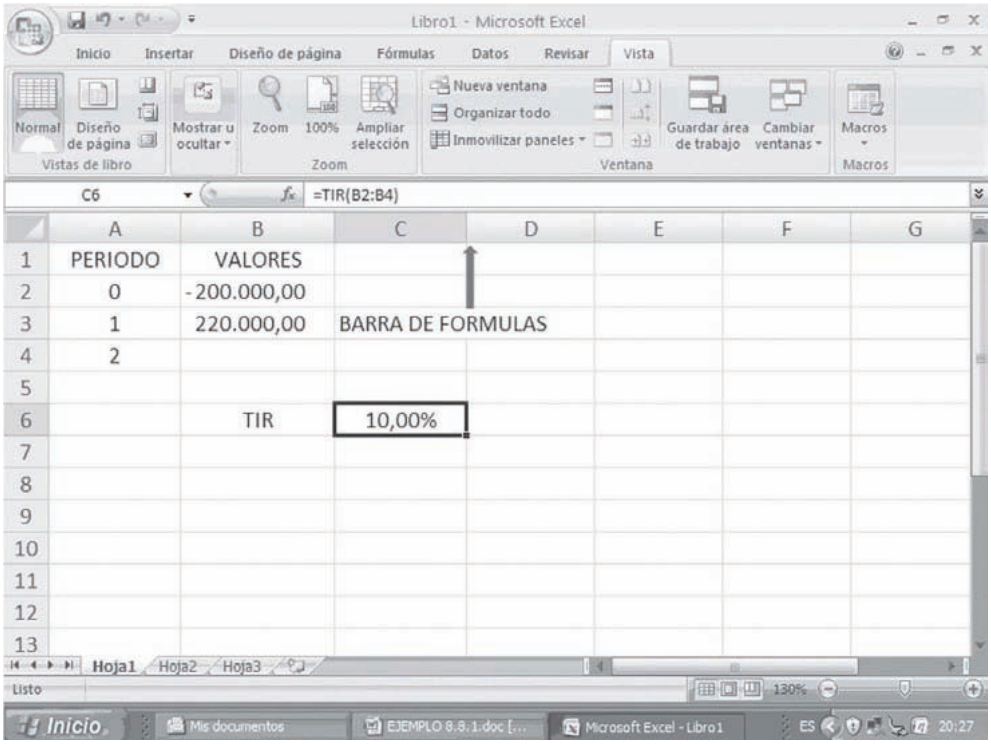
Su sintaxis es: TIR (rango; estimar)

Para el cálculo de la TIR, el rango se inicia con el valor del momento cero y en el paréntesis podemos omitir el parámetro estimar, porque el programa asume una tasa del 10% para hacer las iteraciones. Si en el flujo analizado se encuentra un período con valor cero, debe escribirse como tal, ya que Excel no considera una celda en blanco como cero. Los signos de los valores involucrados en el cálculo deben ser consistentes con el flujo de caja, de tal forma que una inversión debe ser un egreso con signo negativo y un ingreso debe tener signo positivo.

Solución con la hoja de cálculo Excel

Para el cálculo del VPN con la hoja de cálculo Excel, el rango de valores comienza en el período 1, tal como lo observamos en los ejemplos precedentes, mientras que para el cálculo de la TIR comienza en el período cero y la inversión inicial se debe registrar con signo negativo. Ver figura 8.6.

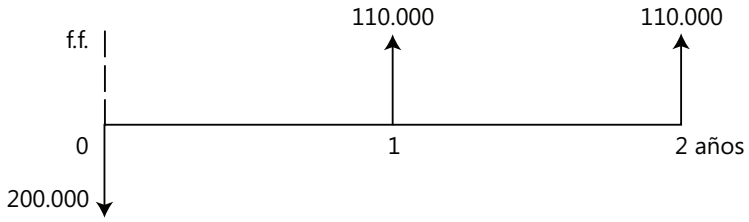
Figura 8.6



Ejemplo 8.9

El señor Pérez invierte $ 200.000 y recibe al final del primer año $ 110.000 y al final del segundo año $ 110.000. Calcular la TIR.

El flujo de caja del proyecto es el siguiente:



Se plantea la ecuación de valor con fecha focal en el momento cero.

$$200.000 = \frac{110.000}{(1+i)^1} + \frac{110.000}{(1+i)^2}$$

Quitando denominadores, se tiene: $200.000(1 + i)^2 = 110.000(1 + i) + 110.000$.

Ordenando la ecuación, se tiene: $200.000(1+i)^2 - 110.000(1+i) - 110.000 = 0$

que corresponde a una ecuación de segundo grado del tipo: $ax^2 + bx + c = 0$.

que se resuelve aplicando la siguiente fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Resolviendo la ecuación:

$$x = (1+i) = \frac{110.000 \pm \sqrt{(-110.000)^2 - 4(200.000)(-110.000)}}{2(200.000)}$$

$$(1+i) = \frac{110.000 \pm \sqrt{100.100.000}}{400.000}$$

$$(1+i) = \frac{110.000 \pm 316.385.84}{400.000}$$

$$i_1 = \frac{110.000 \pm 316.385.84}{400.000} - 1$$

$$i_1 = 6.60\% \text{ anual}$$

$$i_2 = \frac{110.000 - 316.385.84}{400.000} - 1$$

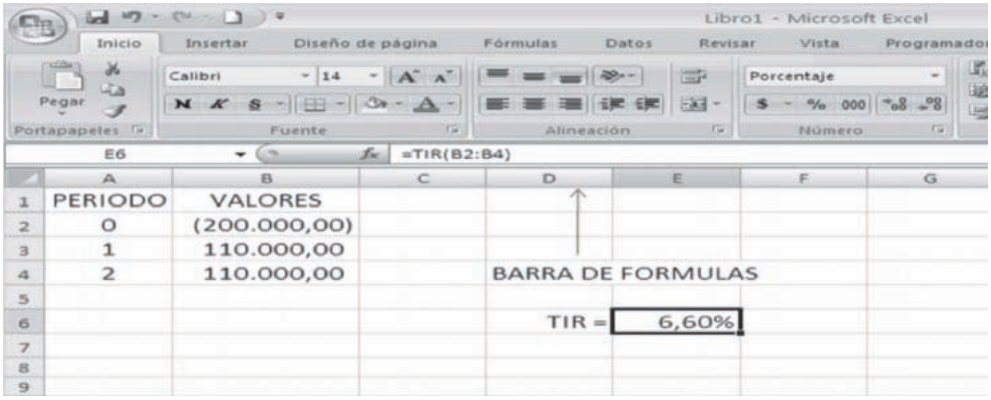
$$i_2 = -151.60\% \text{ anual}$$

En este caso hay dos soluciones reales que satisfacen matemáticamente el problema, pero optamos por la solución positiva considerando que es la solución que tiene sentido económico real.

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 4 (CF)	MODE 4	MENU F5 (DCF)	CASH	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	SHIFT AC EXE AC	Csh=D.EDITOR X EXE	F:CAJA
200.000 +/- CFj	(-) 200.000 CFj	(-) 200.000 F2	SHIFT CLR. D.EDITOR EXE. EXE. AC	CLEAR DATA
110.000 CFj	110.000 CFj	110.000 F2	En 1, (-) 200.000 EXE	200.000 +/- INPUT
2 Nj	2 Nj	2 F3	En 2, 110.000 EXE y en 3, 110.000 EXE	110.000 INPUT, 2 INPUT
IRR	IRR EXE	F5, F2	CASH	CALC
			En IRR oprima SOLVE	TIR

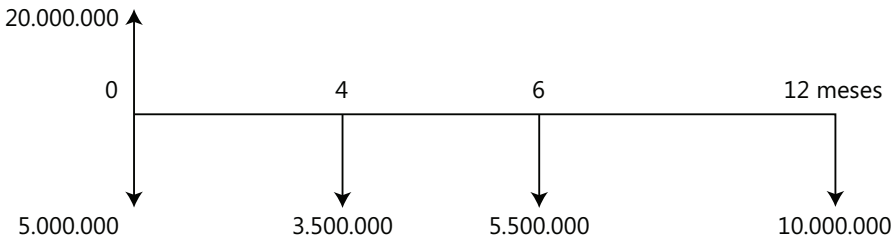
Como se aprecia en los ejemplos 8.8 y 8.9, en la medida en que el horizonte del proyecto tiende a ser mayor a dos períodos, la ecuación para encontrar la TIR se vuelve prácticamente imposible de resolver manualmente. Para obviar tal dificultad y sacrificando la exactitud que el método analítico proporciona, se ha diseñado un algoritmo de solución denominado *"ensayo y error"(popularmente conocido como el método del tanteo),*. Este procedimiento, aunque ya entrado en desuso por la existencia de las calculadoras financieras y la hoja de cálculo Excel, ha sido analizado en el capítulo 5, ejercicio 5.20. Para efectos académicos s e recomienda al lector su consulta.

Solución con la hoja de cálculo Excel



Ejemplo 8.10

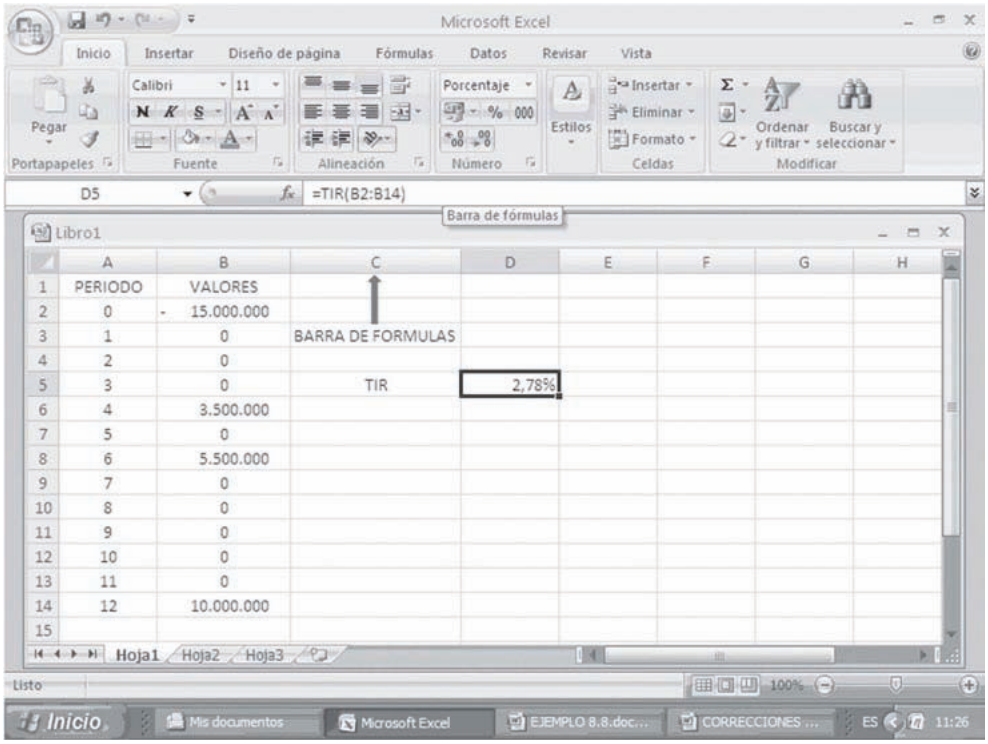
El señor Pedro le compró a ORBE LTDA un lote de terreno por valor de $ 20.000.000 y se comprometió a pagarlo de la siguiente forma: una cuota inicial de $ 5.000.000, un pago de $ 3.500.000 dentro de 4 meses, un pago de $ 5.500.000 dentro de 6 meses y un pago de $ 10.000.000 dentro de 12 meses. Calcule la tasa de financiación. Utilice la hoja de cálculo Excel.



En el período cero debe aparecer el valor neto a financiar, es decir, el valor del lote de terreno menos el valor de la cuota inicial. (Ver figura 8.10).

Solución con la hoja de cálculo Excel

Figura 8.10

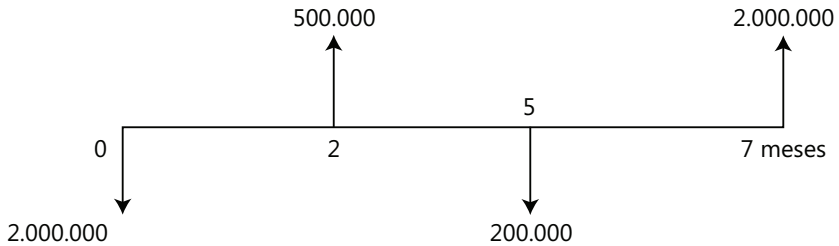


	A	B	C	D
1	PERIODO	VALORES		
2	0	- 15.000.000		
3	1	0	BARRA DE FORMULAS	
4	2	0		
5	3	0	TIR	2,78%
6	4	3.500.000		
7	5	0		
8	6	5.500.000		
9	7	0		
10	8	0		
11	9	0		
12	10	0		
13	11	0		
14	12	10.000.000		
15				

La tasa de financiación es del 2.78% (celda D5), que corresponde a la TIR del proyecto.

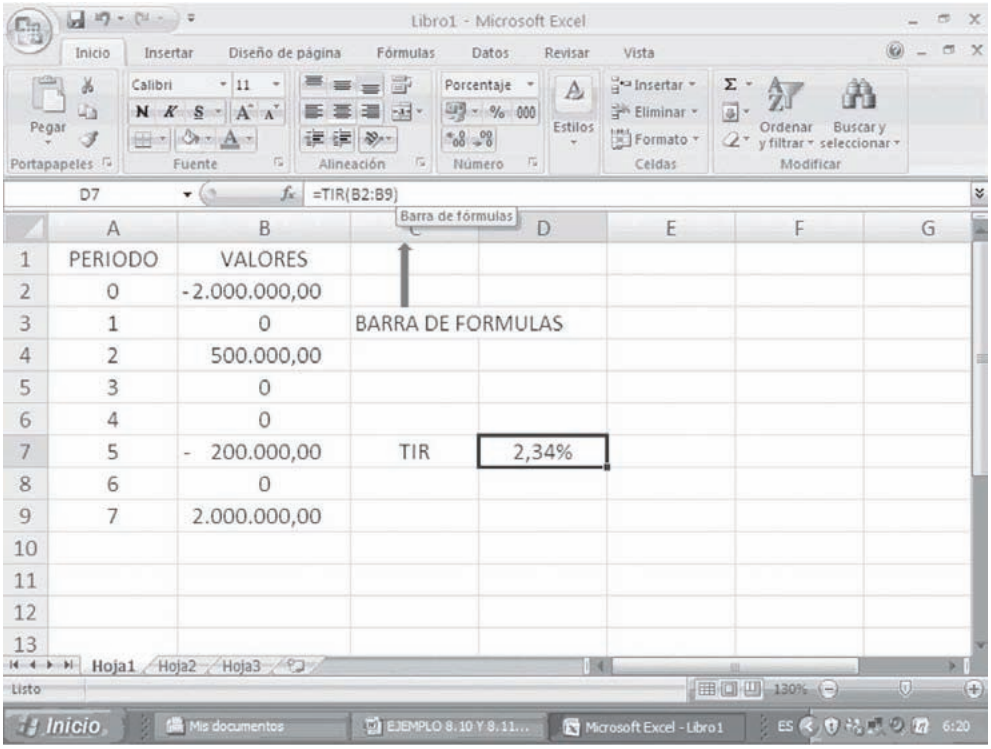
Ejemplo 8.11

El señor Pedro Pablo abre una cuenta de ahorros en el Banco de Colombia con $ 2.000.000. Transcurridos 2 meses retira $ 500.000, en el mes 5 hace un nuevo depósito de $ 200.000 y al final del mes 7 tiene un saldo de $ 2.000.000. Calcular la tasa de interés que le reconocieron. Utilice la hoja de cálculo Excel.



En la hoja de cálculo, los depósitos se ingresan con signo negativo y los retiros con signo positivo. (Ver figura 8.11).

Figura 8.11



	A	B	C	D	E	F	G
1	PERIODO	VALORES					
2	0	-2.000.000,00					
3	1	0	BARRA DE FORMULAS				
4	2	500.000,00					
5	3	0					
6	4	0					
7	5	- 200.000,00	TIR	2,34%			
8	6	0					
9	7	2.000.000,00					
10							
11							
12							
13							

La tasa de interés que le reconocieron a Pedro Pablo fue del 2.34% mensual (D7).

Método gráfico para calcular la TIR

La TIR es la tasa de interés que hace el VPN = 0. Una vez construida la ecuación del VPN, se le asignan diferentes valores a la tasa de descuento con el fin de obtener diferentes valores del VPN, partiendo de una tasa del 0%. Mediante este procedimiento se diseña una gráfica que se denomina "*el perfil del VPN*".

Utilizando el flujo de caja del ejercicio 8.1, se tiene la siguiente tabla:

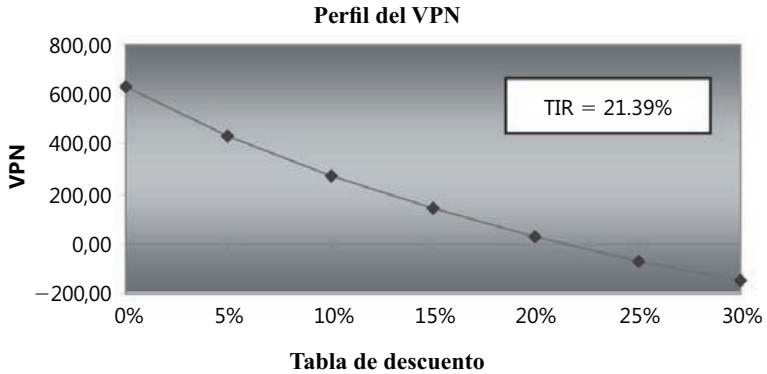
Tasa	0%	5%	10%	15%	20%	25%	30%	35%
VPN	630.00	434.89	274.26	140.56	28.16	−67.20	−148.79	−219.12

¿Cómo se grafica el perfil del VPN

- Se construye el flujo de caja del proyecto de inversión en el que deben aparecer, en forma exacta, los ingresos y egresos.
- Las ordenadas del plano cartesiano corresponderán al valor del VPN y las abscisas a la tasa de descuento.
- Se calcula el valor del VPN para diferentes tasas de descuento, partiendo de una tasa del 0%. Para una tasa de descuento del 0%, el valor del VPN se calcula sumando en forma algebraica el flujo de caja del proyecto, asumiendo que los egresos son

valores negativos y los ingresos son positivos. La forma más práctica es con la hoja de cálculo Excel.

Al obtener valores del VPN positivos y negativos, se puede dibujar el *perfil del VPN*.



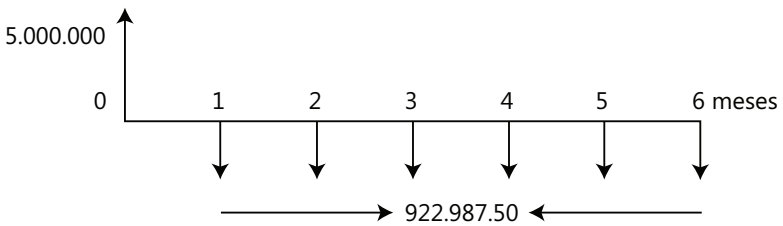
Si analizamos la figura que corresponde al ejemplo 8.1, de los dos inversionistas, se observa que la curva corta la abscisa en un punto que corresponde a la tasa de descuento del 21.39%, que pasa a ser el valor de la TIR.

Significado de la TIR

Cuando se realiza una operación financiera, generalmente, se cree que la tasa de interés obtenida (TIR) representa el rendimiento o costo sobre la inversión inicial. La TIR es la tasa de interés pagada sobre los saldos de dinero tomado en préstamo o la tasa de rendimiento ganada sobre el saldo no recuperado de la inversión.

Ejemplo 8.12

A un empleado le financian un electrodoméstico que tiene un precio de $5.000.000, por medio de 6 cuotas mensuales, a una tasa del 3.0% mensual. Calcular el valor de las cuotas.



$$A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$A = 5.000.000\left[\frac{0.03(1+0.03)^6}{(1+0.03)^6 - 1}\right]$$

$$A = \$\ 922.987.50$$

Casio FC 100	Casio FC 200	Casio FC 1000	Casio FC 100V y 200V	HP 17 BII y 19 BII
MODE 1	MODE 4	MENU	CMPD	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	5.000.000 PV EXE	VDT
5.000.000 PV	5.000.000 PV	SHIFT AC EXE AC	3 I % EXE	CLEAR DATA
3 i %	3 i %	5.000.000 F3	6 n EXE	5.000.000 VA
6 n	6 n	3 F2	0 FV EXE	3 % IA
COMP PMT	COMP PMT EXE	6 F1	PMT SOLVE	6 N
		COMP F4		PAGO

En Excel: = PAGO (tasa; nper; VA; VF; tipo)

= PAGO (3%; 6; 5.000.000; 0)

Mes	Cuota	Pago por interés	Abono a capital	Saldo
0				5.000.000.00
1	922.987.50	150.000.000	772.987.50	4.227.012.50
2	922.987.50	126.810.37	796.177.13	3.430.835.37
3	922.987.50	102.925.06	820.062.44	2.610.772.93
4	922.987.50	78.323.18	844.664.31	1.766.108.61
5	922.987.50	52.983.26	870.004.24	896.104.37
6	922.987.50	26.883.13	896.104.37	0

Como se puede apreciar en la tabla de amortización, la aplicación de la tasa de interés del 3% mensual (TIR) se hace sobre el saldo pendiente de pago al principio de cada mes. Igualmente se observa que los intereses se calculan sobre saldos y que con el último pago de $ 922.987.50 el saldo queda en cero.

Si el análisis se hace desde el punto de vista del prestamista, significa que obtiene un rendimiento sobre la inversión no amortizada al principio de cada mes del 3% y que con el último ingreso de $ 922.987.50 recupera su inversión, además de los rendimientos mensuales correspondientes. Desde el punto de vista del cliente, significa que cada mes paga el 3% sobre el saldo no amortizado.

Podemos concluir que la TIR es la tasa de interés a que rinden los dineros que permanecen invertidos en un proyecto de inversión. En una forma más amplia, la TIR es la tasa de interés pagada por un crédito, cualquiera sea su naturaleza, pero no sobre su valor inicial sino sobre saldos insolutos.

Solamente existe una sola situación en la cual la TIR mide la rentabilidad sobre la inversión incial y ésta se presenta cuando la operación financiera (o proyecto de inversión) tiene un solo período. Así, por ejemplo, si se invierte hoy $100 y se reciben al final del año $120, la TIR es igual al 20% anual y en este caso la rentabilidad del 20% se obtiene sobre los $100, que es la inversión inicial. Para cualquier otro caso, siempre y cuando el proyecto tenga una duración mayor de un período, la TIR mide la rentabilidad sobre los saldos insolutos y no sobre la inversión inicial.

Criterios de selección de alternativas usando la TIR

Cuando se utiliza el método de la TIR para evaluar proyectos de inversión, los criterios de aceptación o rechazo de un proyecto, son los siguientes:

- Cuando la TIR es mayor que la tasa de oportunidad, el proyecto se debe aceptar. El inversionista obtiene un rendimiento mayor del exigido; el inversionista gana más de lo que quería ganar.
- Cuando la TIR es igual a la tasa de oportunidad, es indiferente emprender o no el proyecto de inversión.
- Cuando la TIR es menor que la tasa de oportunidad, el proyecto se debe rechazar. El inversionista gana menos de lo que quería ganar.

Tanto el VPN como la TIR son indicadores que permiten evaluar proyectos de inversión. Cuando empleamos el VPN estamos calculando en pesos del presente el rendimiento de los dineros involucrados en el proyecto. La TIR mide también la rentabilidad de un proyecto sobre los dineros que todavía permanecen invertidos en él, pero expresada como tasa de interés. Aunque el cálculo del VPN es mucho más sencillo que el de la TIR, ésta última es más comprensible. Cuando hablamos de un proyecto que rinde el 20% anual, todo el mundo sabe lo que se quiere decir.

En el cálculo del VPN la variable determinante es la tasa de descuento. Podemos decir que el VPN es una función de esta tasa. A medida que ésta cambia, el VPN también cambia. No podemos calcular el VPN si no está determinada con anterioridad la tasa de descuento, mientras que la TIR no depende de esta tasa para su cálculo. Son muchos los inversionistas que prefieren el criterio de la TIR sobre el VPN, para evaluar proyectos de inversión.

4. Tasa verdadera de rentabilidad (TIR modificada)

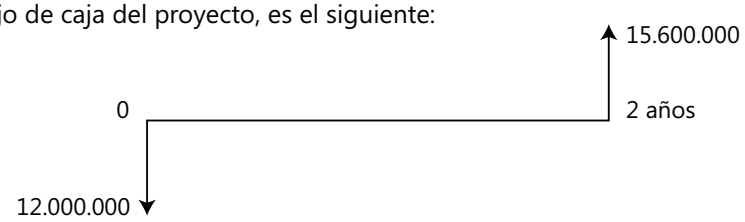
El proceso matemático de cálculo de la TIR supone que los flujos que libera el proyecto son reinvertidos a la misma TIR y esta suposición es irreal cuando la TIR es mayor o menor que la tasa de oportunidad del inversionista. Precisamente, por esta suposición se llama a la TIR, tasa interna de retorno, debido a que no considera factores económicos externos al proyecto.

Supóngase que un proyecto de inversión tiene una TIR del 40% anual. Cada año el proyecto libera fondos, porque no los necesita, que no se pueden reinvertir por fuera del proyecto al 40% anual, sino a la tasa de oportunidad del inversionista que es del 20% anual. En este caso se presenta una dualidad: la TIR del proyecto como característica propia de él, que sigue siendo el 40%, y la verdadera rentabilidad del inversionista, que resulta de considerar la reinversión de los flujos que libera el proyecto, a una tasa mínima igual a su tasa de oportunidad. *El proyecto no puede responder por el buen uso que el inversionista le dé a los recursos producidos por él* (*Varela, 1989*).

Ejemplo 8.13

Pedro Pérez invierte hoy $ 12.000.000 en un negocio de repuestos y después de 2 años recibe $ 15.600.000. Calcular la TIR.

El flujo de caja del proyecto, es el siguiente:



Planteamos la ecuación de valor, ubicando la fecha focal en el año 2.

$$15.600.000 = 12.000.000(1 + i)^2$$

$$i = 14.02\% \text{ anual}$$

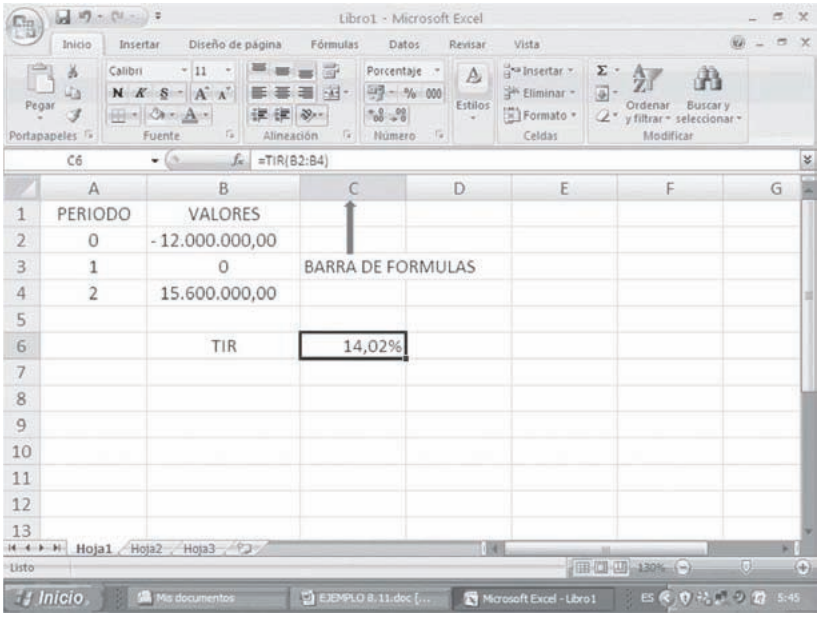
En este caso la tasa del 14.02% anual corresponde a la TIR del proyecto y al mismo tiempo es la rentabilidad que obtiene el señor Pedro Pérez, debido a que no existe la posibilidad de la reinversión de flujos de caja durante la vida del proyecto, pues este consiste en devolver la inversión inicial en un flujo de caja único de $ 15.600.000 al final del segundo año.

CASIO FC 100	CASIO FC 200	CASIO FC 1.000	H. P. 19 B II
MODE 1	MODE 4	MENU	FIN
SHIFT AC	SHIFT AC EXE AC	F2 (COMPOUND)	VDT
12.000.000 +/- PV	(-) 12.000.000 PV	SHIFT AC EXE AC	CLEAR DATA
15.600.000 FV	15.600.000 FV	(-) 12.000.000 F3	12.000.000 +/- VA
2 N	2 N	15.600.000 F5	15.600.000 VF
COMP i%	COMP i% EXE	2 F1	2 N
		COMP F2	% IA

En Excel: = TASA (nper; pago; VA; VF; tipo)

= TASA (2; 0; −12.000.000; 15.600.000)

Solución con la hoja de cálculo Excel



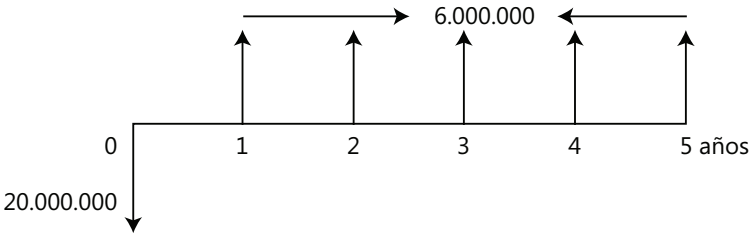
Ejemplo 8.14

Unos alumnos universitarios aportan $ 20.000.000 para instalar al frente de su universidad un negocio de computadores. Al realizar su estudio económico, esperan recibir beneficios netos cada año de $ 6.000.000 durante 5 años. El monto de los beneficios anuales los pueden reinvertir a una tasa del 10% anual, calcular:

a. La TIR del proyecto.

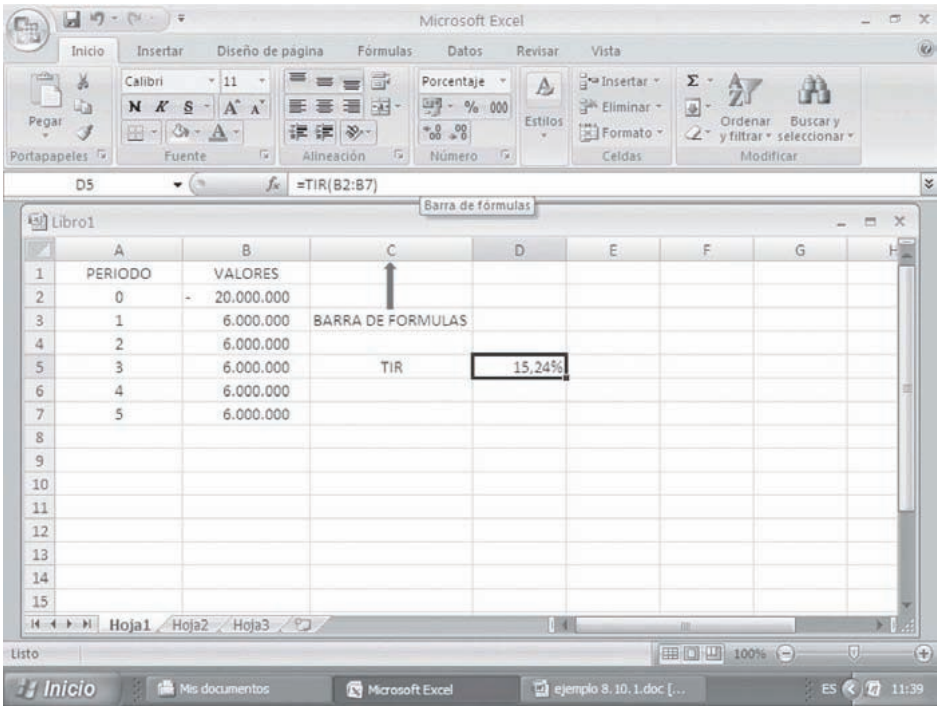
b. La verdadera tasa de rendimiento de los alumnos.

El flujo de caja del proyecto corresponde a una anualidad vencida con una inversión inicial de $ 20.000.000 y 5 ingresos de $ 6.000.000.



Utilizando cualquier método para el cálculo de la TIR encontramos que para este proyecto es del 15.24% anual.

Solución con la hoja de cálculo Excel



Si le aplicamos a la inversión inicial de $ 20.000.000 una tasa de interés del 15.24% anual, el valor de los intereses es de $ 3.048.000 y observamos que el proyecto devuelve al final del primer año un valor de $ 6.000.000. Esto indica que con la liberación de un flujo de $ 6.000.000 en el primer año, el proyecto le está devolviendo al inversionista $ 2.952.000 de la inversión inicial que ya no los necesita, quedando un saldo de $ 17.048.000. Sobre este saldo, el proyecto le da una rentabilidad del 15.24% anual durante el segundo año, y así sucesivamente Esto indica que la TIR mide la rentabilidad que producen los dineros que aún permanecen invertidos en el proyecto y no sobre la inversión inicial.

Miremos qué sucedería si los flujos de caja que libera el proyecto se reinvirtieran a la misma TIR.

$F=6.000.000(1.1524)^4+6.000.000(1.1524)^3+6.000.000(1.1524)^2+6.000.000(1.1524)^1+6.000.000$

$F=\$\ 40.648.661$

Lo que indica que después de 5 años, por la reinversión de los flujos que libera el proyecto a una tasa del 15.24% anual, los alumnos tienen un valor terminal de $ 40.648.661.

Aplicando la ecuación básica, se tiene:

$$40.648.661 = 20.000.000(1 + i)^5$$

$$2.032 = (1 + i)^5$$

$$(2.032)^{1/5} = (1 + i)$$

$$i = 15.24\%\ \text{anual}$$

Pero, el ejercicio supone que los alumnos pueden reinvertir los fondos que libera el proyecto a una tasa del 10% anual. En este caso el valor acumulado después de los 5 años es:

$F = 6.000.000(1.10)^4+6.000.000(1.10)^3+6.000.000(1.10)^2+6.000.000(1.10)^1+6.000.000$

$F = \$\ 36.630.600$

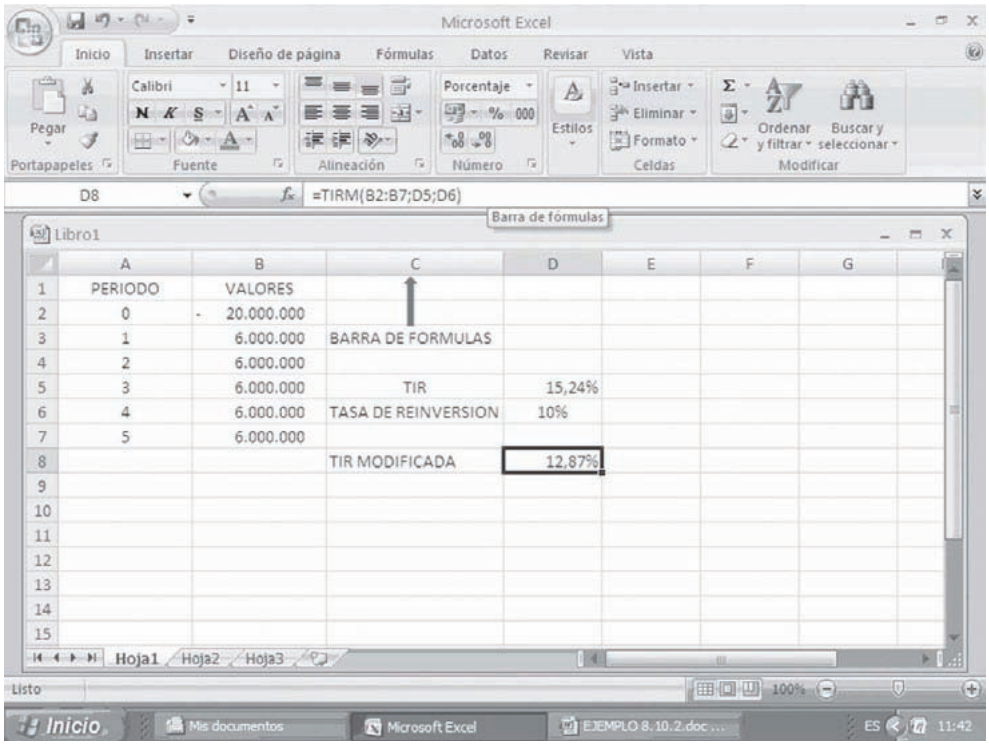
Construyendo el flujo de caja para los alumnos, se tiene:

Aplicando la ecuación básica, se tiene: $36.630.600 = 20.000.000(1 + i)^5$

$i = 12.87\%$ anual = tasa verdadera de rentabilidad de los alumnos

Excel tiene una función para calcular la tasa verdadera de rentabilidad (TIR MODIFICADA) que se llama TIRM, cuya sintaxis es:

TIRM (valores; tasa financiamiento (TIR); tasa de reinversión)



5. Tasa interna de retorno no periódica (TIR.NO.PER)

Es la función financiera que calcula la tasa interna de retorno anual generada por un proyecto de inversión cuyos flujos netos de efectivo no tienen por que ser periódicos.

El cálculo de la TIR en los ejercicios anteriores lo hemos realizado bajo la condición de que los flujos netos de efectivo están al final de cada período. Es práctico suponer que durante la vida útil de una inversión se presentarán ingresos y egresos en períodos menores al año y que, generalmente, no se presentan con la misma periodicidad. En este último caso, la TIR recibe el nombre de TIR.NO.PER.

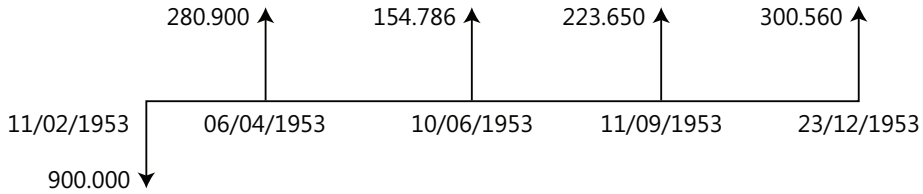
Ejemplo 8.15

Se hizo una inversión por $ 900.000 el 11 de febrero de 1953 y se recibieron los siguientes beneficios:

Fecha	Valor
06/04/53	$ 280.900
10/06/53	$ 154.786
11/09/53	$ 223.650
23/12/53	$ 300.560

Calcular la TIR

Se observa que los flujos netos de efectivo no son periódicos. La solución matemática consiste en construir una ecuación que iguale los ingresos con los egresos a una determinada tasa (TIR), es decir, que haga el VPN igual a cero. Para construir la ecuación se hace necesario, además, calcular el número de días calendarios que hay entre la fecha de cada flujo neto de efectivo y la fecha de la inversión (ver en el capítulo 2, tabla para calcular el número exacto de días.).



$$VPE = 900.000 \qquad VPI = \frac{280.900}{(1+i)^{\frac{54}{365}}} + \frac{154.786}{(1+i)^{\frac{119}{365}}} + \frac{223.650}{(1+i)^{\frac{212}{365}}} + \frac{300.560}{(1+i)^{\frac{315}{365}}}$$

Haciendo el VPN igual a cero, tenemos:

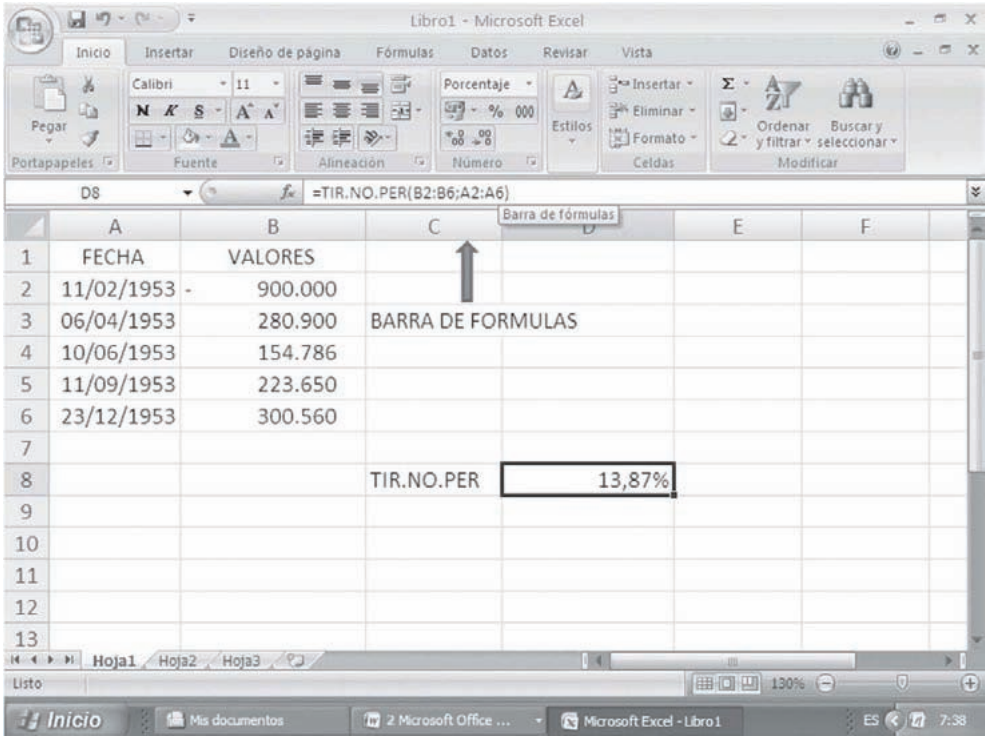
$$900.000 = \frac{280.900}{(1+i)^{\frac{54}{365}}} + \frac{154.786}{(1+i)^{\frac{119}{365}}} + \frac{223.650}{(1+i)^{\frac{212}{365}}} + \frac{300.560}{(1+i)^{\frac{315}{365}}}$$

Por interpolación lineal obtenemos un valor de 13.87% EA. Este método de cálculo complejo y tedioso, hoy en día está en desuso.

Para calcular la TIR no periódica el Excel tiene la función TIR.NO.PER, cuya sintaxis es:

TIR.NO.PER (valores; fechas; estimar)

Para aplicarla en la hoja de cálculo, registramos las fechas que deben estar en el formato números y no en el formato de fechas, porque nos permite usar cómodamente rangos; registramos los valores (que no tienen que ser necesariamente periódicos) que corresponden a los flujos netos de efectivo, con sus respectivos signos (ingresos con signo positivo y egresos con signo negativo). Estimar es un valor aproximado al resultado que sirve de referencia inicial para el cálculo iterativo de la función, el cual podemos omitir. Aplicamos la función TIR.NO.PER escribiendo el signo igual y su notación, abrimos paréntesis y escribimos el rango de valores y el rango de fechas y cerramos paréntesis. Al dar ENTER, obtenemos un valor de 13.87% EA.



Cuestionario

1. ¿A medida que aumenta la tasa de descuento disminuye el valor del VPN?
2. ¿El inconveniente del método del VPN es que su valor depende de la tasa de descuento?
3. ¿Qué es la tasa de descuento?
4. ¿Un VPN negativo indica que se pierde dinero en el proyecto?
5. Analice la siguiente afirmación: la TIR es la tasa de interés a que rinde la inversión inicial de un proyecto de inversión
6. ¿Qué es la TIR?
7. ¿La tasa de descuento es la misma TIR?
8. ¿La tasa de oportunidad refleja el costo de oportunidad de un inversionista?
9. ¿Para que exista una TIR se requiere que los beneficios sean iguales o mayores que la inversión inicial de un proyecto?

Solucionario capítulo 8

EJERCICIO 1. Se va a montar un almacén que requiere una inversión inicial de $ 50.000.000 y luego inversiones adicionales de $ 500.000 mensuales desde el final del tercer mes hasta el final del mes décimo. Se espera obtener utilidades mensuales, a partir del segundo mes, en forma indefinida, de $ 1.000.000. Si la tasa de oportunidad es del 6% mensual, ¿se recomienda el proyecto? Utilice el método del VPN.

Calculamos el valor presente de los egresos:

$$VPE = 50.000.000 + 500.000\frac{\left[\frac{(1+0.06)^{8}-1}{0.06(1+0.06)^{8}}\right]}{(1+0.06)^{2}} = \$\ 52.763.347.19$$

Calculamos el valor presente de los ingresos:

$$VPI = \frac{\frac{A}{i}}{(1+i)^{1}} = \frac{\frac{1.000.000}{0.06}}{(+0.06)^{1}} = \$\ 15.723.270.44$$

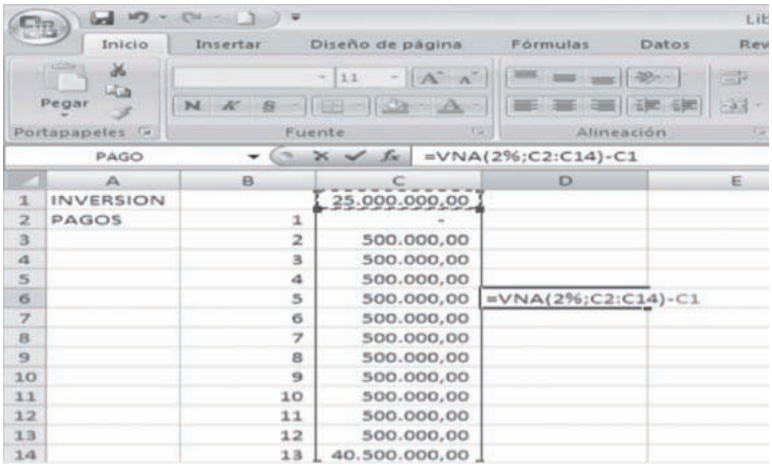
$VPN_{(6\%)} = VPI - VPE = \$\ 15.723.270.44 - \$\ 52.763.347.19 = \$\ -37.040.076.75$. Por ser el VPN menor que cero se rechaza el proyecto.

EJERCICIO 2. Pedro compró una casa por $ 25.000.000 y espera arrendarla por $ 500.000 mensuales pagados en forma vencida, a partir del segundo mes y durante 12 meses, cuando espera venderla por $ 40.000.000. Si su tasa de oportunidad es del 2.0% mensual, ¿hizo buen negocio?

$$VPE = \$\ 25.000.000$$

$$VPI = 500.000\frac{\left[\frac{(1+0.02)^{12}-1}{0.02(1+0.02)^{12}}\right]}{(1+0.02)^{1}} + \frac{40.000.000}{(1+0.02)^{13}} = \$\ 36.105.291.80$$

$VPN_{(2\%)} = VPI - VPE = \$\ 36.105.291.80 - \$\ 25.000.000 = \$\ 11.105.291.80$, mayor que cero, lo que indica que hizo un buen negocio.



	A	B	C	D	E
1	INVERSION		25.000.000,00		
2	PAGOS	1	-		
3		2	500.000,00		
4		3	500.000,00		
5		4	500.000,00		
6		5	500.000,00	=VNA(2%;C2:C14)-C1	
7		6	500.000,00		
8		7	500.000,00		
9		8	500.000,00		
10		9	500.000,00		
11		10	500.000,00		
12		11	500.000,00		
13		12	500.000,00		
14		13	40.500.000,00		

EJERCICIO 3. Se invierten $ 500 con la expectativa de recibir $ 80 al final de cada uno de los siguientes 8 años. Calcular la TIR.

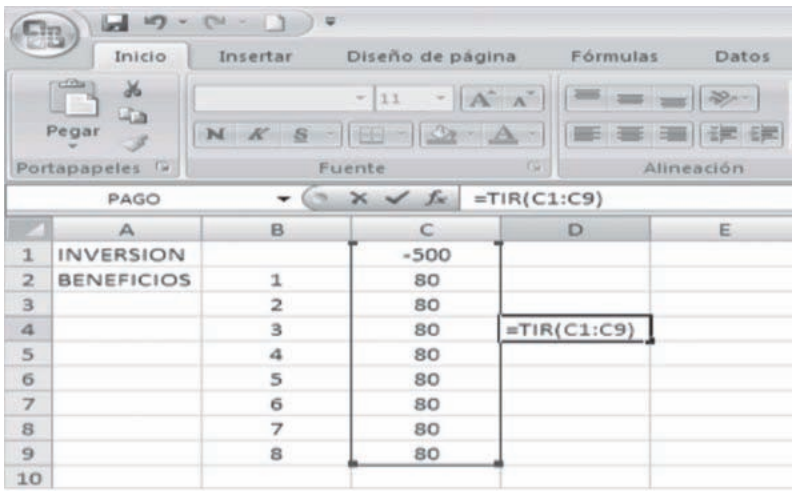
$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$500 = 80\left[\frac{(1+i)^8 - 1}{i(1+i)^8}\right]$$

Por interpolación lineal, $i = 5.84\%$ anual $=$ TIR

En Excel: $=$ TASA (8; -80; 500)

Hoja de cálculo Excel



	A	B	C	D	E
1	INVERSION		-500		
2	BENEFICIOS	1	80		
3		2	80		
4		3	80	=TIR(C1:C9)	
5		4	80		
6		5	80		
7		6	80		
8		7	80		
9		8	80		
10					

EJERCICIO 4. Un electrodoméstico que tiene un precio de contado de $ 1.500.000, se financia con 12 cuotas mensuales iguales anticipadas de $ 153.681. ¿Qué tasa de interés le cobraron por la financiación?

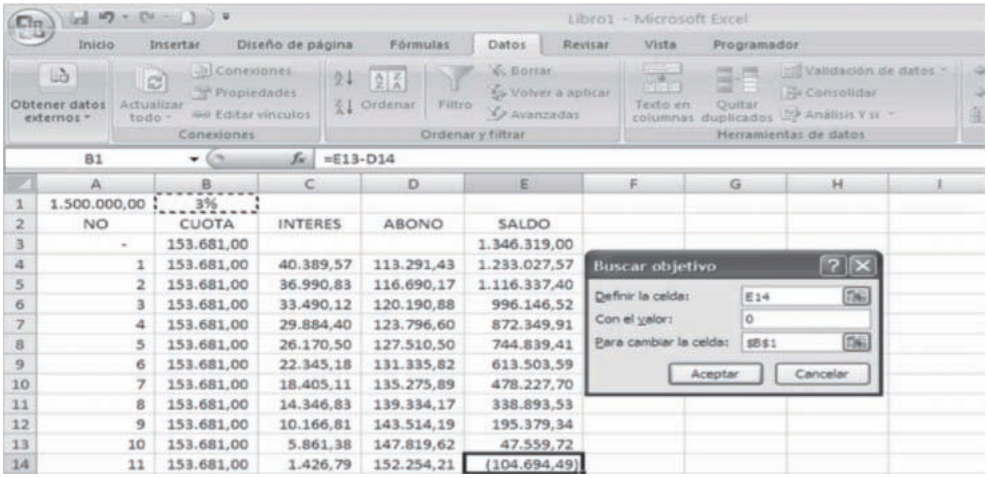
$$P = A(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$1.500.000 = 153.681(1+i)\left[\frac{(1+i)^{12} - 1}{i(1+i)^{12}}\right]$$

Por interpolación lineal, $i = 4.0\%$ mensual

En Excel: $= \text{TASA}(12; -153681; 1.500.000; 0, 1)$

Hoja de cálculo Excel



	A	B	C	D	E
1	1.500.000,00	3%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	-	153.681,00			1.346.319,00
4	1	153.681,00	40.389,57	113.291,43	1.233.027,57
5	2	153.681,00	36.990,83	116.690,17	1.116.337,40
6	3	153.681,00	33.490,12	120.190,88	996.146,52
7	4	153.681,00	29.884,40	123.796,60	872.349,91
8	5	153.681,00	26.170,50	127.510,50	744.839,41
9	6	153.681,00	22.345,18	131.335,82	613.503,59
10	7	153.681,00	18.405,11	135.275,89	478.227,70
11	8	153.681,00	14.346,83	139.334,17	338.893,53
12	9	153.681,00	10.166,81	143.514,19	195.379,34
13	10	153.681,00	5.861,38	147.819,62	47.559,72
14	11	153.681,00	1.426,79	152.254,21	(104.694,49)

EJERCICIO 5. Elija la mejor de las siguientes alternativas, utilizando el VPN:

AÑO	0	1	2	3
ALTERNATIVA A	−500	130	280	350
ALTERNATIVA B	−450	100	70	580

Asuma una tasa de oportunidad del 10% anual.

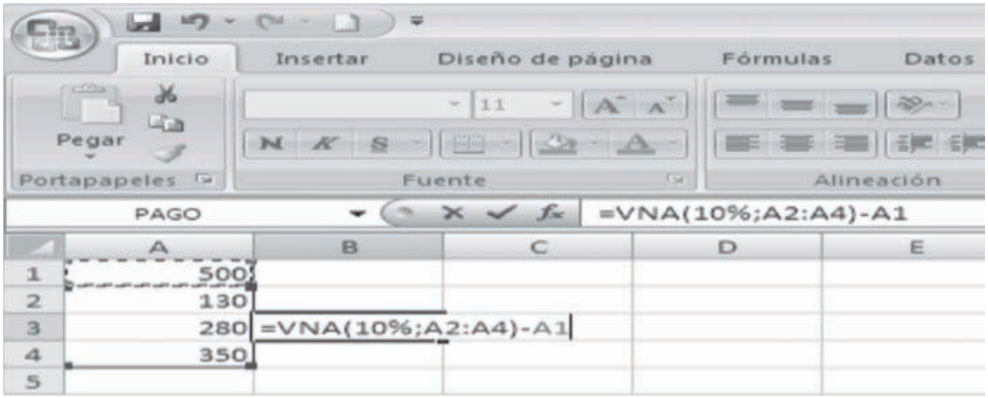
ALTERNATIVA A:

$$VPE = \$\ 500$$

$$VPI = \frac{130}{(1+0.10)} + \frac{280}{(1+0.10)^2} + \frac{350}{(1+0.10)^3} = \$\ 612.55$$

$$VPN = VPI - VPE = \$\ 612.55 - \$\ 500 = \$\ 112.55$$

Hoja de cálculo Excel



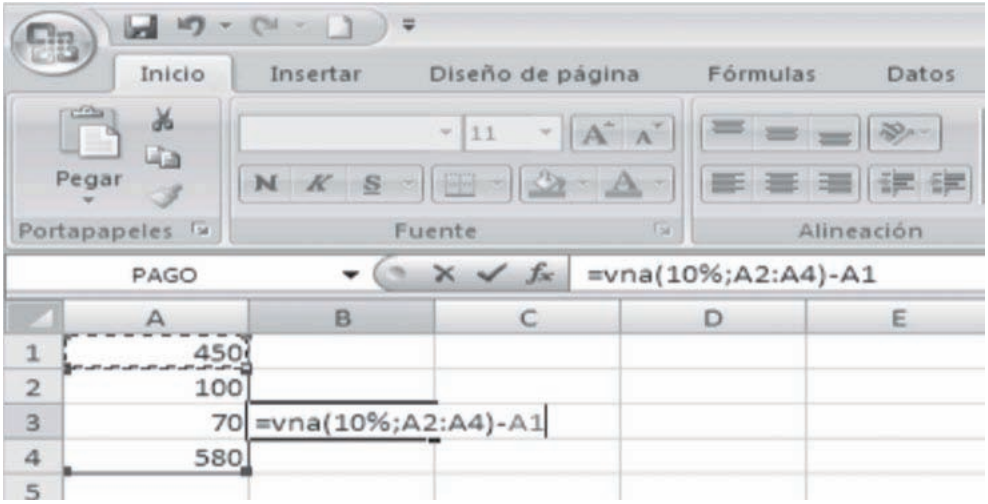
ALTERNATIVA B:

$$VPE = \$\ 450$$

$$VPI = \frac{100}{(1+0.10)} + \frac{70}{(1+0.10)^2} + \frac{580}{(1+0.10)^3} = \$\ 584.52$$

$$VPN = VPI - VPE = \$\ 584.52 - \$\ 450 = \$\ 134.52$$

Hoja de cálculo Excel



Comparando los valores del VPN para cada alternativa, concluimos que la mejor alternativa es la B, por tener un mayor VPN.

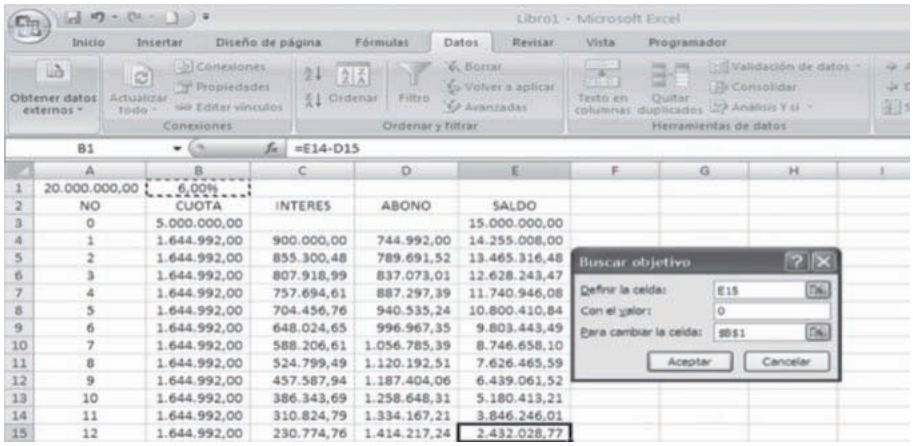
EJERCICIO 6. Un vehículo que tiene un precio de contado de $ 20.000.000, se financia de la siguiente forma: cuota inicial de $ 5.000.000 y 12 cuotas mensuales iguales vencidas de $ 1.644.992. Calcule la tasa de interés de financiación.

Ecuación de valor con fecha focal en el momento cero:

$$20.000.000 = 5.000.000 + 1.644.992\left[\frac{(1+i)^{12}-1}{i(1+i)^{12}}\right]$$

Por interpolación lineal, $i = 4.50\%$ mensual

En Excel: = TASA (12; −1.644.992; 15.000.000)



	A	B	C	D	E
1	20.000.000,00	6,00%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	5.000.000,00			15.000.000,00
4	1	1.644.992,00	900.000,00	744.992,00	14.255.008,00
5	2	1.644.992,00	855.300,48	789.691,52	13.465.316,48
6	3	1.644.992,00	807.918,99	837.073,01	12.628.243,47
7	4	1.644.992,00	757.694,61	887.297,39	11.740.946,08
8	5	1.644.992,00	704.456,76	940.535,24	10.800.410,84
9	6	1.644.992,00	648.024,65	996.967,35	9.803.443,49
10	7	1.644.992,00	588.206,61	1.056.785,39	8.746.658,10
11	8	1.644.992,00	524.799,49	1.120.192,51	7.626.465,59
12	9	1.644.992,00	457.587,94	1.187.404,06	6.439.061,52
13	10	1.644.992,00	386.343,69	1.258.648,31	5.180.413,21
14	11	1.644.992,00	310.824,79	1.334.167,21	3.846.246,01
15	12	1.644.992,00	230.774,76	1.414.217,24	2.432.028,77

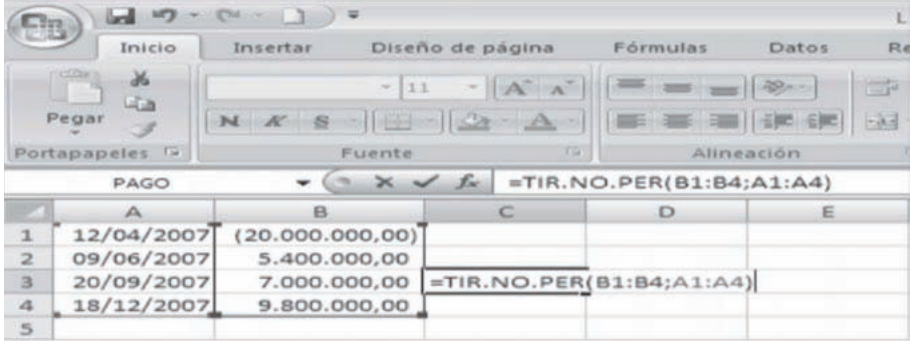
EJERCICIO 7. Se realiza una inversión el 12/04/2007 por valor de $ 20.000.000 y se esperan los siguientes beneficios:

Fecha	Valor
09/06/2007	$ 5.400.000
20/09/2007	$ 7.000.000
18/12/2007	$ 9.800.000

Calcular la TIR.

$$20.000.000 = \frac{5.400.000}{(1+i)^{\frac{58}{365}}} + \frac{7.000.000}{(1+i)^{\frac{161}{365}}} + \frac{9.800.000}{(1+i)^{\frac{250}{365}}}$$

Por interpolación lineal, TIR = 24.56% EA.



	A	B	C	D	E
1	12/04/2007	(20.000.000,00)			
2	09/06/2007	5.400.000,00			
3	20/09/2007	7.000.000,00	=TIR.NO.PER(B1:B4;A1:A4)		
4	18/12/2007	9.800.000,00			
5					

EJERCICIO 8. Con la misma información del ejercicio 7, diga si la inversión le conviene o no a un inversionista que tiene una tasa de oportunidad del 23% EA.

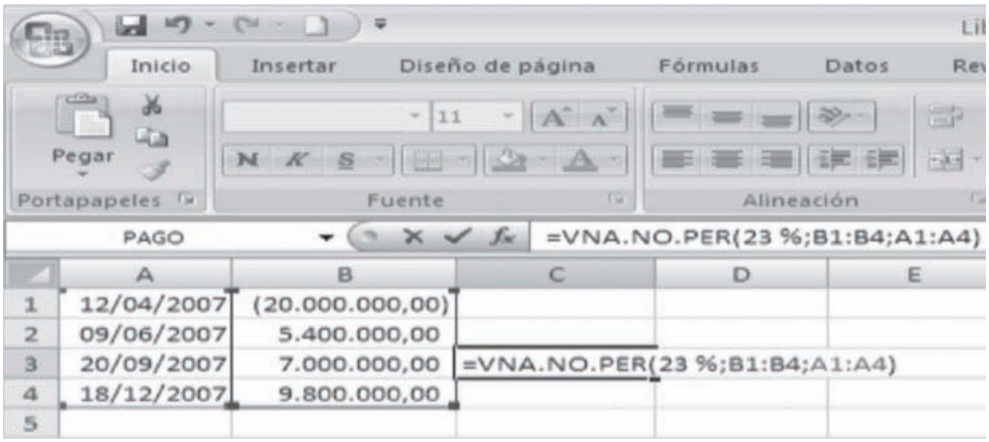
$$\text{VPE} = \$\ 20.000.000$$

$$\text{VPI} = \frac{5.400.000}{(1+0.23)^{\frac{58}{365}}} + \frac{7.000.000}{(1+0.23)^{\frac{161}{365}}} + \frac{9.800.000}{(1+0.23)^{\frac{250}{365}}} = \$\ 20.118.847.56$$

$$\text{VPN}_{(23\%)} = \text{VPI} - \text{VPE} = \$\ 20.118.847.56 - \$\ 20.000.000 = \$\ 118.847.56$$

Al obtener un VPN positivo, se infiere que la inversión le conviene al inversionista.

Hoja de cálculo Excel



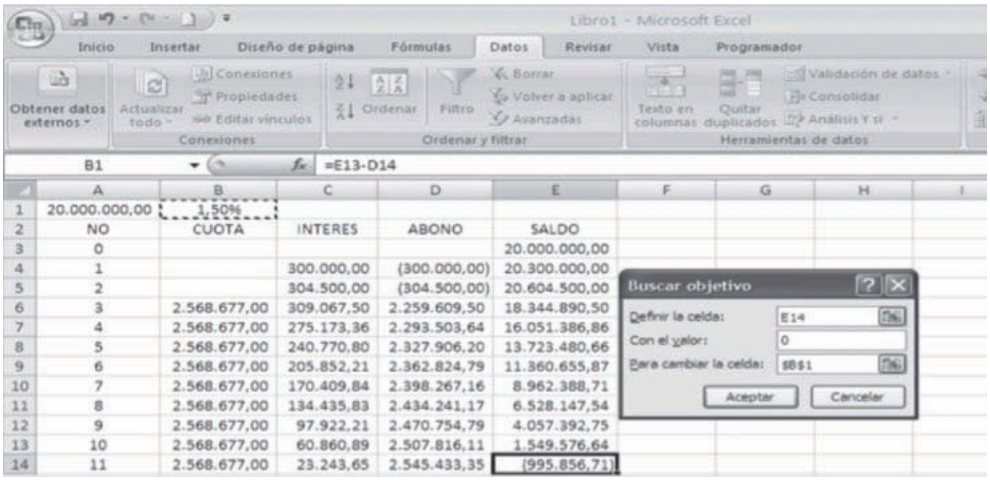
EJERCICIO 9. Un activo que tiene un valor de contado de $ 20.000.000, se va a financiar con 9 cuotas mensuales iguales $ 2.568.677, cargándole una tasa de interés del 3% mensual. Usted consigue con su acreedor comenzar a pagarle las cuotas 3 meses después de celebrada la negociación. Calcular la tasa de interés que le cobraron realmente.

Ecuación de valor con fecha focal en el momento cero:

$$20.000.000 = \frac{2.568.677\left[\dfrac{(1+i)^9 - 1}{i(1+i)^9}\right]}{(1+i)^2} = 2.11\%\ \text{mensual}$$

Por interporlación lineal: $i = 2.11\%$ mensual

Hoja de cálculo Excel



	A	B	C	D	E
1	20.000.000,00	1,50%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0				20.000.000,00
4	1		300.000,00	(300.000,00)	20.300.000,00
5	2		304.500,00	(304.500,00)	20.604.500,00
6	3	2.568.677,00	309.067,50	2.259.609,50	18.344.890,50
7	4	2.568.677,00	275.173,36	2.293.503,64	16.051.386,86
8	5	2.568.677,00	240.770,80	2.327.906,20	13.723.480,66
9	6	2.568.677,00	205.852,21	2.362.824,79	11.360.655,87
10	7	2.568.677,00	170.409,84	2.398.267,16	8.962.388,71
11	8	2.568.677,00	134.435,83	2.434.241,17	6.528.147,54
12	9	2.568.677,00	97.922,21	2.470.754,79	4.057.392,75
13	10	2.568.677,00	60.860,89	2.507.816,11	1.549.576,64
14	11	2.568.677,00	23.243,65	2.545.433,35	(995.856,71)

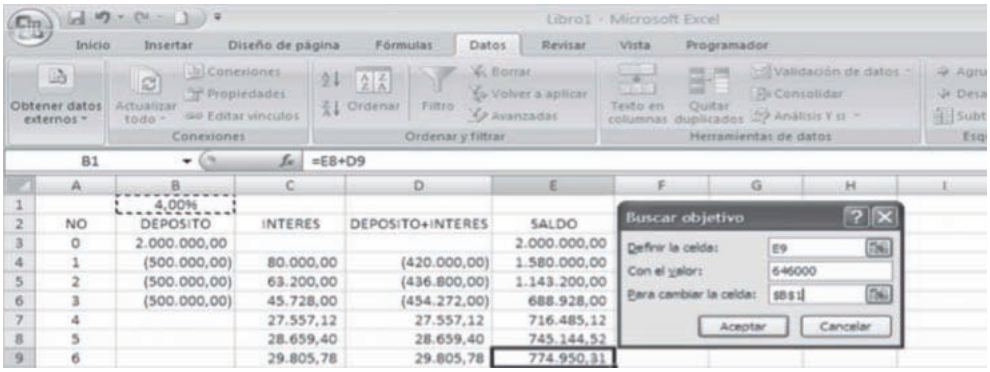
EJERCICIO 10. ¿Qué tasa de interés le reconocen a un inversionista si deposita hoy en una cuenta $ 2.000.000, retira en cada uno de los 3 meses siguientes la cuarta parte de lo depositado y todavía en el mes 6 tiene un saldo de $ 646.000?

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 6:

$$2.000.0000\left(1+i\right)^{6} = 500.000\left[\frac{\left(1+i\right)^{3}-1}{i}\right]\left(1+i\right)^{3} + 646.000$$

Por interpolación lineal, $i = 2.25\%$ mensual.

Hoja de cálculo Excel



	A	B	C	D	E
1		4,00%			
2	NO	DEPOSITO	INTERES	DEPOSITO+INTERES	SALDO
3	0	2.000.000,00			2.000.000,00
4	1	(500.000,00)	80.000,00	(420.000,00)	1.580.000,00
5	2	(500.000,00)	63.200,00	(436.800,00)	1.143.200,00
6	3	(500.000,00)	45.728,00	(454.272,00)	688.928,00
7	4		27.557,12	27.557,12	716.485,12
8	5		28.659,40	28.659,40	745.144,52
9	6		29.805,78	29.805,78	774.950,31

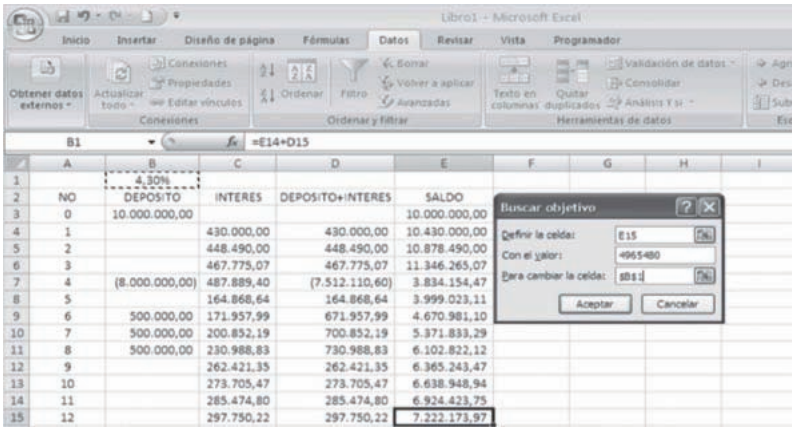
EJERCICIO 11. Usted abre una cuenta de ahorros con $ 10.000.000 y después de 4 meses retira $ 8.000.000. A partir del final del mes 6 y durante 3 meses consecutivos deposita $ 500.000 cada mes. Calcular la tasas de interés que le pagaron, si al final del año puede retirar de la cuenta $ 4.965.480.

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

$$8.000.000(1+i)^{8} + 4.965.480 = 10.000.000(1+i)^{12} + 500.000\left[\frac{(1+i)^{3}-1}{i}\right](1+i)^{4}$$

Por interpolación lineal, $i = 2.0\%$ mensual.

Hoja de cálculo Excel



	A	B	C	D	E
1		4,30%			
2	NO	DEPOSITO	INTERES	DEPOSITO+INTERES	SALDO
3	0	10.000.000,00			10.000.000,00
4	1		430.000,00	430.000,00	10.430.000,00
5	2		448.490,00	448.490,00	10.878.490,00
6	3		467.775,07	467.775,07	11.346.265,07
7	4	(8.000.000,00)	487.889,40	(7.512.110,60)	3.834.154,47
8	5		164.868,64	164.868,64	3.999.023,11
9	6	500.000,00	171.957,99	671.957,99	4.670.981,10
10	7	500.000,00	200.852,19	700.852,19	5.371.833,29
11	8	500.000,00	230.988,83	730.988,83	6.102.822,12
12	9		262.421,35	262.421,35	6.365.243,47
13	10		273.705,47	273.705,47	6.638.948,94
14	11		285.474,80	285.474,80	6.924.423,75
15	12		297.750,22	297.750,22	7.222.173,97

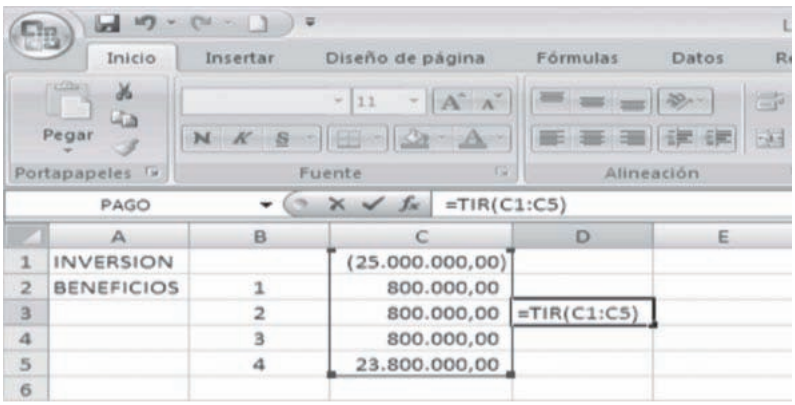
EJERCICIO 12. El señor Pedro Pablo compró un vehículo por $ 25.000.000 para arrendarlo a una empresa de transporte. Deducidos los gastos de mantenimiento, el vehículo produce unos beneficios netos de $ 800.000 durante los primeros 4 meses, cuando decide venderlo por $ 23.000.000. ¿Cuál fue el rendimiento obtenido?

Ecuación de valor con fecha focal en el momento cero:

$$25.000.000 = 800.000\left[\frac{(1+i)^{4}-1}{i(1+i)^{4}}\right] + \frac{23.000.000}{(1+i)^{4}}$$

Por interpolación lineal, $i = 1.24\%$ mensual.

Hoja de cálculo Excel



	A	B	C	D	E
1	INVERSION		(25.000.000,00)		
2	BENEFICIOS	1	800.000,00		
3		2	800.000,00	=TIR(C1:C5)	
4		3	800.000,00		
5		4	23.800.000,00		
6					

EJERCICIO 13. Un Banco otorga un crédito por valor de $ 40.000.000 con un plazo de un año para amortizarlo con cuotas trimestrales iguales de $ 10.632.715. Calcular:

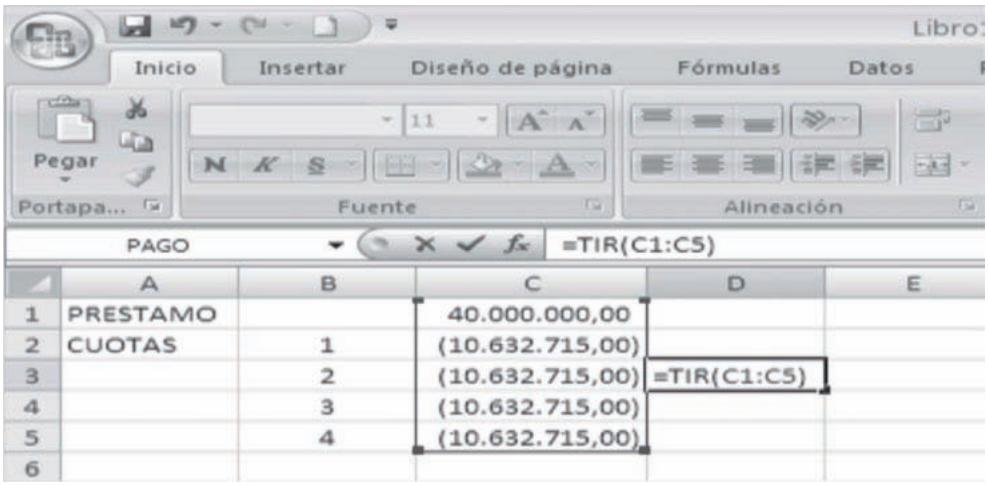
a) La tasa de interés del crédito (TIR).

$$40.000.000 = 10.632.715\left[\frac{(1+i)^4 - 1}{i(1+i)^4}\right]$$

Por interpolación lineal, $i = 2.50\%$ trimestral

En Excel: = TASA (4; −10632715; 40.000.000)

Hoja de cálculo Excel



	A	B	C	D	E
1	PRESTAMO		40.000.000,00		
2	CUOTAS	1	(10.632.715,00)		
3		2	(10.632.715,00)	=TIR(C1:C5)	
4		3	(10.632.715,00)		
5		4	(10.632.715,00)		
6					

b) La tasa verdadera de rentabilidad (TIR modificada), si el Banco puede reinvertir el valor de las cuotas a una tasa de interés del 1,8% trimestral.

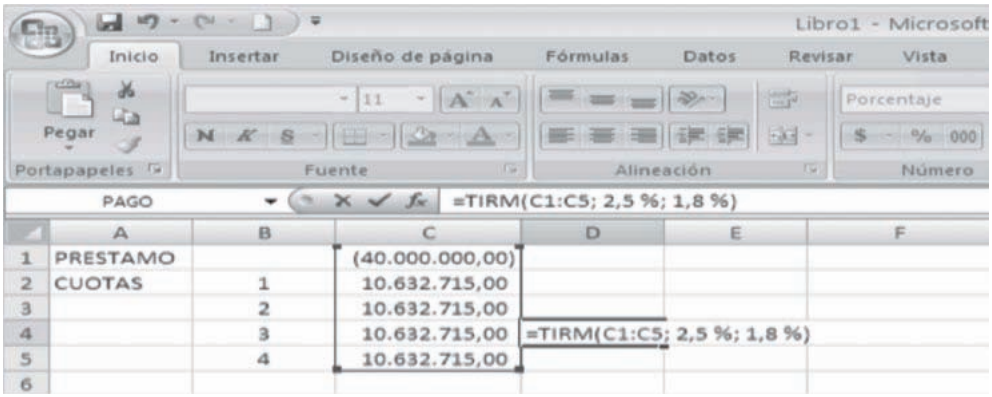
$$F = A\left[\frac{(1+i)^4 - 1}{i}\right] = 10.632.715\left[\frac{(1+0.018)^4 - 1}{0.018}\right] = \$\ 43.693.035.22$$

P = $ 40.000.000 F = $ 43.693.035.22 $n = 4$ $i = ?$

$$i = \left(\frac{F}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

$$i = \left(\frac{43.693.035.22}{40.000.000}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = 2.23\%\ \text{trimestral}$$

En Excel: = TASA (4; 0; −40.000.000; 43.693.035.22)



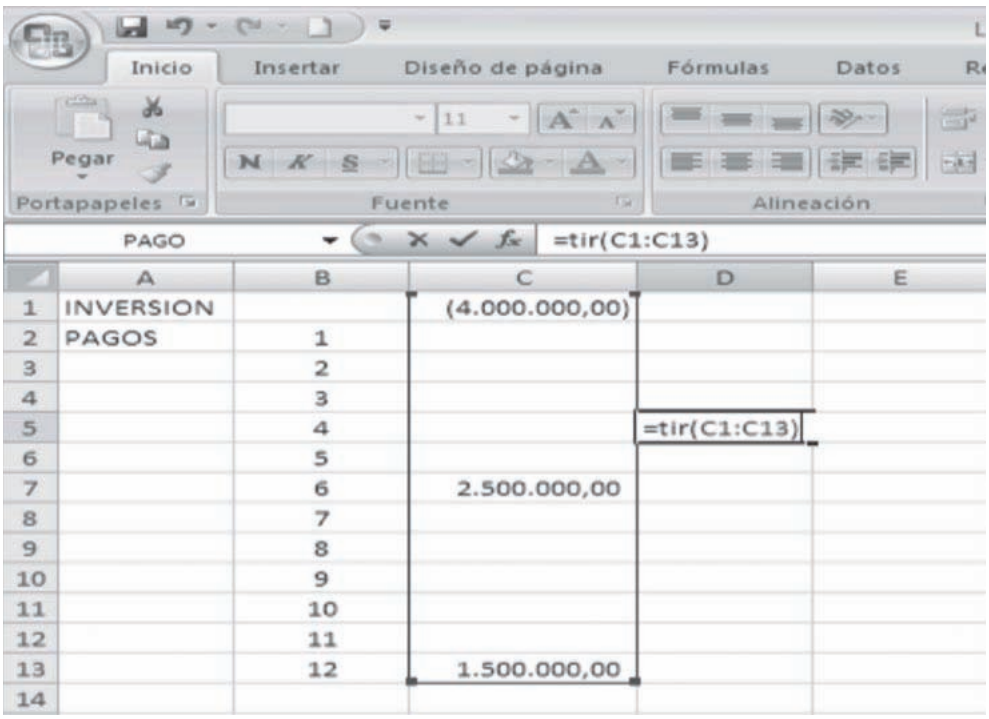
EJERCICIO 14. El señor Juan invierte en un negocio $ 4.000.000 y recibe $ 2.500.000 al final del mes 6 y $ 1.500.000 al final del mes 12. ¿Perdió o ganó dinero? Explique la respuesta.

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

$$4.000.000(1 + i)^{12} = 2.500.000(1 + i)^{6} + 1.500.000$$

Por interpolación lineal, $i = 0\%$, por lo tanto, se pierde dinero en términos reales, porque no se está reconociendo el valor del dinero en el tiempo. Si el señor Juan acepta este sistema de pagos no le está dando valor a su dinero.

Hoja de cálculo Excel



EJERCICIO 15. ¿Qué resulta mejor negocio?

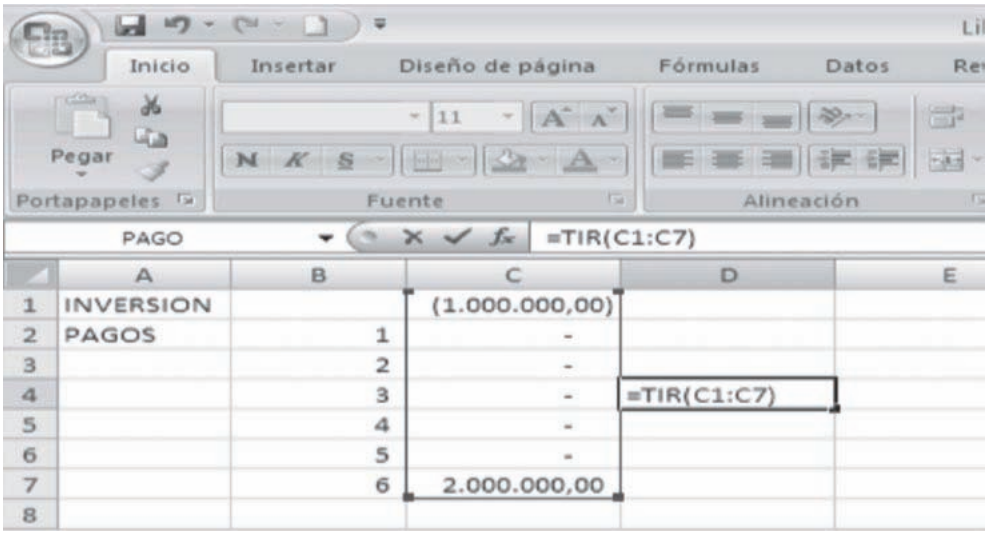
a) Invertir $ 1.000.000 y recibir después de 6 meses $ 2.000.000

P = $ 1.000.000 F = $ 2.000.000 n = 6 meses i = ?

$$i = \left(\frac{F}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

$$i = \left(\frac{2.000.000}{1.000.000}\right)^{\frac{1}{6}} - 1 = 12.25\% \text{ mensual}$$

En Excel: = TASA (6; 0; −1.000.000; 2.000.000)



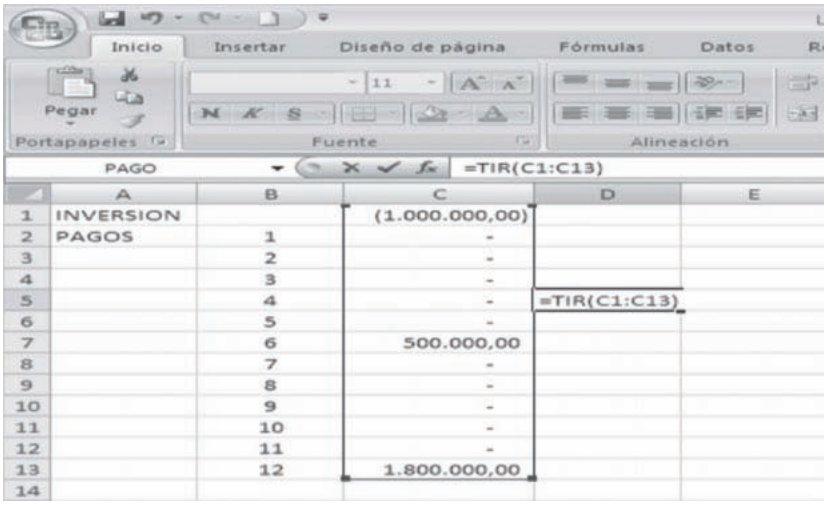
	A	B	C	D	E
1	INVERSION		(1.000.000,00)		
2	PAGOS	1	-		
3		2	-		
4		3	-	=TIR(C1:C7)	
5		4	-		
6		5	-		
7		6	2.000.000,00		
8					

b) Invertir $ 1.000.000 y recibir después de 6 meses $ 500.000 y después de 12 meses $ 1.800.00.

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

$$1.000.000(1 + i)^{12} = 500.000(1 + i)^{6} + 1.800.000$$

Por interpolación lineal, i = 8.31% mensual.



	A	B	C	D	E
1	INVERSION		(1.000.000,00)		
2	PAGOS	1	-		
3		2	-		
4		3	-		
5		4	-	=TIR(C1:C13)	
6		5	-		
7		6	500.000,00		
8		7	-		
9		8	-		
10		9	-		
11		10	-		
12		11	-		
13		12	1.800.000,00		
14					

Con base en los resultados de las tasas de interés obtenidas, concluimos que la mejor opción de negocio es la A.

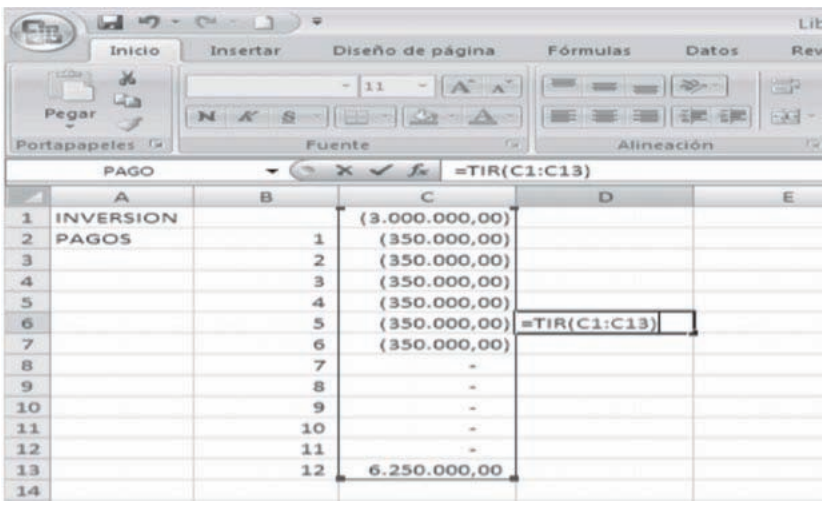
EJERCICIO 16. Un proyecto requiere de las siguientes inversiones: inversión inicial de $ 3.000.000, desde el primer mes y durante 6 meses consecutivos una inversión mensual de $ 350.000. Si al final del año se reciben $ 6.250.000, ¿cuál fue la tasa de rendimiento mensual?

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

$$3.000.000(1+i)^{12} + 350.000\left[\frac{(1+i)^{6}-1}{i}\right](1+i)^{6} = 6.250.000$$

Por interpolación lineal, $i = 1.94\%$ mensual.

Hoja de cálculo Excel



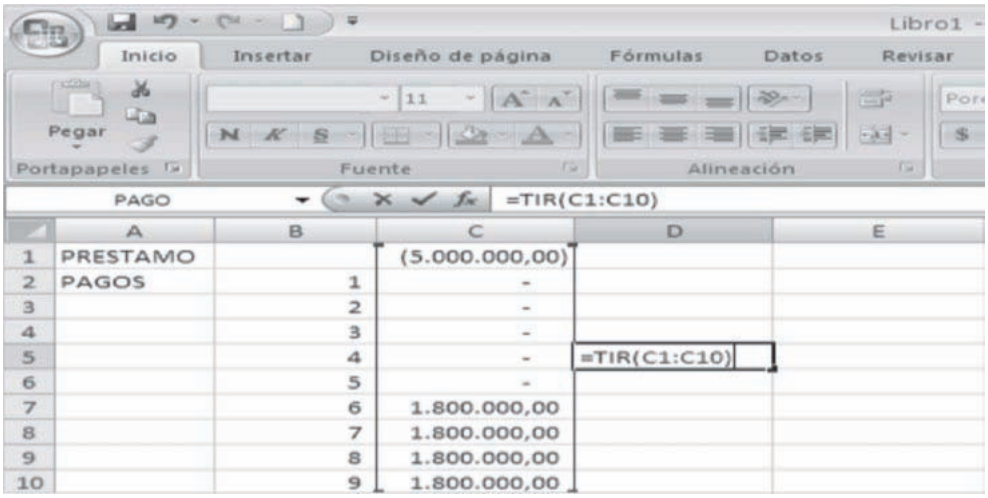
	A	B	C	D	E
1	INVERSION		(3.000.000,00)		
2	PAGOS	1	(350.000,00)		
3		2	(350.000,00)		
4		3	(350.000,00)		
5		4	(350.000,00)		
6		5	(350.000,00)	=TIR(C1:C13)	
7		6	(350.000,00)		
8		7	-		
9		8	-		
10		9	-		
11		10	-		
12		11	-		
13		12	6.250.000,00		
14					

EJERCICIO 17. Un estudiante recibe un préstamo de $ 5.000.000 para el pago de la matrícula del postgrado en finanzas. El documento que firma contempla el pago de 4 cuotas mensuales de $ 1.800.000, comenzando a pagarlas a partir del mes 6. ¿Qué tasa de interés le cobraron?

$$5.000.000\left(1+i\right)^{9} = 1.800.000\left[\frac{\left(1+i\right)^{4}-1}{i}\right]$$

Por interpolación lineal, i = 5,0% mensual.

Hoja de cálculo Excel



	A	B	C	D	E
1	PRESTAMO		(5.000.000,00)		
2	PAGOS	1	-		
3		2	-		
4		3	-		
5		4	-	=TIR(C1:C10)	
6		5	-		
7		6	1.800.000,00		
8		7	1.800.000,00		
9		8	1.800.000,00		
10		9	1.800.000,00		

EJERCICIO 18. Para usted como cliente, ¿qué resulta mejor?

a) Cancelar una obligación de $ 5.000.000 por medio de 9 cuotas mensuales de $ 650.000, comenzando a pagarlas dentro de 4 meses.

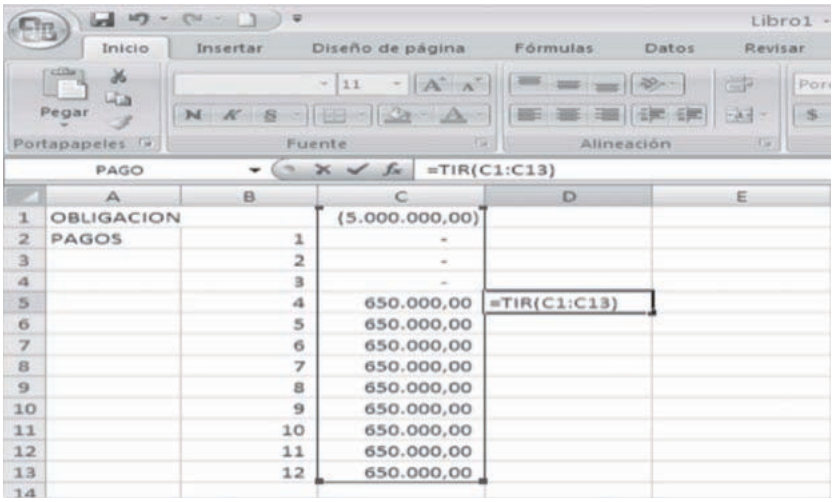
b) Cancelar la misma obligación por medio de 12 cuotas de $ 530.000 pagadas a partir del primer mes

Opción a: Ecuación de valor con fecha focal en el mes 12:

$$5.000.000\left(1+i\right)^{12} = 650.000\left[\frac{\left(1+i\right)^{9}-1}{i}\right]$$

Por interpolación lineal, i = 2,0% mensual.

Hoja de cálculo Excel



	A	B	C	D	E
1	OBLIGACION		(5.000.000,00)		
2	PAGOS	1	-		
3		2	-		
4		3	-		
5		4	650.000,00	=TIR(C1:C13)	
6		5	650.000,00		
7		6	650.000,00		
8		7	650.000,00		
9		8	650.000,00		
10		9	650.000,00		
11		10	650.000,00		
12		11	650.000,00		
13		12	650.000,00		
14					

Opción B:

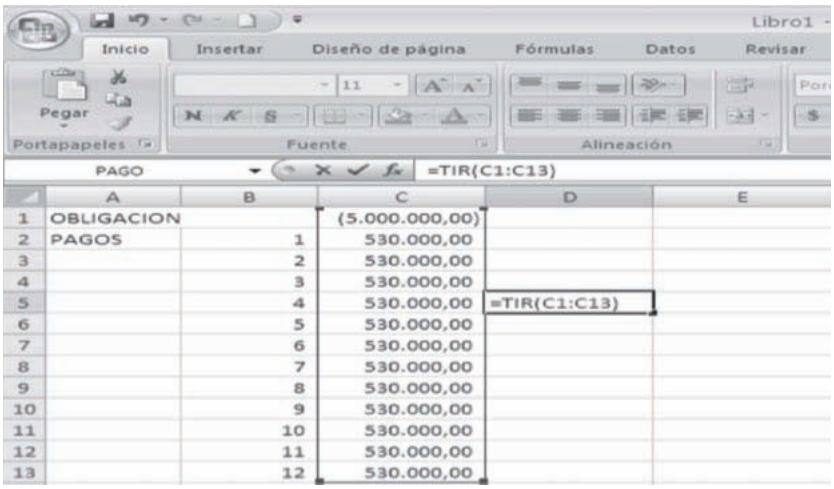
$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$5.000.000 = 530.000\left[\frac{(1+i)^{12} - 1}{i(1+i)^{12}}\right]$$

Por interpolación lineal, $i = 3.91\%$ mensual.

En Excel: $= \text{TASA}\ (12;\ -530.000;\ 5.000.000)$

Hoja de cálculo Excel



	A	B	C	D	E
1	OBLIGACION		(5.000.000,00)		
2	PAGOS	1	530.000,00		
3		2	530.000,00		
4		3	530.000,00		
5		4	530.000,00	=TIR(C1:C13)	
6		5	530.000,00		
7		6	530.000,00		
8		7	530.000,00		
9		8	530.000,00		
10		9	530.000,00		
11		10	530.000,00		
12		11	530.000,00		
13		12	530.000,00		

La mejor opción es la primera.

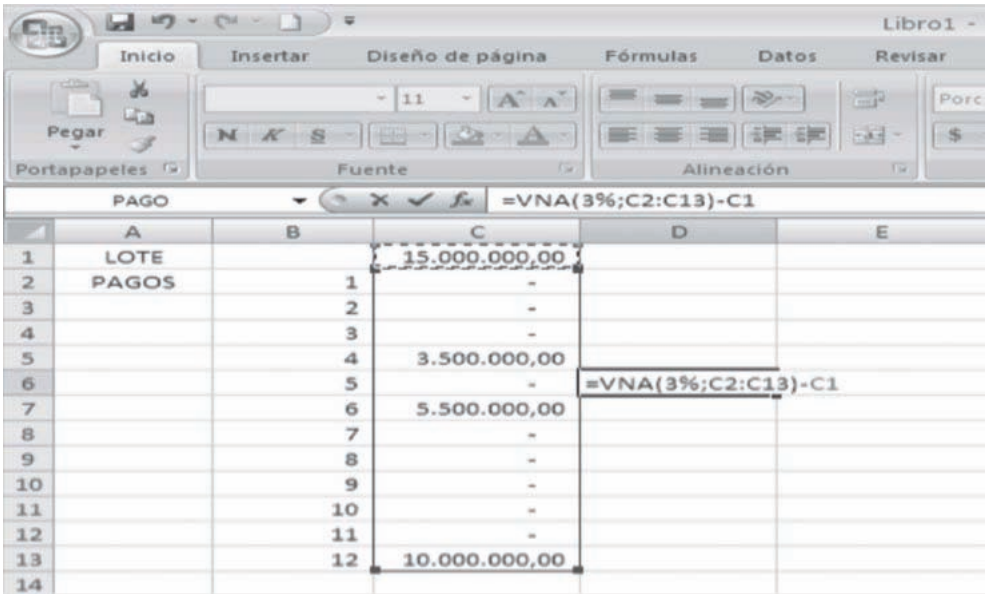
EJERCICIO 19. El señor Pedro le compró a ORBE LTDA un lote de terreno que tiene un valor de contado de $ 20.000.000 y se comprometió a pagarlo de la siguiente forma: una cuota inicial de $ 5.000.000, un pago de $ 3.500.000 dentro de 4 meses, un pago de $ 5.500.000 dentro de 6 meses y un pago de $ 10.000.000 dentro de 12 meses. Si la tasa de oportunidad de ORBE LTDA es del 3.0% mensual, diga si hizo un buen o mal negocio. Utilice el método del VPN.

VPE = $ 20.000.000

$$VPI = 5.000.000 + \frac{3.500.000}{(1+0.03)^4} + \frac{5.500.000}{(1+0.03)^6} + \frac{10.000.000}{(1+0.03)^{12}} = \$\ 19.729.666.88$$

$VPN_{(3\%)} = VPI - VPE = \$\ 19.729.666.88 - \$\ 20.000.000 = \$\ -270.333.12$, menor que cero, por lo tanto, ORBE LTDA hizo un mal negocio.

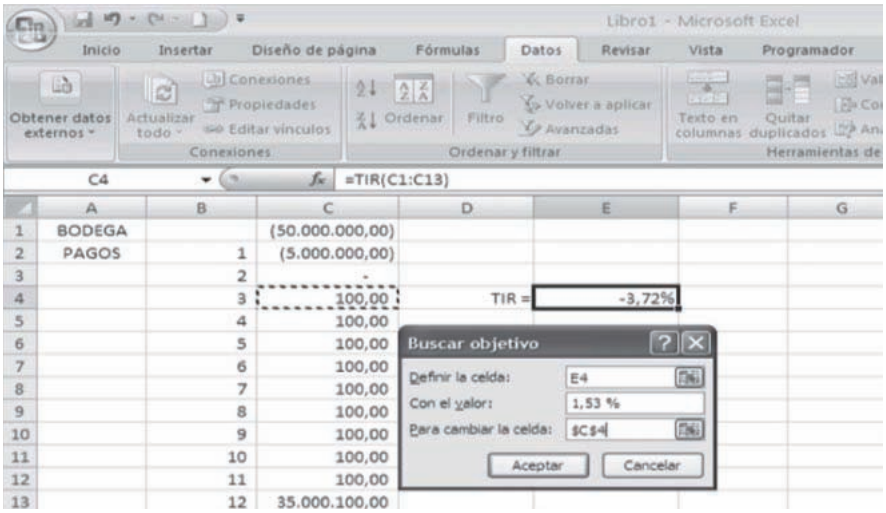
Hoja de cálculo Excel



EJERCICIO 20. Se compra una bodega por $ 50.000.000 y en el primer mes se le hacen reparaciones por $ 5.000.000. Se espera arrendarla a partir del tercer mes hasta finales del año, cuando se estima venderla por $ 35.000.000. Si la tasa de oportunidad es del 1.53% mensual, ¿en cuánto se debe arrendar la bodega, para que sea un buen negocio? Utilice *Buscar objetivo* de Excel.

Con la información suministrada y asumiendo un valor arbitrario (por ejemplo, 100) para las cuotas, se calcula la TIR y luego aplicando *Buscar objetivo* se calcula el valor de las cuotas. Para que sea un buen negocio, como mínimo el valor de la TIR debe ser igual a la tasa de oportunidad del 1.53% mensual.

Hoja de cálculo Excel



	A	B	C
1	BODEGA		(50.000.000,00)
2	PAGOS	1	(5.000.000,00)
3		2	-
4		3	100,00
5		4	100,00
6		5	100,00
7		6	100,00
8		7	100,00
9		8	100,00
10		9	100,00
11		10	100,00
12		11	100,00
13		12	35.000.100,00

La bodega debe arrendarse por $ 2.878.482.24 mensuales.

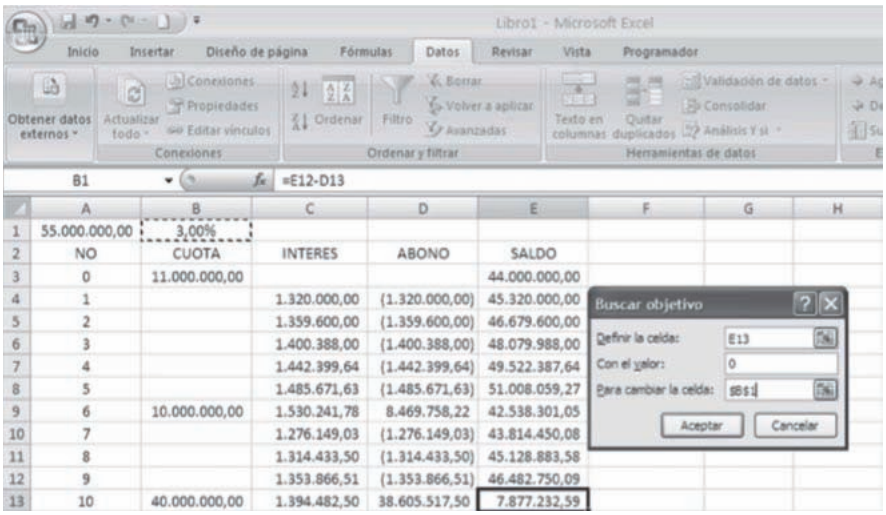
EJERCICIO 21. Un cliente le propone comprarle una vivienda que tiene un valor de contado de $ 55.000.000, con el siguiente plan de pagos: cuota inicial del 20%, un pago dentro de 6 meses de $ 10.000.000 y un pago de $ 40.000.000 a los 10 meses. Si usted está dispuesto a prestar su dinero a una tasa de interés del 3% mensual, ¿aceptaría el negocio?

Ecuación de valor con fecha focal en el mes 10:

$$55.000.000(1 + i)^{10} = 11.000.000(1 + i)^{10} + 10.000.000(1 + i)^{4} + 40.000.000$$

Por interpolación lineal, $i = 1.40\%$ mensual, menor que la tasa de oportunidad, por lo tanto, el negocio no se debe aceptar.

Hoja de cálculo Excel



	A	B	C	D	E
1	55.000.000,00	3,00%			
2	NO	CUOTA	INTERES	ABONO	SALDO
3	0	11.000.000,00			44.000.000,00
4	1		1.320.000,00	(1.320.000,00)	45.320.000,00
5	2		1.359.600,00	(1.359.600,00)	46.679.600,00
6	3		1.400.388,00	(1.400.388,00)	48.079.988,00
7	4		1.442.399,64	(1.442.399,64)	49.522.387,64
8	5		1.485.671,63	(1.485.671,63)	51.008.059,27
9	6	10.000.000,00	1.530.241,78	8.469.758,22	42.538.301,05
10	7		1.276.149,03	(1.276.149,03)	43.814.450,08
11	8		1.314.433,50	(1.314.433,50)	45.128.883,58
12	9		1.353.866,51	(1.353.866,51)	46.482.750,09
13	10	40.000.000,00	1.394.482,50	38.605.517,50	7.877.232,59

BIBLIOGRAFÍA

Álvarez, Alberto A. *Matemáticas financieras*, 3a. ed. Mc Graw Hill, 2005.

Arboleda, Benjamín. *Ingeniería económica,* ASIDUA, 3a. ed., 1980.

Baca Urbina, Gabriel. *Fundamentos de ingeniería económica*, 4a. ed. Mc Graw Hill, 2000.

Baca, Guillermo *Ingeniería económica,* 7a. ed., Fondo Educativo Panamericana, 2002.

Baldor, Aurelio. *Aritmética*, Editorial Mediterráneo, 1980.

Blank y Tarquin. *Ingeniería económica*, Mc Graw Hill, 3a. edición.

Bodie y Merton. *Finanzas*, Prentice Hall, 1999.

Brealey y Myers. *Principios de finanzas corporativas,* Mc Graw Hill, 1993.

Gallardo, Juan. *Formulación y evaluación de proyectos de inversión*, Mc Graw Hill, 1988.

García, Jaime A. *Matemáticas financieras*, 3a. edición, Prentice Hall, 2000.

García, Óscar León. *Administración financiera*, 3a. edición, Editorial EAFIT, 1999.

Gaviria Cadavid. *La indomable inflación colombiana*, Universidad Sergio Arboleda, 1995.

Gómez Ceballos, J. Alberto. *Matemáticas financieras*, Tecnotextos, 1992.

Grant y Leavenworth. *Principios de ingeniería económica*, Cecsa, 1989.

Gutiérrez Marulanda, Luis Fernando. *Finanzas prácticas para países en desarrollo*, Norma, 1994.

Icav. *La financiación de la vivienda en Colombia*, 1992.

Linero González, Gustavo. *Matemáticas financieras aplicadas*, Universidad del Valle, 1999.

Miranda, Juan José. *Gestión de proyectos*, MM Editores, 2002.

Ortiz, Alberto. *Gerencia financiera*, Mc Graw Hill, 1998.

Pindyk, Alberto. *Microeconomía*, Mc Graw Hill, 1995.

Portus, Lincoyan. *Matemáticas financieras*. Mc Graw Hill, 1997.

Sachs y Larrain. *Macroeconomía*, Prentice Hall, 1994.

Sapag, Nassir. *Criterios de evaluación de proyectos*, Mc Graw Hill, 1993.

———, Sapag, Reinaldo. *Preparación y evaluación de proyectos*, 4a. ed., Mc Graw Hill, 2000.

Serrano, Javier, Villareal, Julio. *Fundamentos de finanzas*, Mc Graw Hill, 1998.

Thompson, J.E. *Aritmética*, Unión Tipográfica, 1949.

Trejos, Carlos Ariel. *Ingeniería económica*, Universidad del Valle, 1996.

Varela Villegas, Rodrigo. *Evaluación económica de inversiones*, Norma, 1998.

Vélez Pareja, Ignacio. *Decisiones de inversión*, ceja, 2000.

Vidaurri, Héctor Manuel, *Matemáticas financieras*, Ecafsa, 1997.

Weston, Fred, Brigham, Eugene. *Fundamentos de administración financiera*, Mc Graw Hill. Tercera edición, 1995.

Zarruk, Carlos Alberto. *La corrección monetaria y el crédito en upac, icav*, 1986.

Otros títulos de interés:

- **Evaluación financiera de proyectos,**
  Jhonny de Jesús Meza Orozco

- **Didáctica de las matemáticas,**
  Robinson Castro Puche

- **Fundamentos de cálculo,**
  con aplicaciones a ciencias económicas
  y administrativas,
  Francisco Soler y Reinaldo Núñez

- **Gráficas y tablas estadísticas en Excel,**
  Héctor Daniel Lerma González

- **Matemáticas financieras empresariales,**
  Juan Antonio Flórez Uribe

- **Matemáticas básicas,**
  Rafael A. Álvarez
  Horacio Fernández C.
  José Alberto Rúa Vásquez

- **Matemática para informática,**
  Ismael Gutiérrez García

Matemáticas financieras aplicadas

Uso de las calculadoras financieras y **Excel**

Es común para cualquier persona que abre una cuenta de ahorros, constituye un CDT o solicita un crédito bancario, comercial o de vivienda, sentirse agobiado por la dificultad de comprender los indicadores y sistemas de amortización propios de nuestro sistema financiero y comercial, tales como la DTF, la UVR, tasas nominales y efectivas, tasas variables, TIR, VPN, sistema de cuota fija, sistema de abono constante a capital, etc.

La enseñanza de las finanzas, en general, ha tenido una importante evolución con el desarrollo de nuevas tecnologías. En esta cuarta edición se tratan estos temas propios de las Matemáticas Financieras utilizando, además de los procedimientos matemáticos tradicionales, los equivalentes con las calculadoras financieras y, especialmente, la hoja de cálculo Excel. Como material de enseñanza complementario, el lector podrá descargar del SIL (Sistema de Información en Línea) aplicativos en Excel relacionados: uno, con el cálculo de intereses moratorios para deudas bancarias y tributarias vencidas y, el otro, con la conversión de tasas de interés; **así mismo, ejercicios para resolver propuestos por el autor.**

El texto está orientado más al aprendizaje que a la enseñanza, de tal forma que cualquier persona con los fundamentos matemáticos básicos y con deseos de aprender el tema, pueda abordarlo sin dificultad.

Colección: Textos Universitarios
Área: Economía y finanzas.

ECOE EDICIONES

ISBN 978-958-648-728-3